ቅጠ-ብዙ ራምዚ ፅንሰ ሀሳቦች - ምሳሌ

አምሀ ጥኡመ ልሳን

ቪ. በርገልሶን እና ነ. ሀይንድማን [1] ዋና ግኝታቸውን ከ ሚሊከን ቴሎር ፅንሰ-ሀሳብ ጋር ማጣመር እንደማይቻል ለማሳየት፣ ባለ 6-ክፍልት የሆነ የ $[N]^2$ ድልድልታ ተጠቅመው፣ ከ 6-ክፍልት ያነሰ ምሳሌ ማቅረብ ይቻል እንደሆነ ጠይቀዋል። በዚህ ፅሁፍ የነሱን 6-ክፍልት ምሳሌ ወደ 5-ክፍልት ምሳሌነት ማውረድ እንደሚቻል እናሳያለን።

1. መግቢያ

የ [1] ደራሲዎች የ 6-ክፍልት ምሳሌያቸውን ሲያቀርቡ፣ «የተለያዩት ክፍልት ⋯ ድንጋጌያቸው ረጅምና የተወሳሰበ ነው። ስለዚህም በአቅማሞ እነዚህን ድንጋጌዎች ጠበቆች እንሚሉት ሁሉ «በዋቤ» እናካትታቸዋለን።» ብለዋል።

እኛም፣ ይህ ፅሁፍ አጭር ማስታወሻነቱን እንዳይለቅ፣ የደራሲዎቹን አርአያነት በመከተል፣ በአቅማሞ ላስፈላጊው ድንጋጌ ሁሉ አንባቢውን ወደ [1] እና ወደ [2] እንመራለን። ሆኖም፣ የሚሊካን ቴሎርን ፅንሰ-ሀሳብና የ[1] ን ዋና ፅንሰ-ሀሰብ ያለ ማረጋገጫ እናትታለን።

1.1 ፅንሰ-ሀሳብ (ሚሊካን-ቴሎር).

$k, r, \in N$ እንዲሁም $[N]^k = \bigcup_{[i<r]} A_i$ ይሁኑ። እንግዴህ፣
$-1 = n(0) < n(1) < n(2) < \cdot \cdot \cdot \cdot < n(k) < \omega$ ሲሆንና፣

ለያንዳንዱ $t \in k', a_t \in FS(\langle x_m \rangle_{m=n(t-1)+1}^{n(t)})$ ከሆነ፣

$\{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \in A_i$ የሚያስገኙ $i < r$ እና አዳጊ ክትትል $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ ይኖራሉ።

1.2 ፅንሰ-ሀሳብ (በርገልሶን-ሀይንድማን).

$\langle G_n \rangle_{n<\omega}$ የመደበኛ ምልሰት የማይለውጠው ድልድልት ቤተ-ሰብ የሆነ የግት ስብስብ ክትትል ነው እንበል። $\langle R_n \rangle_{n<\omega}$ ደግሞ የድልድልቱ መደበኛ ዋኽዶ ቶኮያዊ እኩልታዎች ስርአት በድፍህዝ (ድፍን-አህዝ) ፅኤ-ጠቂዋሚነት ይደረድራሉ። እንዲሁም ለያንዳንዱ n ፣ S_n የ R_n ጠቅላላ ስብስበ-ውጤት ቤተ-ሰብ ይሁን። በተጨማሪም $k, r, \in N$ እና $[N]^k = \bigcup_{[i<r]} A_i$ ናቸው እንበል። ከዚህም የሚቀጥለው ይከተላል።

የሚከተለውን የሚያረኩ $i < r$ እና አዳጊ ክትትል $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ ፣ ለያንዳዱም n፣ $B_n \in G_n$ ፣ $C_n \in S_n$፣ እና አዳጊ ክትትል $\langle x_{n,m} \rangle_{m<\omega}$ ይኖራሉ።
$-1 = n(0) < n(1) < n(2) < \cdot \cdot \cdot \cdot < n(k) < \omega$ ሲሆንና፣ ለያንዳንዱ

$$t \in k', a_t \in B_{n(t)} \cup C_{n(t)} \cup FP(\langle x_m \rangle_{m=n(t-1)+1}^{n(t)}) \cup \bigcup \{ FS(\langle x_{l,m} \rangle_{m=n(t-1)+1}^{n(t)}) : n(t-1) < l \le n(t) \}$$ ፣

$a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ ከሆነ፣ $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \in A_i$ ይገኛል።

2. ምሳሌ

የሚከተለው ፅንሰ-ሀሳብ 1.1 እና 1.2 እንደማይጣመሩ የሚያሳይ ባለ 5-ክፍልት ምሳሌ ነው። ይህንንም የምናደርገው እንደ [1] ሁሉ ምንም የ k-ስልፍ በፅንሰ-ሀሳብ 1.2 ከተመለከተው ከ አንድ $FS(\langle x_{n,m} \rangle_{m<\omega})$ እንደማይወጣ በማሳየት ነው።

2.1 ምሳሌ።

$[N]^2 = \bigcup_{[i<5]} L_i$ ን የሚያከብሩ L_0፣ L_1፣ L_2፣ L_3 እና L_4 ሲኖሩ፡፡ $i < 5$ ሲሆን፣ የሚከተሉትን ሁለት ሁተቶች በአንዴ የሚያረኩ $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ እና $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ የተሰኙ ክትትሎች የሉም፡፡

1. $-1 = n(0) < n(1) < n(2)$ በሆነ ቁጥርና፣

ለያንዳንዱ $t \in k'$, $a_t \in \{1,2\}$, $z_t \in FP(\langle x_m \rangle_{m=n(t-1)+1}^{n(t)}$ ከሆነ፣

$\{z_1, z_2, \cdots, a_k\} \in L_i$፡፡ እንዲሁም፣

2. $-1 = n(0) < n(1) < n(2)$ በሆነ ቁጥርና፣ ለያንዳንዱ $t \in k'$, $a_t \in \{1,2\}$, $z_t \in \{x_m : n(t-1)+1) < m \le n(t)\} \cup \{x_m + x_s : n(t-1) < s \le n(t)\}$ ከሆነ፡ $\{z_1, z_2, \cdots, a_k\} \in L_i$ ይከተላል፡፡

ማረጋገጫ፡ a(x), b(x), c(x), A_0, A_1, A_2, A_4, B_0, B_1, C_0, J_0, I_0 እና I_1 ፣ የ [2] ድንጋጌያቸውን ይጠብቁ፡፡ $R = \{A_1, A_2 \cap B_1 \cap I_0, A_3 \cap C_1 \cap I_0, A_4, A_0, A_2 \cap B_0, A_2 \cap B_1 \cap I_1, A_3 \cap C_1 \cap I_1, A_3 \cap C\}$ ከሆነ R የ N ድልድት ነው፡፡ ለ$\{x,y\} \in [N]^2$፣ x እና y የአንድ R ክፍልት አባል ከሆኑ ብቻ $x \approx y$ (ግድፍ R) ብለን እንፃፈው፡፡

$L_0 = \{\{x,y\} \in [N]^2$: $x \ne y$ (ግድፍ R) ወይም $\{x,y\} \subseteq J_0\}$
$L_1 = \{\{x,y\} \in [N]^2 \backslash L_0$: (1) $\{x,y\} \subseteq A_0$ አልያም
(2) $\{x,y\} \subseteq A_2$, $x < y$ እና $a(x)-c(x) < a(y)-c(y)\}$
$L_2 = \{\{x,y\} \in [N]^2 \backslash L_0$: $\{x,y\} \subseteq A_2$, $x < y$ እና $a(x)-c(x) \ge a(y)-c(y)\}$
$L_3 = \{\{x,y\} \in [N]^2 \backslash L_0$: $\{x,y\} \subseteq A_3$, $x < y$ እና $a(x)-b(x) < a(y)-b(y)\}$
$L_4 = \{\{x,y\} \in [N]^2 \backslash L_0$: $\{x,y\} \subseteq A_3$, $x < y$ እና $a(x)-b(x) \ge a(y)-b(y)\}$

R የ N ድልድት ስለሆነ፣ $[N]^2 = \bigcup_{[i<5]} L_i$ ፡፡ አሁን ደግሞ $i<5$ ፣ በምሳሌ 2.1 የሚገኙትን ሁተት [1] እና [2] ን የሚያከብሩ $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ እና $\langle y_n \rangle_{n<\omega}$ የተሰኙ ክትትሎች በN ውስጥ ይኑሩ፡፡ በ [1] ውስጥም እንዲያ ነበርና፣ $i \notin \{1,2,3,4\}$ እንደሆነ እንገነዘብ፡፡ ስለዚህ፣ የምናሳየው $i \ne 0$ ን ብቻ ይሆናል፡፡ በ J_0 ድንጋጌ መሰረት (እንደ [2] ሁሉ) ለማንኛውም $A \in [N]^\omega$ ፣ $FP(A) \not\subseteq J_0$ ፡፡

ስለዚህ $z_0 \in FP(\langle y_m \rangle_{m=0}^{\infty}) \backslash J_0$ እና

ለ $t > 0$፣ $z_t \in FP(\langle y_m \rangle_{m=z_{t-1}+1}^{\infty}) \backslash J_0$ ይሁኑ

ለ $t_1 < t_2$ ፣ $z_{t_1} \le z_{t_2}$ እንደሆነ አስተውሉ፡፡

እንግዲህ በገበጣ-ጉድጉዋድ መርሆ መሰረት፣ $z_\alpha \le z_\beta$ (ግድፍ R) ን የሚያስከትሉ የN አካል የሆኑ ራሳቸውን የቻሉ α እና β እንምረጥ፡፡ በተጨማሪም z_α ፣ $z_\beta \in J_0$ ስለሆኑ፣ $z_\alpha = \prod_{[m \in F]} y_m$ እና $z_\beta = \prod_{[m \in G]} y_m$ እንደሆኑ እናሳያለን፡፡ እንዲሁም ትህት $F \ge z_{\alpha-1} + 1$ እና ትህት $G \ge z_{\beta-1} + 1$ ሲሆኑ፣ $\alpha < \beta$ ናቸው እንበል፡፡ n(0) = -1፣

n(1) = ልእል F እና n(2) = ልእል G ይሁኑ። ከዚያም $\alpha < \beta$ ነውና $\alpha \le \beta$-1 ይከተላል። እንግዴህ፣ ትህት $G \ge z_{\beta-1} + 1 \ge z_\alpha + 1 \ge y$ ልእል F+1 ≥ ልእል F+1 = n(1) + 1 ።

$$\text{ስለዚህ } z_\alpha \in FP(\langle y_n \rangle)_{m=0}^{n(1)} \quad \text{እና} \quad z_\beta \in FP(\langle y_m \rangle)_{m=n(1)+1}^{n(2)} \text{ ።}$$

ነገር ግን፣ $\{ z_\alpha , z_\beta \} \notin L_0$ ነውና፣ $i \neq 0$ ።

ዋቤ

[1] ቪ. በርጌልሶን እና ነ. ሀይንድማን፡ የላእላይ-ወንፊቶችና ቅጠ-ብዙ ራምዚ ፅንሰ-ሀሳቦች፣ ኮምቢናቶሪካ (Combinatorika) 9 (1989)፣ 1-7።

[2] ነ. ሀይንድማን፡ ድልድቶች፣ ድምሮችና ብዝቶች - ሁለት ቅውመታዊ ምሳሌዎች፣ (J. Comb. Theory (Series A) 29 (1980), 113-120.