

КРАТКИЙ КУРС
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Книга 1

Л. ЛАНДАУ, Е. ЛИФШИЦ
МЕХАНИКА
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Издательство «Наука»

L. LANDAU
E. LIFSHITZ
CURSO ABREVIADO DE FISICA
TEORICA

Libro 1

MECANICA Y
ELECTRODINAMICA

Traducido del ruso por el ingeniero
ANTONIO MOLINA GARCÍA

Cuarta edición

EDITORIAL · MIR · MOSCU

CAPITULO VII

ECUACIONES CANONICAS

§ 30. ECUACIONES DE HAMILTON

La formulación de las leyes de la mecánica por medio de la función de Lagrange (y de las ecuaciones lagrangianas que de ella se deducen) presupone que la definición del estado mecánico del sistema se haga dando sus coordenadas y velocidades generalizadas. Pero esta definición no es la única posible. En la investigación de diversas cuestiones generales de la mecánica ofrece una serie de ventajas la definición del estado mecánico del sistema mediante coordenadas e impulsiones generalizadas. Por esto se plantea el problema de hallar las ecuaciones del movimiento correspondientes a esta formulación.

Para pasar de un conjunto de variables independientes a otro se emplea la transformación que en matemáticas se conoce con el nombre de transformación de Legendre. En este caso la transformación se reduce a lo siguiente.

La diferencial total de la función de Lagrange como función de las coordenadas y de las velocidades es

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i.$$

Esta expresión se puede escribir de la forma

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i, \quad (30,1)$$

puesto que las derivadas $\partial L / \partial \dot{q}_i$ son, por definición, las impulsiones generalizadas, y $\partial L / \partial q_i = p_i$ en virtud de las ecuaciones de Lagrange.

Escribiendo ahora el segundo término de (30,1) de la forma

$$\sum_i p_i d\dot{q}_i = d(\sum_i p_i \dot{q}_i) - \sum_i \dot{q}_i dp_i,$$

pasando la diferencial total $d(\sum_i p_i \dot{q}_i)$ al primer miembro y cambiando todos los signos, obtenemos de (30,1) lo siguiente:

$$d(\sum_i p_i \dot{q}_i - L) = - \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i.$$

La cantidad que se encuentra bajo el signo diferencial representa la energía del sistema (véase el § 6); esta energía expresada en función de las coordenadas y de las impulsiones recibe el nombre de *función de Hamilton*

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (30,2)$$

De la igualdad diferencial

$$dH = - \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i \quad (30,3)$$

se deducen las ecuaciones

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (30,4)$$

Estas son las ecuaciones del movimiento referidas a las variables p y q , es decir, las *ecuaciones de Hamilton*. Estas ecuaciones constituyen un sistema de $2s$ ecuaciones diferenciales de primer orden para $2s$ funciones $p(t)$ y $q(t)$ desconocidas, en lugar de las s ecuaciones de segundo orden del método de Lagrange. Por su sencillez formal y por su simetría, estas ecuaciones se llaman también *canónicas*.

La derivada total de la función de Hamilton respecto al tiempo

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i.$$

Sustituyendo aquí \dot{q}_i y \dot{p}_i por sus valores según (30,4), los dos últimos términos se anulan mutuamente, de manera que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (30,5)$$

En particular, si la función de Hamilton no depende del tiempo explícitamente, $dH/dt=0$, es decir, volvemos otra vez a la ley de la conservación de la energía.

Además de las variables dinámicas q , \dot{q} o q , p las funciones de Lagrange y de Hamilton contienen diversos parámetros que son magnitudes que caracterizan las propiedades del sistema mecánico mismo o del campo exterior que actúa sobre él. Supongamos que λ es uno de estos parámetros. Si lo consideramos como una magnitud variable, en lugar de (30,1) tendremos:

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda,$$

después de lo cual, en lugar de (30,3), obtenemos:

$$dH = - \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda,$$

de donde hallamos la correlación

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p, q} = - \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{\dot{q}, q}, \quad (30,6)$$

que relaciona las derivadas parciales, respecto al parámetro λ , de las funciones de Lagrange y de Hamilton; los subíndices de las derivadas indican que la derivación deberá hacerse en un caso para p y q constantes y en otro para q y \dot{q} constantes.

Este resultado se puede presentar de otra forma. Supongamos que la función de Lagrange tiene la forma $L=L_0+L'$, siendo L' una pequeña cantidad adicional a la función principal L_0 . Entonces, la cantidad adicional correspondiente en la función de Hamilton $H=H_0+H'$ estará relacionada con L' por medio de

$$(H')_{p, q} = -(L')_{\dot{q}, q}. \quad (30,7)$$

Problemas

1. Hallar la función de Hamilton de un punto material, en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

Solución. En las coordenadas cartesianas x, y, z :

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z).$$

En las coordenadas cilíndricas r, φ, z :

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + U(r, \varphi, z).$$

Y en las coordenadas esféricas r, θ, φ :

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \varphi).$$

2. Hallar la función de Hamilton de una partícula en un sistema de referencia que gira uniformemente.

Solución. De acuerdo con (29, 11) y (29, 10), obtenemos:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \Omega [\mathbf{r}p] + U.$$

§ 31. ECUACION DE HAMILTON — JACOBI

Al enunciar el principio de mínima acción consideramos la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (31,1)$$

tomada siguiendo la trayectoria entre las dos posiciones dadas $q^{(1)}$ y $q^{(2)}$ que el sistema ocupa en los instantes dados t_1 y t_2 . Pero al variar la acción se igualaban los valores de esta integral para las trayectorias próximas con los mismos valores de $q(t_1)$ y $q(t_2)$. De estas trayectorias solamente una responde al movimiento real: aquella para la cual la integral S es mínima.

Estudemos ahora el concepto de acción en otro aspecto. Concretamente, vamos a considerar S como una magnitud que caracteriza el movimiento por sus trayectorias verdaderas y a comparar los valores que da para las trayectorias que tienen común el origen $q(t_1)=q^{(1)}$ pero que pasan en un instante t_2 por posiciones distintas. En otras palabras, vamos a considerar la integral de acción para trayectorias reales como función de los valores de las coordenadas en el límite superior de integración.

La variación de la acción, al pasar de una trayectoria a otra próxima a ella, viene dada (para un grado de libertad) por la expresión (2,5)

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt.$$

Pero como las trayectorias de un movimiento real satisfacen la ecuación de Lagrange, la integral que figura en esta expresión se anula. En el primer término suponemos que en el límite inferior $\delta q(t_1)=0$ y al valor de $\delta q(t_2)$ le llamamos simplemente δq . Sustituyendo también $\partial L/\partial q$ por p , obtenemos finalmente que $\delta S=p\delta q$, o en el caso general de un número cualquiera de grados de libertad

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i. \quad (31,2)$$

De esta relación se deduce que las derivadas parciales de la acción respecto a las coordenadas son iguales a las impulsiones correspondientes

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \quad (31,3)$$

De forma análoga la acción se puede concebir como función explícita del tiempo, considerando las trayectorias que comienzan en un instante dado t_1 en una misma posición (configuración) determinada $q^{(1)}$, pero que terminan en una posición también dada $q^{(2)}$ en distintos instantes $t_2=t$. La derivada parcial $\partial S/\partial t$ así comprendida se puede hallar por medio de una variación apropiada de la integral. No obstante, resulta más fácil utilizar la fórmula (31,3) y operar de la manera siguiente.

Por la propia definición de la acción, su derivada total respecto al tiempo a lo largo de la trayectoria es

$$\frac{dS}{dt} = L \quad (31,4)$$

Por otra parte, considerando S como función de las coordenadas y del tiempo en el sentido que hemos expuesto anteriormente y utilizando la fórmula (31,3), tenemos:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i.$$

Comparando ambas expresiones, hallamos que

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i.$$

o finalmente:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(p, q, t), \quad (31,5)$$

Las fórmulas (31,3) y (31,5) se pueden escribir juntas en una expresión

$$dS = \sum_i p_i dq_i - H dt \quad (31,6)$$

que da la diferencial total de la acción como función de las coordenadas y del tiempo en el límite superior de la integral (31,1). La propia acción se escribe bajo la forma de la integral correspondiente

$$S = \int \left(\sum_i p_i dq_i - H dt \right). \quad (31,7)$$

En particular, si la función $H(p, q)$ no depende del tiempo explícitamente, de manera que la energía se conserva, $H(p, q)$ se puede sustituir por la constante E , y entonces la dependencia funcional de S respecto al tiempo se reduce al sumando $-Et$:

$$S(q, t) = S_0(q) - Et, \quad (31,8)$$

donde

$$S_0(q) = \int \sum_i p_i dq_i. \quad (31,9)$$

La función $S_0(q)$ se llama a veces *acción reducida*.

La función $S(q, t)$ satisface una ecuación diferencial determinada que podemos obtener sustituyendo en la correlación (31,5)

las impulsiones p por las derivadas $\partial S/\partial q$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; q_1, \dots, q_s; t\right) = 0 \quad (31,10)$$

Esta ecuación en derivadas parciales de primer grado se llama *ecuación de Hamilton — Jacobi*. Para una partícula en un campo exterior $U(x, y, z, t)$, por ejemplo, esta ecuación toma la forma

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 \right] + U(x, y, z, t) = 0. \quad (31,11)$$

La ecuación de Hamilton — Jacobi toma una forma algo más simple si la función $H(p, q)$ no depende del tiempo explícitamente. En este caso, tomando $S(q, t)$ de (31,8), obtenemos para la acción reducida la ecuación

$$H\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}; q_1, \dots, q_s\right) = E. \quad (31,12)$$

§ 32. INVARIANTES ADIABATICAS

Consideremos un sistema mecánico con movimiento lineal finito y caracterizado por cierto parámetro λ , que determina las propiedades del sistema mismo o del campo exterior en el cual se encuentra.

Supongamos que el parámetro λ influenciado por unas causas externas cualesquiera varía lentamente (o, como suele decirse, adiabáticamente) con el tiempo; se entiende por "lenta" una transformación en la cual λ varía poco durante un período T del movimiento del sistema:

$$T = \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda. \quad (32,1)$$

Un sistema de este tipo no es cerrado y su energía E no se conserva. Pero debido a la lentitud con que varía λ se puede asegurar que la velocidad \dot{E} de variación de la energía es proporcional a la velocidad $\dot{\lambda}$ de variación del parámetro λ . Esto significa que la energía del sistema se comporta al variar λ como cierta función de λ . En otras palabras, existe una combinación tal de E y λ que, al moverse el sistema, permanece invariable; esta magnitud recibe el nombre de *invariante adiabática*.

Sea $H(p, q; \lambda)$ la función hamiltoniana del sistema dependiente del parámetro λ . De acuerdo con la fórmula (30,5), la derivada total

de la energía del sistema respecto al tiempo será

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt}$$

Promediando esta igualdad respecto a un período de movimiento y sacando $\dot{\lambda}$ fuera del signo de promedio (puesto que tanto λ como $\dot{\lambda}$ varían muy lentamente), tenemos:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\overline{\partial H}}{\partial \lambda}$$

donde en la función promediada $\frac{\partial H}{\partial \lambda}$ se pueden considerar magnitudes variables únicamente p y q (pero no λ). Dicho de otro modo, el promedio se efectúa tomando un movimiento del sistema como el que tendría lugar si λ tuviera un valor constante dado.

Escribamos este promedio en forma explícita

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt$$

De acuerdo con la ecuación de Hamilton $\dot{q} = \partial H / \partial p$, tenemos:

$$dt = \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}$$

Valiéndonos de esta igualdad podemos sustituir la integración respecto al tiempo por la integración respecto a la coordenada; al hacer esto escribiremos también el período T bajo la forma

$$T = \int_0^T dt = \oint \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}$$

el signo \oint significa en este caso que la integración se extiende a la variación total ("hacia adelante" y "hacia atrás") de la coordenada en el transcurso de un período. Por lo tanto

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial H / \partial \lambda}{\frac{\partial H}{\partial p}} dq}{\oint \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}} \quad (32,2)$$

Como ya hemos indicado, las integraciones que figuran en esta fórmula deben tomarse a lo largo de la trayectoria del movimiento para un valor constante determinado de λ . A lo largo de una trayec-

toria como ésta la función de Hamilton conserva constante el valor de E , y la impulsión es una función definida de la coordenada variable q y de los dos parámetros constantes independientes E y λ . Considerando que la impulsión es precisamente una función del tipo $p(q; E, \lambda)$ y derivando la igualdad $H(p, q; \lambda) = E$ respecto al parámetro λ , obtenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0$$

ó

$$\frac{\partial H / \partial \lambda}{\partial H / \partial p} = - \frac{\partial p}{\partial \lambda}$$

Poniendo este resultado en la integral del numerador de (32,2) y escribiendo en la del denominador la función subintegral de la forma $\partial p / \partial E$, tenemos:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = - \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial E} dq} \quad (32,3)$$

ó

$$\oint \left(\frac{\partial p}{\partial E} \frac{d\bar{E}}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq = 0$$

Esta igualdad puede tomar finalmente la forma

$$\frac{dI}{dt} = 0, \quad (32,4)$$

donde I simboliza la integral

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq, \quad (32,5)$$

tomada siguiendo la trayectoria del movimiento, para los valores de E y λ dados. Este resultado demuestra que, dentro de la aproximación considerada, la magnitud I permanece constante al variar el parámetro λ , es decir, que es una invariante adiabática.

A la integral (32,5) se le puede atribuir un sentido geométrico evidente si se introduce el concepto de *trayectoria de fase* del sistema, es decir, la curva que representa p en función de q . Para los sistemas que efectúan un movimiento periódico la trayectoria de fase es una curva cerrada. La integral (32,5) a lo largo de esta curva representa el área comprendida dentro de ella.

Como ejemplo determinaremos la invariante adiabática de un

oscilador lineal. Su función de Hamilton es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2},$$

donde ω es la frecuencia propia del oscilador. La ecuación de la trayectoria de fase viene dada por la ley de la conservación de la energía $H(p, q) = E$. En este caso la curva es una elipse cuyos semiejes son $\sqrt{2mE}$ y $\sqrt{2E/m\omega^2}$ y cuya área (dividida por 2π) es

$$I = \frac{E}{\omega}. \quad (32.6)$$

La invariancia adiabática de esta magnitud significa que, cuando los parámetros del oscilador varían lentamente, la variación de su energía es proporcional a la frecuencia.

CAPITULO VIII

PRINCIPIO DE LA RELATIVIDAD

§ 33. VELOCIDAD DE PROPAGACION DE LAS INTERACCIONES

La interacción de las partículas materiales se define en la mecánica clásica por medio de la energía potencial, que es función de las coordenadas de las partículas que interaccionan. Es evidente que esta definición parte de la hipótesis de la propagación instantánea de las interacciones. Y, en efecto, las fuerzas que sobre cada una de las partículas ejercen las demás, según esta definición, dependen exclusivamente en cada instante de la posición que ocupan las partículas en dicho instante. Toda variación en la posición de una cualquiera de las partículas que interaccionan se refleja inmediatamente en las demás partículas.

No obstante, la experiencia demuestra que en la naturaleza no existen interacciones instantáneas. Por esta razón, la mecánica basada en la idea de la propagación instantánea de las interacciones incurre inevitablemente en cierta inexactitud. En realidad, si de dos cuerpos que interaccionan entre sí uno de ellos experimenta cualquier variación, ésta comienza a reflejarse en el otro al cabo de cierto tiempo. Dividiendo la distancia que hay entre dichos cuerpos por el intervalo de tiempo transcurrido, hallamos la *velocidad de propagación de las interacciones*.

Esta velocidad se podría llamar con más precisión velocidad máxima de propagación de las interacciones, puesto que únicamente determina el tiempo mínimo necesario para que llegue hasta el segundo cuerpo la primera *señal* anunciadora de la variación ocurrida en el primero. Es evidente que al afirmar la existencia de una velocidad máxima de propagación de las interacciones hay que admitir al mismo tiempo que en la naturaleza es imposible que los cuerpos se muevan con velocidades mayores que ésta.

De acuerdo con el principio o teoría de la relatividad, la velocidad de propagación de las interacciones, como una de las leyes de la naturaleza, es igual en todos los sistemas inerciales de referencia, es decir, es una constante universal.

Esta velocidad constante es al mismo tiempo, como demostraremos más adelante, la velocidad de propagación de la luz en el