

Apuntes: Diseño de helicópteros y aeronaves diversas.

**Apuntes: Diseño de helicópteros y
aeronaves diversas.**

Alejandro Roger Ull

Ingeniería Aeronáutica

Segunda edición – Septiembre de 2011

Acerca de estos apuntes

Estos apuntes se han realizado para cubrir el temario de la asignatura “Diseño de helicópteros y aeronaves diversas”, que se imparte en el cuarto curso de Ingeniería Aeronáutica en la Escola Tècnica Superior d’Enginyeries Industrial i Aeronàutica de Terrassa, de la Universitat Politècnica de Catalunya (ETSEIAT – UPC).

Licencia

Esta obra está bajo una licencia Attribution-ShareAlike 3.0 Unported (CC BY-SA 3.0) de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite:

http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es_ES

En líneas generales:

Es libre de:

- Compartir – Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.
- Transformar la obra y crear obras derivadas.
- Hacer un uso comercial de esta obra.

Bajo las condiciones siguientes:

- **Reconocimiento** — Debe reconocer al autor de la obra original (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoya el uso que hace de su obra).
- **Compartir bajo la Misma Licencia** — Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.



0. Contenidos

0. Contenidos	5
1. Aerodinámica del helicóptero	
1.1. Teoría de la cantidad de movimiento para vuelo axial	7
1.2. Salto de presiones en el rotor	8
1.3. Estados de operación del rotor	9
1.4. Vuelo a punto fijo	10
1.5. Adimensionalización de las ecuaciones	10
1.6. Coeficientes adimensionales	11
1.7. Potencia ideal y potencia real	12
1.8. Vuelo axial descendente	12
1.9. Teoría del elemento de pala para vuelo axial	14
1.10. Teoría combinada para vuelo axial	17
1.11. Rotores de velocidad inducida uniforme	18
1.12. Sección característica	20
1.13. Teoría de la cantidad de movimiento para vuelo de avance	21
1.14. Adimensionalización de las ecuaciones	21
1.15. Teoría del elemento de pala en vuelo de avance	22
1.16. Modelos de velocidad inducida	24
1.17. Rotores coaxiales	25
1.18. Rotores en configuración tándem	27
1.19. Equilibrio de momentos y rotor de cola	28
2. Actuaciones del helicóptero	
2.1. Método de la energía	30
2.2. Actuaciones en vuelo axial	32
2.3. Actuaciones en vuelo de avance horizontal	33
2.4. Velocidades características	35
2.5. Actuaciones en vuelo de avance inclinado	37
2.6. Efecto suelo	39
2.7. Actuaciones en vuelo de autorrotación axial	40
2.8. Actuaciones en vuelo de autorrotación en avance	42
2.9. Actuaciones en despegue	43
2.10. Actuaciones en aterrizaje	47

3. Dinámica de palas	
3.1. Tipos de rotor principal	48
3.2. Ángulo de batimiento en vuelo axial.....	48
3.3. Ángulo de batimiento en vuelo de avance.....	49
3.4. Influencia del batimiento en la sustentación	52
3.5. Planos de referencia.....	53
3.6. Articulación de batimiento descentrada.....	54
3.7. Coeficientes del momento aerodinámico	55
3.8. Batimiento en rotores semirrígidos	55
3.9. Acoplamiento entre el batimiento y el paso.....	56
3.10. Ángulo de arrastre en vuelo axial.....	57
3.11. Ángulo de arrastre en vuelo de avance.....	58
3.12. Resonancia en tierra.....	58
3.13. Acoplamiento entre arrastre y batimiento	59
3.14. Vibraciones de palas flexibles	60
3.15. Método de los modos asumidos	62
4. Vibraciones del helicóptero	
4.1. Introducción	65
4.2. Fuerzas resultantes sobre el buje	65
4.3. Atenuación de vibraciones – Introducción.....	67
4.4. Atenuación de vibraciones – Sistemas pasivos.....	67
4.5. Atenuación de vibraciones – Sistemas absorbentes de vibraciones.....	70
5. Estabilidad y control	
5.1. Planteamiento general.....	73
5.2. Equilibrado del helicóptero	75
5.3. Estabilidad estática.....	75
5.4. Estabilidad dinámica	79
5.5. Estabilidad dinámica longitudinal	80
5.6. Estabilidad dinámica lateral	82
5.7. Control del helicóptero	83

1. Aerodinámica del helicóptero

1.1. Teoría de la cantidad de movimiento para vuelo axial

La teoría de la cantidad de movimiento supone una buena aproximación inicial al comportamiento aerodinámico del rotor, aunque más adelante se verá que necesita ser mejorada. Las hipótesis a partir de las que se aplica esta teoría son:

1. En vuelo axial, el movimiento es unidimensional.
2. El movimiento es casi estacionario, se pueden despreciar las variables temporales.
3. Fluido incompresible.
4. Fluido no viscoso.
5. La estela del rotor no tiene movimiento de rotación, únicamente vertical.
6. La velocidad inducida es uniforme en todo el plano del rotor.
7. Sobre el fluido no se aplica ninguna fuerza externa.
8. Las ecuaciones se plantean en ejes ligados al rotor.

Para aplicar estas ecuaciones se toma como volumen de control el de la figura 1.1. El volumen de control empieza en el infinito aguas arriba, y se extiende en la dirección z positiva, hacia abajo. El fluido se acelera a medida que se acerca al disco rotor.

A la salida del rotor el fluido tiene una velocidad igual a la suma de la velocidad de entrada V_V , que es la velocidad de vuelo vertical, y la velocidad inducida por el rotor v_i . A la salida del volumen de control, la velocidad es $V_V + v_{i2}$, donde v_{i2} considera el aumento de la velocidad inducida en el rotor a la salida del volumen de control.

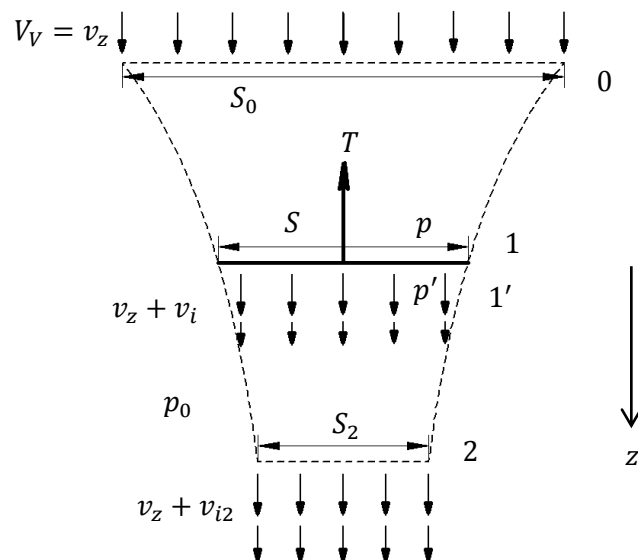


Figura 1.1. Volumen de control.

Los ejes en los que plantearán las ecuaciones son x_i , y_i y z_i , ligados al rotor. La velocidad del helicóptero en estos ejes es v_x , v_y , v_z y en ejes globales es V_H , V_L , V_V . Para vuelo axial $v_z = V_V$, pero para otros modos de vuelo debe considerarse la inclinación del rotor y de la trayectoria.

Las ecuaciones que se considerarán se desarrollan a continuación. La primera es la ecuación de conservación de la masa.

$$\oint \rho \bar{v} d\bar{S} = 0 \Rightarrow \dot{m} = \rho S(v_z + v_i)$$

La segunda es la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.

$$\bar{F} = -\bar{T} = \oint p d\bar{S} + \oint \rho \bar{v}(\bar{v} \cdot d\bar{S})$$

El primer término del miembro de la derecha es nulo, pues se considera la misma presión en toda la superficie de control, de modo que particularizando para este caso

$$T = \rho S_2(v_z + v_{i2})^2 - \rho S_0 v_z^2 = \dot{m}(v_z + v_{i2}) - \dot{m}v_z = \dot{m}v_{i2}$$

La tercera ecuación es la de conservación de la energía. La potencia que el motor aplica al rotor se está consumiendo en incrementar la energía del aire que pasa por el rotor.

$$E = \oint \frac{1}{2} \rho (\bar{v} d\bar{S}) |\bar{v}|^2$$

Se considera la potencia ideal P_{id} como la potencia que se está aplicando sobre el rotor, y es igual a la diferencia de energías cinéticas a la entrada y salida del volumen de control.

$$P_{id} = \frac{1}{2} \rho S_2 (v_z + v_{i2})^3 - \frac{1}{2} \rho S_0 v_z^3 = \frac{1}{2} \dot{m} [(v_z + v_{i2})^3 - v_z^3]$$

Otra forma de ver la ecuación de la energía es considerando que la potencia ideal es la fuerza obtenida por la velocidad a la que se mueve el aire a través del rotor.

$$P_{id} = T(v_z + v_i) = \dot{m}v_{i2}(v_z + v_i)$$

Igualando con la ecuación de la energía cinética se puede “eliminar” una de las variables del problema.

$$v_{i2} = 2v_i$$

1.2. Salto de presiones en el rotor

La presión de entrada y de salida en el rotor se considera como

$$\left. \begin{aligned} p_0 + \frac{1}{2} \rho v_z^2 &= p + \frac{1}{2} \rho (v_z + v_i)^2 \\ p' + \frac{1}{2} \rho (v_z + v_i)^2 &= p_0 + \frac{1}{2} \rho (v_z + 2v_i)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow p' - p = 2\rho v_i (v_z + v_i) = \frac{T}{S}$$

Éste último parámetro se llama carga discal. Resumiendo, las ecuaciones que quedan son

$$\begin{aligned} T &= 2\rho S (v_z + v_i) v_i & P_{id} &= 2\rho S (v_z + v_i)^2 v_i \\ p' - p &= 2\rho v_i (v_z + v_i) = \frac{T}{S} & \dot{m} &= \rho S (v_z + v_i) \end{aligned}$$

1.3. Estados de operación del rotor

El flujo a través del rotor y en sus inmediaciones se comporta de forma diferente según la velocidad vertical del helicóptero. En algunos casos no es posible aplicar la teoría de la cantidad de movimiento y es necesario recurrir a soluciones experimentales. Se distinguen principalmente cuatro estados de operación del rotor.

- Operación normal

En vuelo ascensional y hasta el límite de vuelo a punto fijo ($v_z \geq 0$) el flujo en el rotor es altamente periódico. Los vórtices de punta de pala están libres de perturbaciones, y siguen trayectorias helicoidales suaves y bien definidas.

- Anillos turbillonarios

Para velocidades de descenso bajas, del orden de $-v_i < v_z < 0$ los vórtices de punta de pala se desplazan hacia el plano del rotor y hacia el exterior de las palas, generando una situación no estacionaria y aperiódica, donde se acumulan los vórtices formando una serie de anillos.

No es posible distinguir una superficie que defina la estela, lo que impide aplicar la teoría de la cantidad de movimiento. Además en estas condiciones aumentan las vibraciones y se dificulta el pilotaje.

- Estela turbulenta

Para velocidades de descenso medias, del orden de $-2v_i < v_z < -v_i$ la estela se vuelve aún más turbulenta, y el flujo es similar al de un cuerpo no aerodinámico. Tampoco se puede identificar la estela, de forma que tampoco se puede aplicar en este caso la teoría de la cantidad de movimiento.

- Molinete frenante

Si la velocidad de descenso es elevada ($v_z < -2v_i$) la estela vuelve a estar definida, y la teoría de la cantidad de movimiento se puede volver a aplicar. En esta situación el rotor extrae energía del flujo.

La figura 1.2 esquematiza el flujo para los cuatro modos de operación

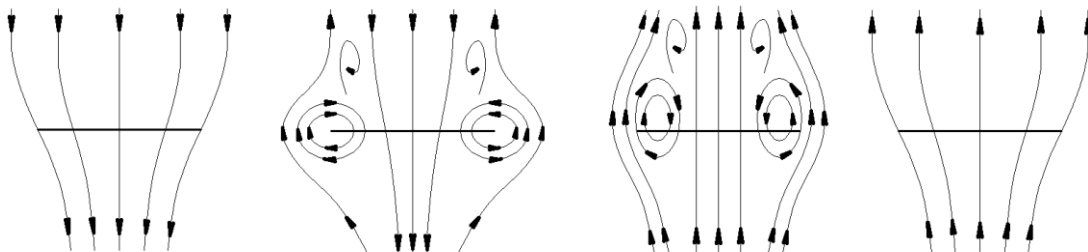


Figura 1.2. De izquierda a derecha los cuatro estados de operación del rotor. Operación normal, anillos turbillonarios, estela turbulenta y molinete frenante.

1.4. Vuelo a punto fijo

El vuelo a punto fijo o *hovering* es un caso particular del vuelo axial en el que $v_z = 0$. Entonces, para vuelo a punto fijo las ecuaciones del empuje y de la potencia ideal quedan

$$T_0 = 2\rho S v_{i0}^2 \quad P_{id0} = 2\rho S v_{i0}^3$$

El subíndice 0 hace referencia a que se trata de vuelo a punto fijo. Combinando ambas ecuaciones se puede obtener

$$v_{i0} = \sqrt{\frac{T}{2\rho S}} \Rightarrow \frac{P_{id0}}{T} = \sqrt{\frac{T}{2\rho S}}$$

El parámetro T/P_{id} se llama carga de potencia.

1.5. Adimensionalización de las ecuaciones

Para los problemas se suponen dos casos. El problema se adimensionaliza con las condiciones de vuelo a punto fijo. En el primer caso se conocerá el empuje para el vuelo vertical, que será igual al peso. Las variables con una barra son variables adimensionalizadas para el problema de tracción conocida.

$$1 = \frac{T}{T} = \frac{2\rho S(v_z + v_i)v_i}{2\rho S v_{i0}^2} = \frac{v_z + v_i}{v_{i0}} \cdot \frac{v_i}{v_{i0}} \Rightarrow (\bar{v}_z + \bar{v}_i)\bar{v}_i = 1$$

$$\frac{P_{id}}{P_{id0}} = \frac{2\rho S(v_z + v_i)^2 v_i}{2\rho S v_{i0}^3} \Rightarrow \bar{P}_{id} = (\bar{v}_z + \bar{v}_i)^2 \bar{v}_i \Rightarrow \bar{P}_{id} = \frac{1}{\bar{v}_i}$$

La solución para este caso es

$$\bar{v}_i = \frac{1}{2}(\sqrt{4 + \bar{v}_z^2} - \bar{v}_z) \quad \bar{P}_{id} = \frac{1}{2}(\sqrt{4 + \bar{v}_z^2} + \bar{v}_z)$$

En el caso de potencia conocida se obtendrá una aceleración que invalidará la teoría de conservación de la cantidad de movimiento en instantes posteriores a la aplicación de la potencia. Las variables con sombrero son variables adimensionalizadas para el problema de potencia conocida.

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2\rho S(v_z + v_i)v_i}{2\rho S v_{i0}^2} \Rightarrow \hat{T} = (\hat{v}_z + \hat{v}_i)\hat{v}_i \quad \frac{P_{id}}{P_{id0}} = \frac{2\rho S(v_z + v_i)^2 v_i}{2\rho S v_{i0}^3} \Rightarrow 1 = (\hat{v}_z + \hat{v}_i)^2 \hat{v}_i$$

Y la solución, que no es trivial, es

$$\hat{T} = \frac{2}{\sqrt{3}} \hat{v}_z^{1/2} \sinh \xi \quad \xi = \frac{1}{3} \operatorname{asinh} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\hat{v}_z^{3/2}} \right)$$

1.6. Coeficientes adimensionales

Se consideran los coeficientes de tracción c_T , de momento c_{Qid} y de potencia ideal c_{Pid} como

$$c_T = \frac{T}{T_u} \quad c_{Qid} = \frac{Q_{id}}{Q_{idu}} \quad c_{Pid} = \frac{P_{id}}{P_{idu}}$$

Donde u hace referencia a "unitario"

$$T_u = \rho S (\Omega R)^2 \quad Q_{idu} = \rho S (\Omega R)^2 R \quad P_{idu} = \rho S (\Omega R)^3$$

Donde Ω es la velocidad angular y R es el radio del rotor. Los coeficientes de momento y potencia ideal son idénticos, pues

$$c_{Qid} = \frac{Q_{id}}{\rho S (\Omega R)^2 R} = \frac{Q_{id} \Omega}{\rho S (\Omega R)^3} = \frac{P_{id}}{\rho S (\Omega R)^3} = c_{Pid}$$

Y el coeficiente de tracción puede desarrollarse como

$$c_T = \frac{T}{\rho S (\Omega R)^2} = \frac{2 \rho S v_i (v_z + v_i)}{\rho S (\Omega R)^2} = 2 \frac{v_i}{\Omega R} \frac{v_z + v_i}{\Omega R}$$

A partir de aquí se definirán los coeficientes de velocidad normal λ , velocidad inducida λ_i y velocidad vertical λ_z como

$$\lambda = \frac{v_z + v_i}{\Omega R} \quad \lambda_i = \frac{v_i}{\Omega R} \quad \lambda_z = \frac{v_z}{\Omega R}$$

Entonces el coeficiente de tracción puede escribirse en función de estos coeficientes

$$c_T = 2 \lambda_i \lambda$$

Y el coeficiente de potencia se puede escribir en función de éste

$$c_{Pid} = \frac{T (v_z + v_i)}{\rho S (\Omega R)^3} = \frac{T}{\rho S (\Omega R)^2} \frac{v_z + v_i}{\Omega R} = c_T \lambda$$

Las soluciones para el caso de tracción conocida se pueden expresar mediante estos coeficientes. Ahora se tiene c_T conocida y de valor

$$c_T = \frac{W}{\rho S (\Omega R)^2}$$

Y la solución queda

$$c_{Pid} = \frac{c_T}{2} \left(\sqrt{2c_T + \lambda_z^2} + \lambda_z \right) \quad \lambda_i = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2c_T + \lambda_z^2} - \lambda_z \right)$$

1.7. Potencia ideal y potencia real

Si se supone un caso de tracción nula $T = 0$ (y por tanto conocida) la teoría de la cantidad de movimiento predice que la potencia ideal también es nula $P_{id} = 0$. Sin embargo esto no es así en la realidad, porque siempre hay un nivel de resistencia parásita que hay que vencer antes de proporcionar tracción, producida por efectos viscosos. La potencia real del rotor es

$$P_r = P_{id} + P_0$$

Donde P_0 es la potencia parásita. Si se considera la potencia ideal como $P_{id} = T(v_i + v_z)$ se puede separar una parte de potencia asociada a ascender Tv_z y otra destinada a vencer la velocidad inducida Tv_i . Entonces la potencia del rotor es

$$P_r = P_i + P_z + P_0$$

Donde P_i es la potencia inducida. Pero ocurre que la teoría de la cantidad de movimiento predice valores de potencia menores que los reales a medida que aumenta la tracción, debido a las hipótesis que se han hecho respecto a la velocidad inducida, la estela del rotor, etc. Por eso la potencia inducida incluye una pequeña corrección con respecto a la potencia ideal

$$P_i = k \cdot Tv_i \quad P_z = Tv_z$$

Donde k es el coeficiente de corrección de potencia inducida $k > 1$, aproximadamente $k \approx 1,15$. También puede aproximarse a partir del coeficiente de pérdida en punta de pala B

$$k \approx \frac{1}{B}$$

Se define la figura de mérito FM como la relación entre la potencia ideal y la real en vuelo a punto fijo ($v_z = 0$), es decir

$$FM = \frac{P_{ido}}{P_{i0} + P_0}$$

1.8. Vuelo axial descendente

La teoría de cantidad de movimiento sólo será válida en vuelo descendente mientras se cumpla que $|v_z| > 2v_i$. Matemáticamente se puede entender porque, de no cumplirse esta condición, entraría aire en el volumen de control detallado en la figura 1.1 por la superficie inferior, sin embargo en el rotor la velocidad del aire se invertiría y no saldría por la superficie superior. En la realidad se forma una turbulencia que no se puede resolver por teoría de cantidad de movimiento.

El desarrollo de la ecuación de conservación de la masa para este caso es el siguiente

$$\oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{m} = \int_{S_2} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_0} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad \Rightarrow$$

$$\dot{m} = \rho(-|v_z| + v_{i2})\vec{k} \cdot S_2(-\vec{k}) = -\rho|v_z|\vec{k} \cdot S_0\vec{k}$$

$$\dot{m} = \rho S_0 |v_z| = -\rho S_2 (-|v_z| + v_{i2})$$

Donde \vec{k} es el vector unitario que apunta en la dirección z. Para la conservación de la cantidad de movimiento se tendrá

$$\begin{aligned}\bar{F} = -\bar{T} &= \oint \rho \bar{v} \cdot d\bar{S} \cdot \bar{v} + \underbrace{\oint p d\bar{S}}_{=0} \\ \bar{F} = -\bar{T} &= \underbrace{\rho S_2(-\vec{k})(-|v_z| + v_{i2})\vec{k}}_{\dot{m}} (-|v_z| + v_{i2})\vec{k} + \underbrace{\rho S_0\vec{k}|v_z|(-\vec{k})}_{\dot{m}} |v_z|(-\vec{k}) \\ &= \dot{m}(-|v_z| + v_{i2})\vec{k} + \dot{m}|v_z|\vec{k} \\ \bar{T} &= -\dot{m}v_{i2}\vec{k} \quad T = \dot{m}v_{i2}\end{aligned}$$

Finalmente la ecuación de conservación de la energía queda, si se considera que la potencia del motor se emplea en aumentar la energía cinética del fluido

$$\begin{aligned}P_{id} &= \int \frac{1}{2} \rho (\bar{v} \cdot d\bar{S}) |v|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \rho S_2(-\vec{k})(-|v_z| + v_{i2})(\vec{k})(-|v_z| + v_{i2})^2 + \frac{1}{2} \rho S_0(\vec{k})(-|v_z|)(\vec{k})|v_z|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\dot{m}(-|v_z| + v_{i2})^2 - \frac{1}{2} \dot{m}|v_z|^2}_{|v_z|^2 > -|v_z| + v_{i2}} = \frac{1}{2} \dot{m}v_{i2}(2v_z + v_{i2})\end{aligned}$$

La potencia ideal en este caso es negativa, se trata del caso del molinete frenante, el rotor debe "robar" energía al fluido. Para encontrar la velocidad inducida en el plano de salida hay que buscar una ecuación alternativa para la potencia

$$P_{id} = T(-|v_z| + v_i)$$

Combinada con el resultado anterior, se obtiene

$$v_{i2} = 2v_i$$

En resumen, las ecuaciones que quedan son

$$\begin{aligned}T &= -2\rho S v_i(v_z + v_i) & P_{id} &= -2\rho S v_i(v_z + v_i)^2 \\ v_{i2} &= 2v_i & \dot{m} &= -\rho S(v_z + v_i)\end{aligned}$$

Considerando ahora que T es conocida, y adimensionalizando

$$\begin{aligned}\bar{v}_i(\bar{v}_z + \bar{v}_i) &= -1 \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_i = -\frac{1}{2}(\sqrt{\bar{v}_z^2 - 4} + \bar{v}_z) \\ \bar{P}_{id} &= v_z + v_i \quad \Rightarrow \quad \bar{P}_{id} = \frac{1}{2}(\bar{v}_z - \sqrt{\bar{v}_z^2 - 4})\end{aligned}$$

Se distinguen entonces el caso en que $v_z < 2v_i$ y el de $v_z > 2v_i$. Como ya se indicó al comienzo de este apartado, en el primero la solución no tiene sentido. La expresión experimental de la velocidad inducida adimensional \bar{v}_i para este caso es

$$\bar{v}_i = k + k_1\bar{v}_z + k_2\bar{v}_z^2 + k_3\bar{v}_z^3 + k_4\bar{v}_z^4 \quad (|\bar{v}_z| < 2)$$

Con los parámetros

$$\begin{aligned} k_1 &= -1,125 & k_3 &= -1,718 & k &\approx 1,15 \\ k_2 &= -1,372 & k_4 &= -0,655 \end{aligned}$$

A partir de la velocidad inducida ya se puede obtener la potencia ideal como

$$\bar{P}_{id} = \bar{v}_i + \bar{v}_z \quad P_{id} = T(v_i + v_z)$$

Esto se puede aplicar excepto en la condición de vuelo de autorrotación. En este tipo de vuelo el helicóptero es capaz de generar tracción al descender a una cierta velocidad única. Esto es muy importante porque permite salvar situaciones de emergencia dejando caer el helicóptero a una velocidad determinada, sin aceleración. En este modo de vuelo la tracción es igual al peso, pero la potencia ideal es 0 y por lo tanto

$$P_{id} = 0 \Rightarrow \bar{v}_z = -\bar{v}_i$$

Lo habitual en este tipo de problema es definir la velocidad vertical para la cual se consigue este modo de vuelo. Una aproximación experimental para vuelo axial en descenso es

$$\bar{v}_i = \begin{cases} k - \frac{3}{4}\bar{v}_z & -\frac{8k}{4k+1} \leq \bar{v}_z \leq 0 \\ k(7 + 3\bar{v}_z) & -2 \leq \bar{v}_z < -\frac{8k}{4k+1} \end{cases}$$

Para la autorrotación, $\bar{v}_i = -\bar{v}_z$ y entonces

$$\bar{v}_z = -\frac{7k}{1+3k}$$

Para el caso ideal $k = 1$, $\bar{v}_z = -1,75$ y para un caso más realista $k = 1,15$ entonces $\bar{v}_z = -1,8$. En la realidad los valores de \bar{v}_z oscilan entre $-1,85 \leq \bar{v}_z \leq -1,9$. Esto es porque solo se han corregido algunas de las hipótesis realizadas durante este desarrollo, pero no otras como la ausencia de resistencia viscosa.

1.9. Teoría del elemento de pala para vuelo axial

Es habitual utilizar la teoría del elemento de pala como complemento de la teoría de cantidad de movimiento. Se asumen las siguientes hipótesis para el desarrollo de la teoría:

1. Comportamiento bidimensional de cada elemento de pala
2. La velocidad inducida, que es perpendicular al plano del rotor, se considerará como una modificación del ángulo de ataque del rotor.
3. El término de velocidad radial U_R es despreciable. (Esto no es del todo cierto en vuelo axial, y menos aún en vuelo horizontal. Esta velocidad genera resistencia.)
4. $|U_N| \ll |U_T| \Rightarrow U \approx U_T \Rightarrow \phi = \text{atan}(U_N/U_T) \approx U_N/U_T \ll 1$, $\cos \phi \approx 1$, $\sin \phi \approx \phi$.
5. $L \gg D$.
6. En régimen de trabajo $c_l = c_{l\alpha} \cdot \alpha$ y $c_d = c_{d0} + c_{d1} \cdot \alpha + c_{d2} \cdot \alpha^2$

Las componentes de la velocidad que ve un elemento de pala son

- U : Velocidad total $U = \sqrt{U_N^2 + U_T^2 + U_R^2}$
- U_N : Velocidad normal.
- U_T : Velocidad tangencial.
- U_R : Velocidad radial

En una sección de la pala la velocidad tangencial y la velocidad normal valdrán

$$U_T = \Omega r \quad U_N = v_z + v_i(r)$$

Nótese que la velocidad inducida en el rotor es una función del radio al cual se encuentra la sección considerada.

Los ángulos que intervienen en el problema son

- θ : Ángulo de torsión (paso), que puede ser función del radio (torsión geométrica).
- ϕ : Ángulo de ataque inducido $\phi = \text{atan}(U_N/U_T)$.
- α : Ángulo de ataque de la sección $\alpha = \theta - \phi$.

Cuando a un perfil se le somete a una corriente incidente con un cierto ángulo aparecen las fuerzas de sustentación y resistencia.

$$dL = \frac{1}{2} \rho U^2 c \cdot c_l dr \quad dD = \frac{1}{2} \rho U^2 c \cdot c_d dr$$

La velocidad total U , la cuerda c y los coeficientes de sustentación y resistencia c_l y c_d dependen del radio al que se encuentra la sección r . Para el caso del rotor es más práctico proyectarlas en el eje vertical y el horizontal (tracción y fuerza tangencial)

$$\begin{cases} dT = dL \cdot \cos \phi - dD \cdot \sin \phi \\ dF_T = dL \cdot \sin \phi + dD \cdot \cos \phi \end{cases}$$

Aplicando las hipótesis 4, 5 y 6

$$\begin{cases} dT \approx dL - dD \cdot \phi \approx dL \\ dF_T \approx dL \cdot \phi + dD \end{cases}$$

Entonces

$$dT = \frac{1}{2} \rho U_T^2 c \cdot c_l dr = \frac{1}{2} \rho (\Omega r)^2 c \cdot c_{l\alpha} \cdot \alpha dr = \frac{1}{2} \rho (\Omega r)^2 c \cdot c_{l\alpha} (\theta - \phi) dr$$

Y se puede considerar que

$$\phi = \text{atan} \frac{U_N}{U_T} \approx \frac{U_N}{U_T} = \frac{v_z + v_i}{\Omega r} = \frac{v_z + v_i R}{\Omega R} \frac{R}{r} = \frac{\lambda R}{r} = \frac{\lambda}{x}$$

Donde $x = r/R$ representa la posición de la sección de la pala de forma adimensional.

Para la fuerza tangencial se tiene que $dF_T = dL \cdot \phi + dD$. Esta fuerza producirá un par que habrá que vencer para hacer girar el rotor.

La potencia necesaria para vencerlo será

$$dP = dF_T \cdot \Omega r = dL \cdot \phi \Omega r + dD \cdot \Omega r$$

El primer término se considera como la potencia inducida dP_i (que en vuelo ascendente siempre es positiva, en vuelo descendente dependerá) y el segundo como la potencia parásita dP_0 (siempre positiva). Sustituyendo

$$\begin{cases} dP_i = \frac{1}{2} \rho (\Omega r)^3 c_{l\alpha} (\theta - \phi) \phi c dr \\ dP_0 = \frac{1}{2} \rho (\Omega r)^3 c \cdot c_d dr \end{cases}$$

Para obtener los valores totales del rotor habrá que integrar para todo el radio y número de palas b . Al ser vuelo axial se trata de un problema axilimétrico, por lo tanto bastará con multiplicar por b .

$$T = \int_1^b \int_0^R dT = b \int_0^R dT$$

Se considera ahora el coeficiente de tracción c_T como

$$dc_T = \frac{dT}{T_u} = \frac{b \cdot c(x)}{\pi R} c_{l\alpha} \left(\theta - \frac{\lambda}{x} \right) x^2 dx$$

Donde T_u es la tracción unitaria definida como

$$T_u = \rho S (\Omega r)^2$$

Y se definen también la solidez local $\sigma(x)$ y la solidez global σ como

$$\sigma(x) = \frac{b \cdot c(x)}{\pi R} \quad \sigma = \int_0^1 \sigma(x) dx$$

Si la cuerda c es constante cabe destacar la relación

$$bcR = \sigma \pi R^2 = \sigma S$$

Idénticamente a la tracción se procede entonces con la potencia inducida y la parásita

$$P_i = b \int_0^R dP_i ; \quad dc_{P_i} = \lambda \cdot dc_T \quad P_0 = b \int_0^R dP_0 ; \quad dc_{P_0} = \frac{1}{2} \sigma(x) c_d(x) x^3 dx$$

Para $\lambda = \text{cte}$, $\sigma = \text{cte}$ y $\theta = \theta_0 + \theta_1 x$ la solución que se obtiene integrando es

$$c_T = \frac{1}{2} \sigma c_{l\alpha} \left(\frac{\theta_0}{3} + \frac{\theta_1}{4} - \frac{\lambda}{2} \right) \quad c_{P_i} = \lambda \cdot c_T$$

$$c_{P_0} = \frac{\sigma c_{d0}}{8} \left(1 + \frac{c_{d1}}{c_{d0}} \left(\theta_0 + \frac{4}{5} \theta_1 - \frac{4}{3} \lambda \right) + \frac{c_{d2}}{c_{d0}} \left(\theta_0^2 + 2\lambda^2 + \frac{2}{3} \theta_1^2 + \frac{8}{5} \theta_0 \theta_1 - \frac{8}{3} \theta_0 \lambda - 2\theta_1 \lambda \right) \right)$$

1.10. Teoría combinada para vuelo axial

Las ecuaciones de la teoría de cantidad de movimiento son

$$\begin{cases} \dot{m} = \rho S(v_z + v_i) \\ T = 2\rho S v_i (v_z + v_i) \\ P_{id} = 2\rho S v_i (v_z + v_i)^2 \end{cases}$$

Y las de la teoría del elemento de pala son

$$\begin{cases} dc_T = \frac{1}{2} \sigma(x) c_l(x) x^2 dx \\ dc_P = \phi(x) x dc_T + \frac{1}{2} \sigma(x) c_d(x) x^3 dx \end{cases}$$

Considerando pequeños volúmenes de control de anillos diferenciales de radio r que en conjunto cubren todo el rotor de radio R , la teoría de cantidad de movimiento queda

$$\begin{cases} d\dot{m} = 2\pi r \rho (v_z + v_i) dr \\ dT = 4\pi r \rho v_i (v_z + v_i) dr \\ dP_{id} = 4\pi r \rho v_i (v_z + v_i)^2 dr \end{cases}$$

En este caso las velocidades inducidas pueden ser función de la posición del elemento diferencial considerado, es decir $v_i = v_i(r)$. Para combinar ambas teorías, la tracción obtenida en cada una de ellas debe ser igual a la de la otra

$$\begin{aligned} dT_{TCM} &= dT_{TEP} \\ 4\pi r \rho v_i (v_z + v_i) dr &= \frac{1}{2} \sigma c_{l\alpha} \left(\theta - \frac{\lambda}{x} \right) x^2 (\rho S (\Omega R)^2) dx \end{aligned}$$

De forma adimensional

$$4\lambda \lambda_i x dx = \frac{1}{2} \sigma c_{l\alpha} \left(\theta - \frac{\lambda}{x} \right) x^2 dx$$

Por lo tanto

$$4\lambda(\lambda - \lambda_z) = \frac{1}{2} \sigma c_{l\alpha} \left(\theta - \frac{\lambda}{x} \right) x$$

Donde $\lambda_i = \lambda - \lambda_z$, $v_i = v_i(r)$, $\lambda = \lambda(x)$, $\sigma = \sigma(x)$, $c_{l\alpha} = c_{l\alpha}(x)$ y $\theta = \theta(x)$. Esta ecuación de segundo grado se resuelve para λ

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{\sigma c_{l\alpha}}{16} - \frac{\lambda_z}{2} \right)^2 + \frac{\sigma c_{l\alpha}}{8} \theta x} - \left(\frac{\sigma c_{l\alpha}}{16} - \frac{\lambda_z}{2} \right)$$

Si el problema cumple que $v_i = \text{cte}$ y no se necesita obtener la distribución en el rotor de ningún parámetro se puede aplicar la teoría de cantidad de movimiento. Si no, se resuelve mediante esta ecuación y con esta solución, mediante la teoría del elemento de pala, se obtiene $\lambda_i = \lambda - \lambda_z$, ϕ , α , c_l , dc_T y dc_P .

La torsión θ es el ángulo de la cuerda de la pala con la horizontal. Se puede escribir

$$\theta(x) = \theta_0 + \theta_1(x)$$

El paso que el piloto aplica a la pala está incluido en θ_0 y la torsión geométrica de la pala está incluida en $\theta_1(x)$. El paso se varía para obtener una variación en la tracción, ya sea de magnitud o de dirección.

La teoría combinada tampoco predice que en la punta del ala no puede haber sustentación ni tracción. Esto es porque los perfiles no tienen información de que la pala es finita. Para ello se aplica la corrección de Prandtl de pérdida en punta de pala (*Prandtl Tip Loss Correction*). Se interpreta como un aumento de la velocidad inducida en la punta de la pala, lo que aumenta la potencia necesaria y disminuye la tracción obtenida, y este efecto está representado por el factor de pérdida en punta de pala B . Este factor será constante para todo el rotor, y es un promedio que corrige la pérdida de tracción de forma global, en todo el rotor y no sólo en la punta. Una aproximación que permite calcular B si no se dispone de su valor es

$$B = 1 - \frac{1,386}{b} \frac{\lambda_i}{\sqrt{1 + \lambda_i^2}} \approx 1 - \frac{1,386}{b} \lambda_i \approx 1 - \frac{\sqrt{c_T}}{b}$$

Donde se ha considerado $\lambda_i \ll 1$, $\lambda_i \approx \lambda_{i0} = \sqrt{c_T/2}$ y $1,386 \approx \sqrt{2}$. Otra aproximación diferente es

$$B = 1 - \frac{c_0(1 + 0,7\tau_r)}{1,5R}$$

Donde $\tau_r = c_t/c_0$. Una vez se dispone de este factor, se corrige λ_i como $\lambda_i/B = \lambda_i^B$. Nótese que $B < 1$ y $\lambda_i^B > \lambda_i$. Esta corrección sólo afecta a la potencia inducida, no a la parásita.

1.11. Rotores de velocidad inducida uniforme

Aunque no se demostrará aquí, los rotores cuya geometría permiten mantener la velocidad inducida uniforme necesitan la mínima potencia inducida para generar una tracción determinada. En vuelo axial, la tracción es

$$dT = 4\pi\rho r v_i(r)(v_z + v_i(r)) dr = \frac{1}{2}\rho b(\Omega r)^2 c_l(r)c(r) dr$$

Para que la velocidad inducida sea uniforme ($v_i(r) = v_i$) entonces se debe de cumplir que

$$v_i(v_z + v_i) = \frac{1}{2} \frac{\rho(\Omega r)^2 c_l(r)c(r)}{4\pi\rho} \Rightarrow$$

$$r \cdot c_l(r) \cdot c(r) = \text{cte}$$

O en forma adimensional

$$x \cdot c_l(x) \cdot \sigma(x) = \text{cte} = x \cdot c_{l\alpha} \cdot \alpha \cdot \sigma(x)$$

Es decir, hay que encontrar una distribución de cuerdas para que se cumpla esta propiedad. Existen dos casos sencillos, el rotor de torsión ideal y el rotor óptimo. El primero es un rotor que cumple que

$$\sigma \cdot c_{l\alpha} = \text{cte} \Rightarrow \alpha = \frac{\text{cte}}{x}$$

Por lo tanto si consideramos que en la punta de pala el ángulo de ataque vale $\alpha(x = 1) = \alpha_t$ entonces $\alpha(x) = \alpha_t/x$ y del mismo modo

$$\theta(x) = \alpha - \phi = \frac{\alpha_t}{x} + \frac{\lambda}{x} = \frac{\alpha_t + \lambda_t}{x} = \frac{\theta_t}{x}$$

Donde se ha considerado $\lambda = \text{cte}$ puesto que la velocidad inducida es constante. Entonces se tiene que la torsión debe ser una función hiperbólica. Aunque la torsión debería ser infinita en la raíz de la pala, en posiciones cercanas al eje los mecanismos de ajuste de la pala impiden que la pala se acerque al eje. Aun así, la torsión en la parte de la pala más cercana al eje sería demasiado alta, y supondría la entrada en pérdida en modos de vuelo diferentes del vuelo axial.

Para otras aplicaciones como aerogeneradores o hélices donde el flujo acostumbra a ser axial sí se puede aplicar, pero para helicópteros se acostumbran a tomar distribuciones de torsión lineales que se aproximan mejor a la distribución hiperbólica cerca de la punta de pala, donde más efectivo resulta.

El coeficiente de tracción queda

$$dc_T = \frac{1}{2} \sigma c_{l\alpha} \alpha x^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\sigma c_{l\alpha} \alpha_t}{\text{cte}} x dx$$

Integrando esta expresión

$$c_T = \int_0^1 \frac{1}{2} \sigma c_{l\alpha} \alpha_t x dx = \frac{1}{4} \sigma c_{l\alpha} \alpha_t$$

Y para los coeficientes de potencia inducida y parásita

$$dc_{pi} = \phi(x) x dc_T = c_{pi} = \lambda_t c_T$$

$$dc_{p0} = \frac{1}{2} \sigma c_d x^2 dx = \frac{1}{2} \sigma \left(c_{d0} + c_{d1} \frac{\alpha_t}{x} + c_{d2} \left(\frac{\alpha_t}{x} \right)^2 \right) x^2 dx$$

Integrando la segunda expresión

$$c_{p0} = \int_0^1 dc_{p0} = \frac{1}{8} \sigma \left(c_{d0} + \frac{4}{3} c_{d1} \alpha_t + 2c_{d2} \alpha_t^2 \right)$$

La λ_t se obtiene a partir de la teoría de la cantidad de movimiento como

$$\lambda_t = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2c_T + \lambda_z^2} - \lambda_z \right)$$

El caso del rotor óptimo, además de conseguir la potencia inducida mínima, hace que todos los perfiles de la pala trabajen a su ángulo de ataque óptimo. Si los perfiles de la pala son todos iguales, el ángulo de ataque será uniforme. Por lo tanto

$$c_l(x) = c_{l\alpha} \cdot \alpha \Rightarrow \begin{cases} \alpha(x) = \alpha_{opt} \\ c_l(x) = c_{l\alpha} \end{cases}$$

Por lo tanto $\sigma \cdot x = \text{cte}$ y entonces

$$\sigma = \frac{\sigma_t}{x} \quad \theta(x) = \alpha(x) + \frac{\lambda(x)}{x} = \alpha_{opt} + \frac{\lambda_t}{x}$$

La distribución vuelve a ser hiperbólica, y de nuevo se aproxima de forma lineal, como en el caso anterior. Para este problema se tiene α_{opt} dato, y λ_t y σ_t a determinar. Como en el caso anterior, λ_t se obtiene a partir de la teoría de cantidad de movimiento, y para σ_t se trabaja con el coeficiente de tracción

$$dc_T = \frac{1}{2} \sigma c_{l\alpha} \alpha \cdot x^2 dx = \frac{1}{2} \sigma_t c_{l\alpha} \alpha \cdot x dx \Rightarrow c_T = \frac{1}{4} \sigma_t c_{l\alpha} \alpha_{opt}$$

Y finalmente los coeficientes de potencia quedan

$$dc_{Pi} = \lambda dc_T \Rightarrow c_{Pi} = \lambda_t c_T \quad dc_{P0} = \frac{1}{2} \sigma c_d x^3 dx = \frac{1}{2} \sigma_t c_d x^2 dx \Rightarrow c_{P0} = \frac{1}{6} \sigma_t c_d$$

1.12. Sección característica

Se trata de realizar un rotor cuya geometría mantenga el coeficiente de tracción equivalente igual al original de uno de los dos tipos de rotores anteriores (rotor de torsión ideal o rotor óptimo), o que el coeficiente de potencia parásita equivalente sea igual al original. Nunca podrán mantenerse los dos.

Supóngase un rotor cuyo coeficiente de tracción debe ser equivalente a uno de torsión ideal, pero para el cual se quiere un ángulo de ataque $\alpha(x) = \alpha_{eq}$ uniforme. Entonces para el rotor original de torsión ideal

$$c_T = \frac{1}{4} \sigma c_{l\alpha} \alpha_t$$

Para el equivalente

$$dc_T = \frac{1}{2} \sigma c_{l\alpha} x^2 dx \Rightarrow c_T = \frac{1}{6} \sigma c_{l\alpha} \alpha_{eq}$$

Para que ambos coincidan

$$\alpha_{eq} = \frac{3}{2} \alpha_t$$

La sección característica del rotor original será aquella que tenga $\alpha(x) = 3\alpha_t/2$.

1.13. Teoría de la cantidad de movimiento para vuelo de avance

Igual que se hizo en el caso de vuelo axial, en vuelo de avance es posible aplicar la teoría de la cantidad de movimiento para establecer la relación básica entre la potencia ideal necesaria para producir una determinada tracción a través de la velocidad inducida por el rotor.

Se realizan las mismas hipótesis que en el caso de vuelo axial, excepto el hecho de que el flujo ahora pasa a ser bidimensional. De nuevo se utiliza un sistema de ejes ligado al rotor. Aunque en una situación real sería necesario que el rotor se inclinase respecto a la horizontal para vencer a las fuerzas de arrastre, lo que generaría una velocidad vertical v_z en el rotor, esto no es necesario en la teoría de la cantidad de movimiento.

Una vez más se aplican las ecuaciones de conservación. La ecuación de la masa es

$$\dot{m} = \rho S |v_1| = \rho S \sqrt{v_x^2 + (v_z + v_i)^2}$$

Donde v_1 es el módulo de la velocidad en la sección perpendicular al eje del volumen de control en la posición del rotor. Definir v_1 de esta manera permite reducir el problema de vuelo de avance al caso de vuelo axial.

La ecuación de la cantidad de movimiento queda

$$T = \dot{m}(v_z + v_{i2}) - \dot{m}v_z = \dot{m}v_{i2}$$

Y para la energía

$$P_{id} = \frac{1}{2} \dot{m}(v_z + v_{i2})^2 - \frac{1}{2} \dot{m}v_z^2$$

Pero la potencia aplicada también se puede obtener como

$$P_{id} = T(v_z + v_i)$$

De modo que, como en el caso de vuelo axial, puede obtenerse que $v_{i2} = 2v_i$. Por lo tanto las expresiones finales para la tracción y la potencia quedan

$$T = 2\dot{m}v_i = 2\rho S v_i \sqrt{v_x^2 + (v_z + v_i)^2}$$

$$P_{id} = 2\dot{m}v_i(v_i + v_z) = 2\rho S v_i(v_z + v_i) \sqrt{v_x^2 + (v_z + v_i)^2}$$

1.14. Adimensionalización de las ecuaciones

Adimensionalizando las ecuaciones anteriores, particularizadas para el caso de tracción conocida, con las variables de vuelo a punto fijo como ya se hizo en el caso de vuelo axial, se obtiene

$$\bar{v}_i \sqrt{\bar{v}_x^2 + (\bar{v}_z + \bar{v}_i)^2} = 1 \quad \bar{P}_{id} = \bar{v}_i(\bar{v}_z + \bar{v}_i) \sqrt{\bar{v}_x^2 + (\bar{v}_z + \bar{v}_i)^2} \Rightarrow \bar{P}_{id} = \bar{v}_z + \bar{v}_i$$

La expresión anterior permite determinar la velocidad inducida en vuelo de avance, pero es una ecuación de cuarto grado y habitualmente se recurre a métodos numéricos para su resolución. A modo de inciso, considerando el caso irreal en que $v_z = 0$, es decir, el helicóptero avanza con el rotor en un plano horizontal, la solución analítica obtenida es

$$\bar{P}_{id} = \bar{v}_i = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\bar{v}_x^2 + 4} - \bar{v}_x \right)}$$

Cabe destacar que, por un lado, si se hace $v_x = 0$ se recuperan las expresiones para vuelo axial, y que, por otro lado, esta teoría implica que el rotor ideal se comporta del mismo modo para vuelo de avance y para vuelo de retroceso, algo que es completamente irreal.

Manipulando las expresiones anteriores se puede llegar a una ecuación que permite obtener de forma implícita la potencia necesaria para una determinada condición de vuelo

$$(\bar{P}_{id} - \bar{v}_z)(\bar{v}_x^2 + \bar{P}_{id}^2) = 1$$

La expresión de la potencia obtenida anteriormente puede reescribirse en función de los coeficientes de velocidad como

$$\bar{P}_{id} = \bar{v}_z + \bar{v}_i = \frac{\lambda}{\lambda_{i0}}$$

Esta expresión puede desarrollarse aún más

$$\bar{P}_{id} = \frac{\mu}{\lambda_{i0}} \tan \alpha_r + \frac{\lambda_{i0}}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}$$

Donde $\mu = v_x/\Omega R$ es el coeficiente de velocidad horizontal, λ_{i0} es el coeficiente de velocidad inducida en vuelo a punto fijo, y α_r es el ángulo de ataque del rotor. El primer término de esta ecuación corresponde a la potencia que se ha de aplicar al rotor para propulsar y hacer ascender al helicóptero, el segundo es la potencia inducida.

El ángulo de ataque del rotor puede determinarse a partir del equilibrio de fuerzas

$$\sum F_H = T \sin(\alpha_r - \gamma_h) - D \cos \gamma_h = 0 \quad \sum F_V = T \cos(\alpha_r - \gamma_h) - W - D \sin \gamma_h = 0$$

Donde γ_h es el ángulo de ascenso, entonces considerando ángulos pequeños y $D \ll T$

$$\alpha_r = \gamma_h + \frac{D}{W}$$

1.15. Teoría del elemento de pala en vuelo de avance

Respecto al caso de vuelo axial, la teoría del elemento de pala tiene dificultades añadidas. La aerodinámica ya no es estacionaria, cada pala del rotor ve una velocidad diferente, es decir, las variables ya no dependen sólo de la posición radial, sino también de la posición azimutal. Tampoco será sencillo combinarla con la teoría de la cantidad de movimiento para encontrar la velocidad inducida, por lo que en general se utiliza un modelo de velocidad inducida.

El desarrollo de las ecuaciones es como sigue

$$\begin{cases} v_{\text{plano}} = v \cos \alpha_r \\ v_{\text{normal}} = v \sin \alpha_r \end{cases} \quad \begin{cases} U_T = v \cos \alpha_r \sin \psi + \Omega R \\ U_N = v \sin \alpha_r + v_i \\ U_R = v \cos \alpha_r \cos \psi \end{cases}$$

El efecto de U_R no será considerado en este estudio.

$$\lambda = \frac{v \sin \alpha_r + v_i}{\Omega R} = \frac{v_z + v_i}{\Omega R} \quad \frac{U_T}{\Omega R} = \frac{\Omega r + v \cos \alpha_r \sin \psi}{\Omega R} = \frac{\Omega r + v_x \sin \psi}{\Omega R} = x + \mu \sin \psi$$

$$U = \sqrt{U_T^2 + U_N^2}$$

$$\phi = \text{atan} \frac{U_N}{U_T} = \text{atan} \frac{\lambda}{x + \mu \sin \psi} \quad \theta = \theta(x, \psi) \quad \alpha = \theta - \phi = \alpha(x, \psi)$$

A partir de aquí se toma la hipótesis de que $|U_T| \gg |U_N|$. Las dos consecuencias de esto son

$$\frac{U}{\Omega R} \approx \frac{U_T}{\Omega R} = x + \mu \sin \psi \quad \phi \approx \frac{U_N}{U_T} = \frac{\lambda}{x + \mu \sin \psi}$$

Para el cálculo de la sustentación

$$dL(r, \psi) = \frac{1}{2} \rho \cdot U_T^2(r, \psi) \cdot c(r) \cdot c_l(r, \psi) dr$$

Se considera que la sustentación varía linealmente con el ángulo de ataque $c_l = c_{l\alpha} \alpha$ y por lo tanto

$$dL(r, \psi) = \frac{1}{2} \rho \cdot U_T^2(r, \psi) \cdot c(r) \cdot c_{l\alpha}(r, \psi) \cdot (\theta(r, \psi) - \phi(r, \psi)) dr$$

Para la resistencia se asume el modelo de curva polar parabólica

$$dD = \frac{1}{2} \rho U_T^2 c(c_{d0} + c_{d1} \alpha + c_{d2} \alpha^2) dr$$

Respecto a las fuerzas que interesan para el vuelo del helicóptero

$$\begin{cases} dT = dL \cos \phi - dD \sin \phi \approx dL \\ dF_T = dL \sin \phi + dD \cos \phi \approx dL \cdot \phi + dD \end{cases}$$

Y para el momento y la potencia, recordando que $U_T \cdot \phi = U_N$

$$\begin{cases} dQ = r dF_T(r, \psi) \\ dP = U_T(r, \psi) \cdot dF_T(r, \psi) = dL \cdot U_N + dD \cdot U_T = dP_i + dP_0 \end{cases}$$

Para obtener los valores totales hay que integrar

$$T = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{b}{2\pi} dT d\psi \quad P = P_i + P_0 \quad \begin{cases} P_i = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{b}{2\pi} dP_i d\psi \\ P_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{b}{2\pi} dP_0 d\psi \end{cases}$$

Donde b es el número de palas. Si se tomase por ejemplo una simplificación con $c_{l\alpha}$, θ , λ y c constantes entonces la solución sería

$$T = \frac{b}{2} \rho (\Omega R)^2 c R c_{l\alpha} \left[\frac{\theta}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \mu^2 \right) - \frac{\lambda^B}{2} \right]$$

$$P_i = \frac{b}{2} \rho (\Omega R)^3 c R c_{l\alpha} \left[\frac{\theta}{3} \lambda^B - \frac{1}{2} \lambda^B + \frac{1}{2} \lambda^B \theta \mu^2 \right]$$

$$P_0 = \frac{b}{8} \rho (\Omega R)^3 c R c_{d0} [1 + K_\mu \mu^2] \quad K_\mu \approx 5$$

Sin embargo, como $\lambda = \lambda_z + \lambda_i$ habrá que imponer λ_i para poder resolverlo, porque mediante la teoría de la cantidad de movimiento no será posible, como se indicó al introducir este tema. Habrá que aplicar los mismos factores de corrección B que ya se vieron anteriormente. Además en esta potencia parásita se ha tomado únicamente c_{d0} y, por no considerar U_R , el valor obtenido es inferior al real. Al considerar U_R también se retrasa la entrada en pérdida. Es debido a la corrección de este efecto que se toma $K_\mu \approx 5$, pues sin esta corrección debería ser $K_\mu \approx 3$.

Las fuerzas en el plano horizontal se determinan como

$$dH = dF_T \cdot \sin \psi \quad dY = dF_T \cdot \cos \psi$$

Son fuerzas dependientes de r y de ψ . Integrando para la longitud de la pala y el giro completo, y multiplicando por el número de palas se obtiene

$$H = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{b \cdot dH}{2\pi} \cdot d\psi \quad Y = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{b \cdot dY}{2\pi} \cdot d\psi$$

En el caso de que todos los coeficientes sean constantes las fuerzas resultantes son

$$H = H_i + H_0 = \frac{b}{2} \rho (\Omega R)^2 c R \frac{\mu}{2} (c_{l\alpha} \cdot \theta \lambda^B + c_{d0}) \quad Y = 0$$

1.16. Modelos de velocidad inducida

Como ya se ha indicado, no resulta sencillo combinar la teoría del elemento de pala en vuelo de avance con la teoría de la cantidad de movimiento para encontrar la velocidad inducida, por lo que en general se utiliza un modelo de velocidad inducida.

El más sencillo consiste en suponer $v_i = \text{cte}$ y se trataba con la teoría de la cantidad de movimiento.

Ligeramente más complejo es el modelo de velocidad inducida lineal en x y en y , para velocidades de avance con $\mu > 0,15$, que consiste en expresar la velocidad inducida como

$$\lambda_i = \lambda_0 (1 + k_x x \cos \psi + k_y y \sin \psi)$$

1.17. Rotores coaxiales

Algunas ventajas del rotor coaxial son que toda la potencia se aplica para obtener tracción y además se permite el diseño de rotores más compactos. A cambio, los inconvenientes son que, al trabajar el rotor inferior bajo la estela del superior aumentará la potencia inducida, además de que el sistema de acoplamiento de las palas al eje (buje) es mucho más complejo y generará más resistencia. Por lo general el control de estos helicópteros es más complejo.

Aplicando la teoría de la cantidad de movimiento y considerando que la distancia que separa a ambos rotores $h \ll R$, en vuelo a punto fijo

$$v_i = \sqrt{\frac{T_T}{2\rho S}}$$

Se considerará que ambos rotores generan la misma tracción, es decir

$$T_T = T_U + T_L = 2T$$

Entonces la velocidad inducida y la potencia inducida quedan

$$v_i = \sqrt{\frac{2T}{2\rho S}} \quad P_i = T_T \cdot v_i = \frac{(2T)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\rho S}}$$

Para un rotor aislado la velocidad inducida es

$$v_i = \sqrt{\frac{T}{2\rho S}}$$

Y la potencia inducida para dos rotores aislados es

$$2 \cdot P_i = \frac{2T^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\rho S}}$$

Se define entonces el factor de interferencia k_{INT} , que relaciona la potencia consumida por los rotores coaxiales comparada con la consumida por ambos rotores por separado

$$k_{INT} = \frac{P_{i\ COAX}}{P_{i\ 2\times AIS}} = \sqrt{2} \approx 1,41$$

Mediante este análisis se obtiene que la potencia inducida para los rotores coaxiales sería un 41% mayor que para los dos rotores aislados. Sin embargo, si se considera que en el centro del rotor inferior la velocidad del aire viene dada por $2v_i$, debido al chorro procedente del rotor superior, es como si el centro del rotor inferior trabajase en vuelo ascendente, y la potencia inducida en vuelo ascendente es menor que en vuelo a punto fijo.

Ahora se considerarán otras hipótesis. El rotor inferior se verá influenciado por la velocidad que induce el superior, pero el rotor superior se comportará aisladamente.

Para el rotor superior las ecuaciones de la teoría de la cantidad de movimiento son

$$\begin{cases} \dot{m}_u = \rho S v_u \\ T_u = 2\dot{m}_u v_u = 2\rho S v_u^2 \\ P_{iu} = T_u \cdot v_u = 2\rho S v_u^3 \end{cases}$$

Para el rotor inferior

$$\begin{cases} \dot{m}_l = \rho \frac{S}{2} (v_l + 2v_u) + \rho \frac{S}{2} v_l = \rho S (v_u + v_l) \\ T_l = \dot{m}_l w_l - T_u = \rho S (v_u - v_l) w_l - 2\rho S v_u^2 \\ P_{il} = T_l \cdot (v_u + v_l) = \frac{1}{2} \rho S (v_u + v_l) w_l^2 - 2\rho S v_u^3 \end{cases}$$

Ahora es necesario suponer o $T_u = T_l$ ó bien $P_u = P_l$. Suponiendo que las potencias de ambos rotores son iguales $P_u = P_l = P$, se obtiene una ecuación de tercer grado en v_l/v_u con una única solución real

$$2\left(\frac{v_l}{v_u}\right)^3 + 5\left(\frac{v_l}{v_u}\right)^2 + 2\left(\frac{v_l}{v_u}\right) - 2 = 0 \Rightarrow \frac{v_l}{v_u} = 0,4376 \quad w_l = \frac{2v_u^2(2v_u + v_l)}{(v_l + v_u)^2}$$

Las potencias que consumirían los rotores si estuviesen aislados serían

$$(P_u)_{AIS} = T_u \cdot v_u = 2\rho S v_u^3 = T_u \cdot \sqrt{\frac{T_u}{2\rho S}} \quad (P_l)_{AIS} = T_l \cdot (v_l)_{AIS} = T_l \cdot \sqrt{\frac{T_l}{2\rho S}}$$

Las tracciones se pueden calcular mediante las expresiones

$$T_u = 2\rho S v_u^2 \quad T_l = \frac{2\rho S v_u^3}{v_u + v_l}$$

Entonces el factor de interferencia de potencia inducida es (con la solución de v_l/v_u)

$$k_{INT} = \frac{P_u + P_l}{(P_u)_{AIS} + (P_l)_{AIS}} = \frac{2P_u}{T_u \cdot \sqrt{\frac{T_u}{2\rho S}} + T_l \cdot \sqrt{\frac{T_l}{2\rho S}}} = 1,266$$

Esta es la relación entre lo que consumen los rotores conjuntamente frente a lo que consumirían por separado. Realizando el mismo proceso para tracciones iguales se obtiene $k_{INT} = 1,281$. En la realidad estos factores son menores, del orden de $k_{INT} \approx 1,16$.

La potencia de los rotores en coaxial es

$$P_{COAX} = k \cdot k_{INT} \cdot \frac{2T^{3/2}}{\sqrt{2\rho S}} + \rho S (\Omega R)^3 \frac{\sigma c_{d0}}{8} \cdot 2$$

La potencia parásita es el doble de la de un solo rotor por separado. Puede considerarse como si el rotor coaxial tuviese una solidez doble. La potencia inducida también es el doble, pero además se aplican los factores de corrección y de interferencia.

1.18. Rotores en configuración tándem

Se definen los parámetros m' , que es la fracción de superficie del rotor inferior afectada por el rotor superior (aerodinámicamente), y m como la fracción de área solapada (geoméricamente) $m = S_{OV}/S$. Si $h \ll R$ entonces $m' = m$. Este es el caso que se considera a continuación

$$m = \frac{2}{\pi \left(\theta - \frac{d}{D} \sin \theta \right)} ; \quad \theta = \arccos \frac{d}{D}$$

$$P_1 = (1 - m')T_1 \cdot \sqrt{\frac{(1 - m')T_1}{2\rho S(1 - m')}} = \frac{(1 - m')T_1^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\rho S}}$$

$$P_2 = \frac{(1 - m')T_2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\rho S}} \quad P_{OV} = \frac{m'(T_1 + T_2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\rho S}} \quad P_{i\ 2 \times AIS} = \frac{T_1^{3/2} + T_2^{3/2}}{\sqrt{2\rho S}}$$

$$k_{ov} = \frac{P_{i\ TAND}}{P_{i\ 2 \times AIS}} = \frac{(1 - m')T_1^{3/2} + (1 - m')T_2^{3/2} + m'(T_1 + T_2)^{3/2}}{T_1^{3/2} + T_2^{3/2}}$$

Como ambas tracciones serán iguales

$$k_{OV} = 1 + (\sqrt{2} - 1)m'$$

Considerando ahora el caso $h \approx R$ entonces $m' = m'(m)$

Para el rotor superior

$$T_u = 2\rho S v_u^2 \quad (1) \quad \dot{m}_u = 2\rho S v_u m' + 2\rho S v_u (1 - m') \quad (3)$$

Para el inferior

$$T_l = (\dot{m}w)_l - (\dot{m}w)_u \quad (2) \quad \dot{m}_l = (1 - m')\rho S v_l + m'(v_l + 2v_u)\rho S \quad (4)$$

El desarrollo para estas cuatro ecuaciones es el siguiente

$$(1) + (2) \Rightarrow v_u^2(4m' + 2) = w_l(v_l + 2m'v_u) \quad (5)$$

$$P_l = T((1 - m')v_l + m'(2v_u + v_l)) = \frac{1}{2}\rho S(v_l + 2m'v_u)v_l^2 - 4\rho m' S v_u^3 \quad (6)$$

$$(1) + (6) \Rightarrow 2v_u^2(v_l + 2m'v_u) = \frac{1}{2}(v_l + 2m'v_u)w_l^2 - 4m'v_u^3 \quad (7)$$

$$(5) + (7) \Rightarrow w_l = \frac{8m'v_u + 2v_l}{2m' + 1} \quad (8)$$

$$(5) + (8) \Rightarrow \left(\frac{16m'^2}{2m' + 1} - 4m' - 2 \right) v_u^2 + \left(\frac{12m'}{2m' + 1} \right) v_u v_l + \left(\frac{2}{2m' + 1} \right) v_l^2 = 0$$

Esta última es una ecuación de segundo grado en términos de v_l/v_u . Se puede escribir la solución como

$$v_l = G(m')v_u$$

Donde $G(m')$ es la función solución de la ecuación (9). El factor de potencia inducida debido al solapamiento K_{OV} se define de forma similar al factor de interferencia K_{INT}

$$K_{OV} = \frac{P_{i\ TAND}}{P_{i\ 2\times AIS}}$$

Las potencias del tándem y de ambos rotores por separado son

$$P_{i\ TAND} = P_{iu} + P_{il} = T(G(m') + 1 + 2m')v_u \quad P_{i\ 2\times AIS} = 2T \cdot v_u$$

Finalmente

$$K_{OV} = \frac{G(m') + 1 + 2m'}{2}$$

1.19. Equilibrio de momentos y rotor de cola

El rotor de cola es el encargado de contrarrestar el momento provocado por el giro del rotor principal, además de proporcionar estabilidad y control direccional. Los helicópteros con rotores coaxiales o en configuración tándem no requieren de ningún dispositivo que contrarreste este momento porque cada rotor gira en una dirección diferente.

Existen tres conceptos de dispositivos que contrarrestan el momento del rotor principal.

- Rotor de cola convencional

Opera en un entorno aerodinámico complejo, influido por el rotor principal y las superficies estabilizadoras. El estabilizador vertical ayuda a disminuir la fuerza lateral necesaria, pero aumenta la potencia parásita del fuselaje. Inclinando un poco el rotor de cola, éste puede colaborar también con la tracción global.

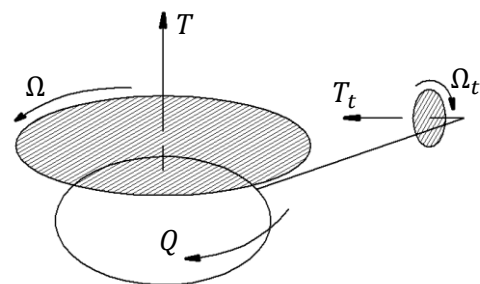


Figura 1.3. Equilibrio de momentos.

Existen dos tipos de rotor de cola convencional

- ♣ Rotores de tracción o *tractors*: El estabilizador vertical induce un efecto suelo en el rotor, pero el flujo sobre el estabilizador provoca una fuerza en dirección contraria a la deseada.
- ♣ Rotores de empuje o *pushers*: Debido al estabilizador vertical el fluido que llega al rotor no es uniforme, lo que hace aumentar la potencia inducida y aumenta las vibraciones.

Por lo general los rotores tipo *pusher* son más eficaces.

- Rotor de hélice guiada o Fenestron

Las principales ventajas del Fenestron son:

- ◆ Requiere una menor potencia para generar una determinada tracción, o lo que es lo mismo, permite utilizar rotores más pequeños.
- ◆ Menor efecto de la estela del rotor principal.
- ◆ Disminuye el riesgo de rotura o daños.
- ◆ Disminuye la pérdida en punta de pala del rotor de cola.
- ◆ El estabilizador vertical proporciona parte de la fuerza lateral en vuelo de avance.

Y sus desventajas son:

- ◆ Problemas de separación de flujo a la entrada del rotor.
- ◆ Frecuencias de sonido más altas y molestas (mayor número de palas).
- ◆ El tamaño del estabilizador vertical aumenta la potencia parásita del fuselaje.



Figura 1.4. Helicóptero de los U.S. Coast Guard con Fenestron.

- NOTAR® (NO TAIL Rotor)

El sistema NOTAR® consiste en generar una fuerza lateral a lo largo del cono de cola mediante control por circulación (efecto Coanda). La fuerza depende de la velocidad de salida del fluido por las ranuras distribuidas a lo largo del cono de cola. El flujo sobrante se expulsa por la tobera de cola y proporciona una fuerza adicional.

Desaparece por completo el riesgo de rotura o daños personales y el ruido disminuye en gran medida, pero tiene la desventaja de perder eficacia en vuelo de avance.

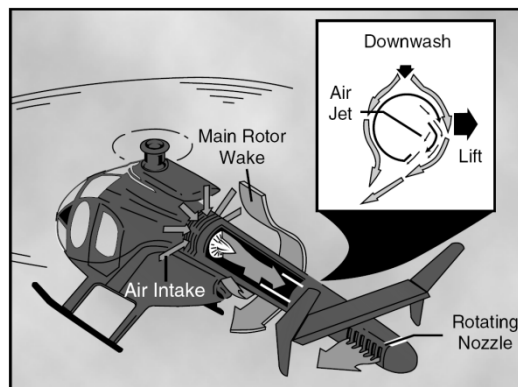


Figura 1.5. Sistema NOTAR®.

2. Actuaciones del helicóptero

2.1. Método de la energía

Las actuaciones tratan de determinar la potencia necesaria para una determinada condición de vuelo. Además, haciendo un balance entre la potencia necesaria y la disponible se podrá definir una serie de valores como velocidades máximas de vuelo o ascenso, el alcance, la autonomía, el techo, etc.

La potencia necesaria es la potencia que se requiere para realizar un vuelo determinado (condiciones de velocidad) con unas ciertas condiciones externas. La potencia necesaria estará formada por diferentes componentes

- Potencia asociada al rotor principal
 - ◆ Potencia inducida
 - ◆ Potencia parásita
 - ◆ Potencia ascensional (en ejes rotor)
- Potencia asociada al rotor antipar
 - ◆ Potencia inducida
 - ◆ Potencia parásita
 - ◆ Potencia ascensional (en ejes rotor)
- Potencia parásita del helicóptero
- Pérdidas mecánicas

Por otro lado, la potencia disponible depende de la potencia que el fabricante indica que genera el motor (potencia instalada), pero montado en el helicóptero, debido a una serie de defectos, esta potencia disminuirá. Estos efectos son

- Pérdidas en la entrada
 - ◆ Aumento de temperatura
 - ◆ Disminución de presión
- Pérdidas en la salida
 - ◆ Modificación del flujo de salida debido al rotor
- Pérdidas por extracción de aire
 - ◆ Utilización para sistemas auxiliares

Las actuaciones del helicóptero se llevan a cabo en un modelo de atmósfera ISA. Puesto que la variable más interesante es la densidad, bastará con utilizar

$$\rho(h) = \rho_{SL} \left(1 - \frac{6,5 \cdot 10^{-3} \cdot h}{288,15} \right)^{4,252}$$

No se debe confundir la altitud h sobre el nivel del mar con la altura z a la que se encuentra el helicóptero, que será la referencia para el estudio del efecto suelo. La altitud h acostumbra a darse en ft, de modo que es importante recordar que $1 \text{ ft} \approx 0,3048 \text{ m}$.

Puede encontrarse una relación de la potencia disponible con la densidad como

$$\frac{P_{disp}(h)}{P_{disp SL}} = \left(\frac{\rho(h)}{\rho_{SL}} \right)^m \quad m < 1$$

El valor de m dependerá del helicóptero, pero suele estar cerca de $m \approx 0,85$.

Por lo general el problema es casi estacionario, de modo que la tracción del rotor principal será normalmente igual al peso de la aeronave, y la del rotor antipar contrarrestará el momento del rotor principal.

$$T = W \quad Q = \frac{P_r}{\Omega} = l_t T_t$$

Las potencias de aplicación en el problema de actuaciones serán las siguientes:

- Potencia inducida $P_i = kWv_i$
- Potencia de velocidad vertical $P_V = WV_V$
- Potencia parásita $P_0 = \rho S (\Omega R)^3 \frac{\sigma c_d}{8} (1 + 5\mu^2)$
- Potencia parásita del fuselaje $P_{0f} = \frac{1}{2} \rho f v_1^3$

La velocidad inducida v_i se calcula de forma general como

$$v_i \sqrt{v_x^2 + (v_z + v_i)^2} = v_{i0}^2 \quad v_{i0} = \sqrt{\frac{W}{2\rho S}}$$

Y la velocidad en el plano del rotor v_1 se calcula de forma general como

$$v_1 = \sqrt{v_x^2 + (v_z + v_i)^2}$$

El área de placa plana equivalente f se puede aproximar como $f = c_{Df} \cdot S_{ref}$ y será habitualmente un dato del helicóptero.

Para el rotor de cola la potencia se calcula igual que para el rotor principal, aunque será habitual expresarla como una fracción k_t de la potencia del rotor principal. Las pérdidas mecánicas se expresan como rendimientos del rotor principal y el antipar. La potencia necesaria para el vuelo será entonces

$$P_r = P_i + P_V + P_0 + P_{0f} \quad P_t = P_{it} + P_{0t} \quad P_{nec} = \frac{P_r}{\eta_r} + \frac{P_t}{\eta_t} = \left(\frac{1}{\eta_r} + \frac{k_t}{\eta_t} \right) P_r$$

Por último, es importante diferenciar las velocidades ligadas a los ejes del rotor v_x, v_z, v_i, v_1 con las velocidades del movimiento del helicóptero V, V_H, V_V , que se relacionan entre ellas a través de los ángulos de inclinación del rotor, que habitualmente serán pequeños.

2.2. Actuaciones en vuelo axial

El problema axial tratará en determinar el techo de vuelo y la máxima velocidad ascendente. Para equilibrar la tracción generada por el rotor antipar, el rotor principal deberá tener una pequeña inclinación lateral δ de forma que la componente lateral de la tracción principal se encargue de equilibrarla.

Sumando las fuerzas laterales y las verticales se obtiene

$$\begin{aligned}\sum F_L = 0 &\Rightarrow T_t - T \sin \delta = 0 &\Rightarrow \delta \approx \frac{T_t}{T} \approx \frac{T_t}{W} \\ \sum F_V = 0 &\Rightarrow T \cos \delta - W - D_f = 0 &\Rightarrow T \approx W\end{aligned}$$

La potencia se calculará con las expresiones resumidas en el apartado anterior particularizadas para vuelo axial, es decir, $\mu = 0$ y $v_1 \approx 0$. En el caso de vuelo axial se despreciará el término de potencia parásita del fuselaje.

Si se está tratando un caso de vuelo descendente habrá que recurrir a las expresiones para la velocidad inducida encontradas en el apartado "1.8. Vuelo axial descendente".

- Techo del helicóptero

Se define el techo como la altitud máxima de vuelo a punto fijo. El techo se obtiene para la altura a la que la potencia necesaria es igual a la disponible en vuelo a punto fijo.

$$h = h_{max} \Rightarrow P_{nec} = P_{disp} ; v_z = 0$$

A modo de paréntesis cabe destacar que éste es un punto asintótico, de modo que el helicóptero no puede llegar hasta él. Se define de un modo más práctico el techo en servicio, que es el punto donde la velocidad ascendente no puede superar 0,3 m/s.

Además la potencia necesaria depende de la velocidad de avance, y disminuye a medida que la velocidad aumenta, hasta cierto valor, a partir del cual vuelve a aumentar. De este modo, el techo a una cierta velocidad puede ser mayor que el techo en vuelo a punto fijo. Se define el techo absoluto como el techo a la velocidad de vuelo de mínima potencia necesaria y con el peso mínimo de la aeronave.

- Máxima velocidad de ascenso

La potencia necesaria depende de la velocidad de ascenso v_z . Igualando la potencia necesaria con la disponible se obtiene una relación que permite encontrar la máxima velocidad de ascenso.

$$P_{nec}(v_z) = P_{disp} \Rightarrow v_{z\ max} \approx V_{V\ max}$$

Esto no es sencillo, pues las dependencias con v_z son implícitas. Por este motivo esta ecuación debe resolverse mediante iteración. Un método sencillo para iterar es

$$\frac{P_i(v_z^{(n)}) + Wv_z^{(n+1)} + P_0}{\eta_r} + \frac{P_t(v_z^{(n)})}{\eta_t} = P_{disp}$$

Si se expresa la potencia del rotor antipar como una fracción k_t de la potencia del rotor principal se puede escribir

$$\left(\frac{1}{\eta_r} + \frac{k_t}{\eta_t}\right) \cdot (kWv_i + Wv_z + P_0) = P_{disp}$$

Aun así sería necesario iterar para obtener la solución. Puede iniciarse el cálculo con $v_z^{(0)} = 0$.

Puede entonces realizarse la hipótesis de que $\bar{v}_z \ll 1$. En este caso se puede aproximar la velocidad inducida como

$$\bar{v}_i = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4 + \bar{v}_z^2} - \bar{v}_z \right) \approx 1 - \frac{1}{2} \bar{v}_z \Rightarrow v_i = v_{i0} - \frac{1}{2} v_z$$

Sustituyendo en la ecuación anterior el valor de v_i ya se puede resolver v_z directamente sin iteraciones. Sin embargo será necesario comprobar la hipótesis realizada de $\bar{v}_z \ll 1$. De forma práctica, bastará con que $\bar{v}_z < 1$.

Se puede realizar otra suposición diferente, que es $\bar{v}_z \gg 1$. Ahora se puede aproximar la velocidad inducida como

$$\bar{v}_i = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4 + \bar{v}_z^2} - \bar{v}_z \right) \approx \frac{1}{\bar{v}_z} \Rightarrow v_i = \frac{v_{i0}^2}{v_z}$$

De este modo también se puede resolver analíticamente la ecuación en v_z . De nuevo será necesario comprobar la hipótesis, aunque de forma práctica bastará con tener $v_z > 1$.

Igual que el techo a punto fijo puede aumentar con la velocidad de avance, puesto que disminuye la potencia necesaria, la velocidad de ascenso también aumentará con la velocidad de avance.

2.3. Actuaciones en vuelo de avance horizontal

Considerando la figura 2.1 que esquematiza un caso general de vuelo de avance inclinado, para el vuelo horizontal se toma que el ángulo de ataque del viento $\alpha_W = 0$ (más adelante se conocerá este ángulo por ángulo de subida θ_s o de descenso θ_d) y por lo tanto el ángulo de ataque del rotor respecto al viento α_r es igual al ángulo de ataque respecto a la horizontal $\alpha_r = \alpha_R$.

Se puede descomponer la velocidad V de la corriente incidente en los ejes del rotor

$$v_x = V \cos \alpha_r \quad v_z = V \sin \alpha_r$$

En el rotor además aparece una velocidad inducida v_i , y la velocidad total en el plano del rotor v_1 se definía, como ya se vio en el apartado "1.13. Teoría de la cantidad de movimiento para vuelo de avance"

$$v_1 = \sqrt{v_x^2 + (v_z + v_i)^2}$$

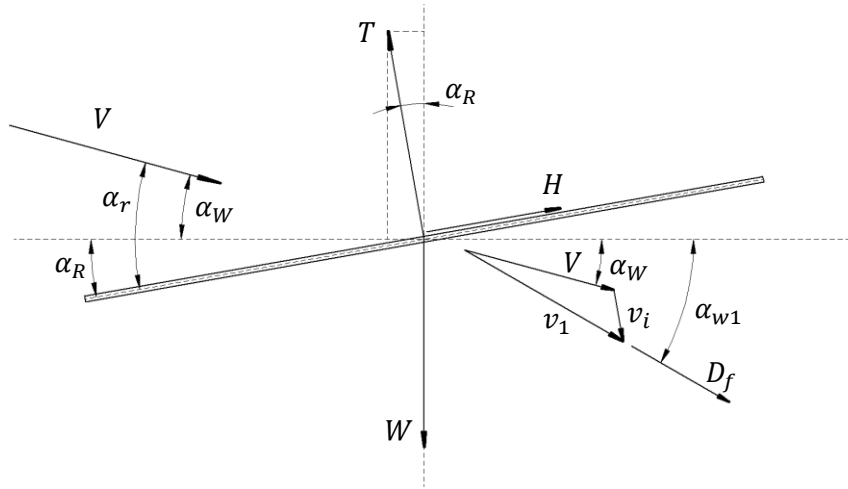


Figura 2.1. Caso general de vuelo de avance inclinado.

El ángulo de esta velocidad respecto a la horizontal es α_{w1} , y la resistencia del fuselaje seguirá esta dirección, y será de valor

$$D_f = \frac{1}{2} \rho f v_1^2$$

Se aplicará ahora el equilibrio de fuerzas para este caso en que $\alpha_r = \alpha_R$. Se toma la hipótesis de ángulos pequeños, es decir $\alpha_r \ll 1$ y $\alpha_{w1} \ll 1$ y se considera también $H \ll D_f$.

$$\begin{aligned} \sum F_H = 0 &\Rightarrow T \alpha_R - H - D_f = 0 &\Rightarrow \alpha_R = \frac{D_f + H}{T} \approx \frac{D_f}{W} \\ \sum F_V = 0 &\Rightarrow T - W - D_f \alpha_{w1} + H \alpha_r = 0 &\Rightarrow T \approx W \end{aligned}$$

La velocidad vertical que ve el rotor es

$$v_z = V \sin(\alpha_R + \alpha_w) = V \alpha_R + V \alpha_w$$

La potencia del rotor era, del apartado "1.7. Potencia ideal y potencia real" $P_r = P_i + P_z + P_0$.

$$P_i = k \cdot W v_i \quad P_z = W v_z = W V \alpha_R + W V \alpha_w$$

El primer término de la potencia ascensional, recordando el resultado obtenido para el ángulo de ataque, se puede considerar como la potencia parásita del fuselaje. Se corrige la potencia parásita al alza mediante v_1 .

$$W V \alpha_R = D_f V \approx D_f v_1 = P_{0f}$$

El segundo término es la potencia de velocidad vertical P_V , y se emplea para aumentar la energía potencial del helicóptero.

$$W V \alpha_w = W V_V = P_V$$

Finalmente la potencia ascensional del rotor es $P_z = P_V + P_{0f}$, y la potencia del rotor principal en vuelo de avance es $P_r = P_i + P_V + P_0 + P_{0f}$. Como en vuelo de avance horizontal $V_V = 0$ entonces $P_V = 0$.

En resumen, estas potencias son

$$P_i = kWv_i \quad P_V = WV_V = WV\alpha_W \quad P_0 = \rho S(\Omega R)^3 \frac{\sigma C_d}{8} (1 + 5\mu^2) \quad P_{of} = \frac{1}{2} \rho f v_1^3$$

Y las velocidades de las que dependen son

$$v_i \sqrt{v_x^2 + (v_z + v_i)^2} = v_{i0}^2 \quad v_1 = \sqrt{v_x^2 + (v_z + v_i)^2}$$

En vuelo de avance horizontal $\alpha_R \approx 0$, y por lo tanto $v_z \approx 0$. Entonces la expresión para la velocidad inducida queda

$$v_i^2 = \frac{-v_x^2 + \sqrt{v_x^4 + 4v_{i0}^4}}{2}$$

En el caso en que $\bar{v}_x \ll 1$ las expresiones se simplifican como

$$v_i \approx v_{i0} + \frac{v_x^2}{4v_{i0}} \quad v_1^3 \approx v_{i0}^3 + \frac{3}{4} v_x^2 v_{i0}$$

En caso contrario, $\bar{v}_x \gg 1$ y entonces las expresiones son

$$v_i \approx \frac{v_{i0}^2}{v_x} \quad v_1 \approx v_x$$

De forma similar a las simplificaciones del apartado “2.2. Actuaciones en vuelo axial”, de forma práctica bastará con que $\bar{v}_x < 1$ o bien $\bar{v}_x > 1$, de modo que casi siempre se podrá emplear alguna de estas dos simplificaciones.

2.4. Velocidades características

Las velocidades características de vuelo horizontal son la máxima velocidad de vuelo, la mínima de vuelo, la de potencia mínima, la de máxima autonomía y la de máximo alcance.

- Velocidades máxima y mínima

La velocidad máxima de vuelo siempre existirá, pero no tiene por qué ser así con la velocidad mínima, pues si el peso es pequeño, y la altitud es suficientemente baja, se podrá volar a punto fijo. Las condiciones para la velocidad máxima y la mínima serán, respectivamente

$$P_{disp} = P_{nec} \quad (\bar{v}_x \gg 1) \quad P_{disp} = P_{nec} \quad (\bar{v}_x \ll 1)$$

La primera condición resulta en una ecuación de cuarto orden a resolver de forma iterativa. La segunda condición es una ecuación de segundo orden de resolución directa.

Se define también el margen de velocidades como la diferencia entre la velocidad máxima y la velocidad mínima

$$\Delta v = v_{max} - v_{min}$$

- Potencia mínima

Para determinar la velocidad de mínima potencia necesaria basta con derivar la expresión de la potencia necesaria respecto a la velocidad e igualar a cero.

$$P_{nec} = P_{nec}(v_x) \quad \frac{dP_{nec}}{dv} = 0 \Rightarrow P = P_{min}$$

Para ello se aplicará la hipótesis de velocidad de vuelo elevada $\bar{v}_x \gg 1$. La expresión que se obtiene es

$$\frac{dP}{dv_x} = 0 \Rightarrow -\frac{W^2}{2\rho S} + 10\rho S(\Omega R) \frac{\sigma c_d}{8} v_x^3 + \frac{3}{2}\rho f v_x^4 = 0$$

De esta expresión se puede obtener la velocidad de mínima potencia.

- Máxima autonomía

La velocidad de máxima autonomía, es decir, la de máximo tiempo de vuelo, puede obtenerse a partir de la expresión para el tiempo de vuelo

$$t = \frac{M_f}{\text{SFC} \cdot P}$$

Donde M_f es la masa de combustible y SFC es el consumo específico de combustible, en kg/Ws, que en principio depende de la potencia y de la densidad, pero conocida la altitud a la que se está volando, y por lo tanto la densidad del aire, se considerará un consumo específico constante.

De la expresión anterior puede deducirse que la autonomía máxima se dará a la mínima potencia, y se ha calculado ya a qué velocidad se consigue esta potencia mínima. Aunque el peso (que aparece en la expresión de la potencia) varía a lo largo del vuelo, se supondrá un peso constante para todo el vuelo, que habitualmente será despreciando el peso de combustible, pero también se puede hacer una media entre la masa inicial y la final.

- Máximo alcance

El alcance máximo se da para el punto de la curva P_{nec} contra v_x que es tangente a una recta que pase por el origen. Esto es porque el alcance vendrá dado por $d = v_x t$, y sustituyendo la expresión para el tiempo de vuelo

$$d = \frac{M_f}{\text{SFC} \cdot \frac{P}{v_x}}$$

De donde se deduce que el valor de P/v_x deberá ser mínimo para obtener el máximo alcance.

$$\frac{dP/v_x}{dv_x} = 0 \Rightarrow -\frac{W^2}{\rho S} + \rho S(\Omega R)^3 \frac{\sigma c_d}{8} \left(\frac{5v_x^3}{(\Omega R)^2} - v_x \right) + \rho f v_x^4 = 0$$

Resolviendo esta ecuación por iteración se obtendrá la velocidad de máximo alcance.

En la figura 2.2 se pueden apreciar las diferentes velocidades características que se acaban de definir, determinadas gráficamente

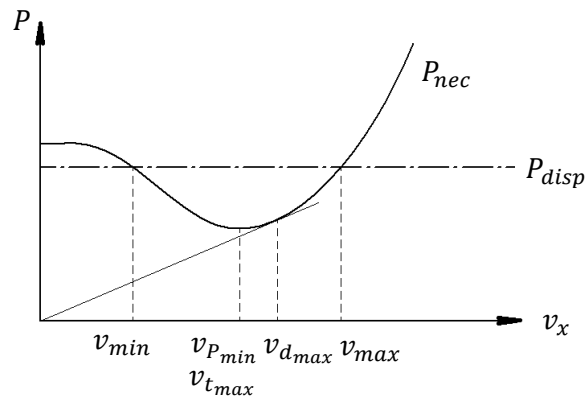


Figura 2.2. Velocidades características en vuelo de avance.

El exceso de potencia es la diferencia entre la potencia disponible y la potencia necesaria.

$$\Delta P = P_{disp} - P_{nec}$$

Varía con el peso W y también con la altitud h tal y como se representa en la figura 2.3.

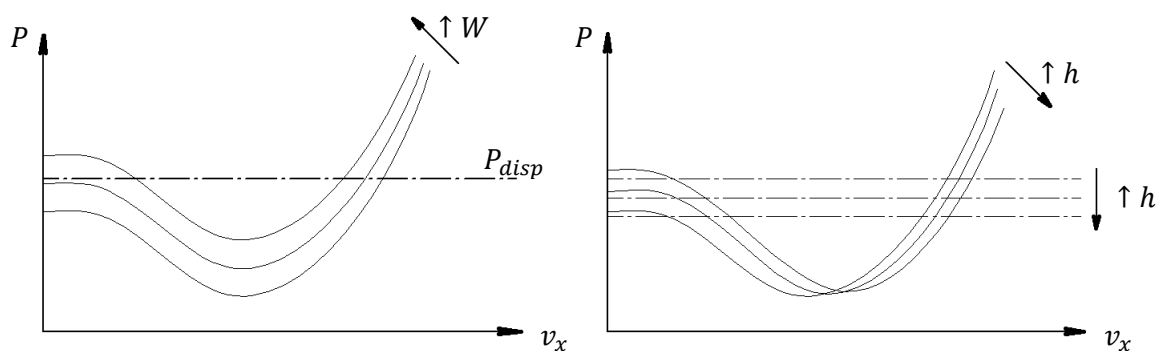


Figura 2.3. Variación del exceso de potencia.

$$\uparrow W \Rightarrow \downarrow v_{max}, \uparrow v_{min}, \downarrow \Delta v, \downarrow \Delta P, \uparrow v_{P_{min}}, \uparrow v_{t_{max}}, \uparrow v_{d_{max}}$$

$$\uparrow h \Rightarrow \downarrow \rho, \uparrow T \Rightarrow \approx v_{max}, \uparrow v_{min}, \downarrow \Delta v, \downarrow \Delta P, \uparrow v_{P_{min}}, \uparrow v_{t_{max}}, \uparrow v_{d_{max}}$$

La potencia disponible disminuye, recordando la expresión

$$\frac{P_{disp}(h)}{P_{disp SL}} = \left(\frac{\rho(h)}{\rho_{SL}} \right)^m \quad m \approx 0,85 ; m < 1$$

2.5. Actuaciones en vuelo de avance inclinado

Las bases para el vuelo inclinado son las mismas que para vuelo horizontal, pero el ángulo de inclinación de la velocidad α_W ya no es cero. Este ángulo se denominará θ_s cuando sea de subida, y θ_d cuando sea de descenso. Se considera inicialmente el caso de ascenso. El ángulo de ataque del rotor será $\alpha_r = \alpha_R + \theta_s$.

La velocidad del helicóptero V se puede descomponer en una componente vertical V_V y una componente horizontal V_H mediante el ángulo θ_s . El equilibrio de fuerzas resulta en

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow T \sin \alpha_R - H \cos \alpha_R - D_f \cos(\theta_s + \alpha_{w1}) \Rightarrow T \alpha_R \approx D_f$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow T \cos \alpha_R + H \sin \alpha_R - D_f \sin(\theta_s + \alpha_{w1}) \Rightarrow T \approx W$$

Donde se ha considerado que $H \ll D_f$ y que los ángulos son pequeños, es decir $\alpha_R \ll 1$, $\theta_s \ll 1$ y $\alpha_{w1} \ll 1$.

Los ángulos del problema se pueden relacionar entonces como

$$\alpha_R = \frac{D_f}{W} \quad \alpha_r = \frac{D_f}{W} + \theta_s$$

La potencia necesaria para este vuelo será

$$P_{nec} = \frac{P_r}{\eta_r} + \frac{P_t}{\eta_t} \quad P_r = P_i + P_0 + P_V + P_{0f}$$

Las velocidades del problema en el rotor principal son

$$\begin{aligned} v_i \sqrt{v_x^2 + (v_z + v_i)^2} &= v_{i0}^2 & v_x &= V \cos \alpha_r = V \cos(\alpha_R + \theta_s) \approx V \\ v_1 &= \sqrt{v_x^2 + (v_z + v_i)^2} & v_z &= V \sin \alpha_r = V \sin(\alpha_R + \theta_s) \approx V \alpha_R + V \theta_s \end{aligned}$$

Y las potencias serán determinadas por las expresiones siguientes

$$\begin{aligned} P_i &= kWv_i & P_0 &= \rho S (\Omega R)^3 \frac{\sigma c_d}{8} (1 + 5\mu^2) \\ P_{0f} &= \frac{1}{2} \rho f v_1^3 & P_V &= WV_V = WV\theta_s \end{aligned}$$

La potencia utilizada para ascender P_V se obtendrá a partir del exceso de potencia ΔP para vuelo de avance horizontal. Será el exceso de potencia lo que permita el ascenso, pues para tener vuelo estacionario, sin aceleración, la tracción seguirá siendo equivalente al peso.

La potencia consumida por el rotor antipar se acostumbra a expresar como una fracción k_t de la potencia consumida por el rotor principal. La potencia disponible se puede escribir entonces como

$$P_{disp} = P_r \left(\frac{1}{\eta_t} + \frac{k_t}{\eta_t} \right)$$

Las potencias inducida y parásita del fuselaje dependen de la velocidad vertical, por lo tanto esta ecuación implícita se resuelve por iteración, despejando la potencia de velocidad vertical

$$WV_V^{(n+1)} = \frac{P_{disp}}{\frac{1}{\eta_r} + \frac{k_t}{\eta_t}} - P_i^{(n)} - P_0 - P_{0f}^{(n)}$$

Si el vuelo es con trayectoria descendente $\alpha_r = \alpha_R - \theta_d$. Si $\alpha_r < 0$ entonces la velocidad perpendicular al rotor v_z es hacia arriba, y la teoría de la cantidad de movimiento deja de ser válida, aunque si se trata de un ángulo pequeño, y aunque conceptualmente sea incorrecto, puede aplicarse la teoría de la cantidad de movimiento, en vuelo ascendente, para determinar la velocidad inducida v_i .

Si por el contrario $\alpha_r > 0$ el problema es muy similar al de vuelo inclinado ascendente y las ecuaciones son exactamente las mismas y se resuelven mediante la misma iteración, salvo porque $V_V < 0$. Ahora se vuela con un defecto de potencia, en lugar de un exceso de potencia, pues se hace que la potencia aplicada sea inferior a la necesaria para mantener las condiciones de vuelo horizontal, de forma que el helicóptero descienda.

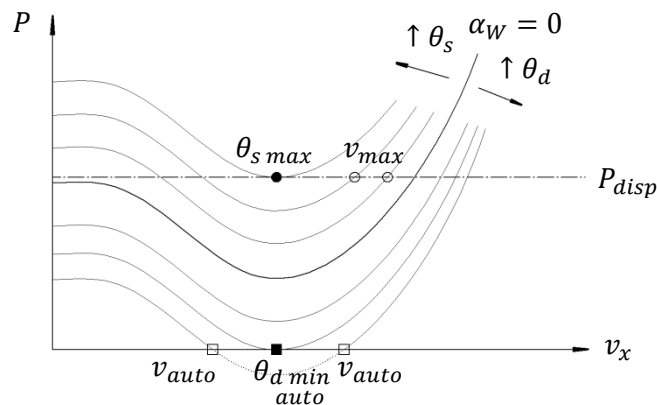


Figura 2.4. Variación de la potencia necesaria con el ángulo de ascenso o descenso.

En la figura 2.4 puede encontrarse un ángulo de descenso mínimo para el cual es posible volar sin aplicar potencia. Éste es el ángulo de descenso mínimo en autorrotación, y a partir de este ángulo se dan dos velocidades de avance que permiten volar en autorrotación.

2.6. Efecto suelo

La modificación del flujo de la estela del rotor, que tiene que extenderse por el suelo en lugar de seguir contrayéndose, modifica las condiciones de vuelo y las actuaciones. En general, para una tracción dada disminuirá la potencia necesaria, y para una potencia dada, la tracción máxima aumentará. Hay muchos modelos para el efecto suelo, aquí se usará un modelo muy básico, el modelo de Cheeseman – Bennett.

Se considerarán variables no afectadas por el efecto suelo, OGE (*Out of Ground Effect*) y las afectadas por el efecto suelo, o IGE (*In of Ground Effect*). Para vuelo axial, considerando la tracción como dato, la potencia inducida en efecto suelo $P_{i\ IGE}$ se relaciona con la potencia fuera de efecto suelo como

$$\frac{P_{i\ IGE}}{P_{i\ OGE}} = k_G \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{i\ IGE}}{v_{i\ OGE}} = k_G$$

Para potencia conocida se tendrá

$$\frac{T_{IGE}}{T_{OGE}} = \frac{1}{k_G}$$

Donde el factor k_G modeliza la reducción de la velocidad inducida y vale

$$k_G = 1 - \left(\frac{R}{4z}\right)^2$$

Donde z es la altura de vuelo respecto al suelo, y no debe confundirse con la altitud h .

Para vuelo de avance el efecto suelo es menor, pues a bajas velocidades aumenta la velocidad inducida en la parte frontal del rotor, debido a que se encuentra con la estela rebotada en el suelo a medida que avanza, hecho que hace aumentar la potencia inducida. Por otro lado, para velocidades elevadas las estela se hace horizontal y el efecto suelo es mínimo. Esto se modelará corrigiendo el factor k_G para velocidades de avance lentas como

$$k_G = 1 - \frac{\left(\frac{R}{4z}\right)^2}{1 + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2}$$

2.7. Actuaciones en vuelo de autorrotación axial

La autorrotación es una configuración de vuelo en que el régimen de giro del rotor es autosostenido. Es la frontera entre los regímenes en que se aplica potencia al rotor y aquellos en que el rotor extrae potencia del fluido.

En estas condiciones el rotor se encuentra en condiciones de estela turbulenta, de modo que no se pueden aplicar teorías de cantidad de movimiento, pero ya se han visto desarrollos empíricos para este modo de vuelo.

La energía potencial que pierde el helicóptero se emplea en hacer girar el rotor de forma que el helicóptero descienda sin aceleración. Por lo general hay zonas del rotor que están generando un par a partir del flujo de aire, y otras zonas del rotor lo absorben.

La velocidad de descenso en autorrotación es aproximadamente $\bar{v}_z \approx -1,9$, que supone una velocidad de $v_z = -35$ m/s. Esta velocidad es muy elevada para impactar con el suelo, pero se verá que en autorrotación en avance puede reducirse hasta casi la mitad.

El ángulo de ataque en la raíz del rotor es muy elevado, el aire entra en el rotor por la superficie inferior, y la fuerza resultante está inclinada en la dirección de giro del rotor. En la punta del rotor el aire entra por la superficie superior, y la fuerza resultante está inclinada en sentido contrario al giro del rotor.

Las secciones de la raíz son las secciones que generan el par, y en la punta se consume ese par. Entonces alguna de las secciones centrales tendrá una fuerza resultante completamente perpendicular a la superficie del rotor. Ésta es la sección que está realmente en condiciones de autorrotación.

Habitualmente esta sección se encuentra a $x = 0,7$, y recibe el nombre de sección característica de autorrotación.

Para que haya autorrotación en una sección la fuerza tangencial en esa sección deberá ser nula.

$$dF_T = \phi dL + dD = 0 \Rightarrow \phi = -\frac{dD}{dL} = -\frac{c_d}{c_l}$$

El ángulo de ataque de la sección característica será $\alpha_{0,7} = \theta_{0,7} - \phi_{0,7}$, donde el subíndice 0,7 hace referencia a la sección característica de autorrotación (aunque esta sección no siempre se encuentre en este punto). Puede escribirse entonces

$$\alpha_{0,7} = \theta_{0,7} + \frac{c_{d\ 0,7}}{c_{l\ 0,7}}$$

Los coeficientes $c_{l\ 0,7}$ y $c_{d\ 0,7}$ son

$$c_{l\ 0,7} = c_{l\alpha} \cdot \alpha_{0,7} \quad c_{d\ 0,7} = c_{d0} + c_{d1}\alpha_{0,7} + c_{d2}\alpha_{0,7}^2$$

Existe un ángulo de paso $\theta_{0,7}$ máximo a partir del cual el rotor nunca puede entrar en autorrotación, pues experimenta una fuerza de deceleración que le hace parar, de forma que el helicóptero cae sin remedio al suelo.

Por debajo de ese máximo la condición de autorrotación será estable, es decir, ante una ráfaga vertical el rotor tiende a evolucionar hacia la situación inicial.

La velocidad de giro en autorrotación es desconocida. No se considerará el rotor antipar, pues si se entra en autorrotación generalmente se debe a la pérdida del rotor antipar o a la pérdida completa de potencia. La potencia del rotor principal en vuelo axial es,

$$P_r = P_i + P_0 + P_V = kWv_i + P_0 + WV_V$$

Se desprecia la potencia parásita del fuselaje, pues se ha considerado vuelo axial. Entonces

$$P_r = 0 \Rightarrow \bar{v}_V = -k\bar{v}_i - \bar{P}_0$$

La teoría de la cantidad de movimiento no se puede aplicar para determinar v_i , y por ello se emplea la expresión lineal $\bar{v}_i = 7 + 3\bar{v}_V$, de modo que

$$\bar{v}_V = -\frac{\bar{P}_0 + 7k}{1 + 3k}$$

Por lo general la potencia parásita es

$$P_0 = \rho S (\Omega R)^3 \frac{\sigma c_{d\ 0,7}}{8}$$

Pero la velocidad angular del rotor Ω y el coeficiente de resistencia de la sección característica de autorrotación $c_{d\ 0,7}$ son desconocidos. Integrando la expresión para dT tomando $c_l = c_{l\ 0,7}$ e igualando la tracción resultante al peso, puede obtenerse

$$W = \int_0^R b dT = \int_0^R \frac{b}{2} \rho c (\Omega r)^2 c_{l\ 0,7} dr \Rightarrow \Omega R = \sqrt{\frac{6W}{\rho S \sigma c_{l\ 0,7} B^3}}$$

Si cerca del suelo se aumenta el paso θ_0 aumentará temporalmente la tracción T lo que permite contactar con el suelo más suavemente, aunque esto frenará al rotor.

2.8. Actuaciones en vuelo de autorrotación en avance

La velocidad de avance hace que se pierda la simetría axial de las zonas que generan potencia y consumen potencia. De nuevo, la teoría de cantidad de movimiento no debería usarse para calcular la velocidad inducida, pues se trata de vuelo de descenso, pero se utilizará igualmente para obtener una estimación.

La ecuación que define la autorrotación es la de potencia nula en el rotor

$$P_r = P_i + P_0 + P_V + P_{0f} = 0$$

La potencia parásita se obtiene de

$$P_0 = \rho S (\Omega R)^3 \frac{\sigma c_{d0,7}}{8} (1 + 5\mu^2) \quad P_{0f} = \frac{1}{2} \rho f v_1^3$$

Aunque la distribución de cuerdas o el coeficiente de resistencia dependiesen de la sección del rotor, se trabaja con la sección de referencia. La velocidad inducida se obtendrá de

$$v_i \sqrt{v_x^2 + (v_z + v_i)^2} = v_{i0}^2$$

Es una buena aproximación considerar $\alpha_r = 0$ de modo que $\alpha_r = -\theta_d$, $v_x \approx V_H$ y $v_z \approx V_V$.

Dado que la tracción será igual al peso, pues se trata de un vuelo no acelerado, se puede obtener la siguiente expresión de forma similar al caso de autorrotación axial.

$$\Omega R = \sqrt{\frac{6W}{\rho S \sigma c_{l0,7}} \cdot \frac{1}{B^3 + \frac{3}{2} B \mu^2}}$$

Para encontrar el coeficiente de sustentación de la sección característica

$$\alpha_{0,7} = \theta_{0,7} + \frac{c_{d0,7}}{c_{l0,7}}$$

Iterando en todas estas ecuaciones se podrá obtener la velocidad vertical V_V . Hay que recordar que el ángulo de paso de la sección característica es

$$\theta_{0,7} = \theta_0 + \theta_1 x_{0,7}$$

Y que los coeficientes $c_{l0,7}$ y $c_{d0,7}$ son

$$c_{l0,7} = c_{l\alpha} \cdot \alpha_{0,7} \quad c_{d0,7} = c_{d0} + c_{d1} \alpha_{0,7} + c_{d2} \alpha_{0,7}^2$$

En el punto B de la figura 2.5 la velocidad total es mínima, en el punto C la velocidad de descenso es mínima, y en el punto D el ángulo de descenso es el mínimo. Para cualquier velocidad de descenso hay dos velocidades horizontales posibles (puntos E_1 y E_2).

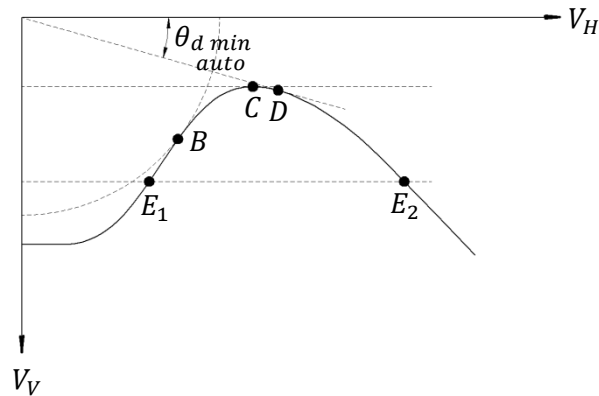


Figura 2.5. Velocidad de descenso en autorrotación en función de la de avance.

Para que el piloto pueda descender en autorrotación, deberá establecer el ángulo de paso colectivo por debajo del máximo para autorrotación que se vio en el punto anterior. El ángulo de descenso deberá superar el mínimo ángulo de descenso de la figura anterior y, una vez en autorrotación, modificando el ángulo de paso cíclico se pueden modificar las condiciones de la autorrotación.

De nuevo, al acercarse al suelo, incrementar el ángulo de paso colectivo disminuirá la velocidad vertical, pues la tracción aumentará temporalmente, hasta que se frene el rotor y se pierda. Por esto hay que realizar la maniobra a suficiente distancia del suelo como para poder frenar, pero suficiente bajo como para no caer cuando se frene el rotor.

Para eliminar la velocidad de avance y no contactar con el suelo con velocidad horizontal se realiza una maniobra de recogida que inclina el rotor, y por lo tanto la tracción, hacia atrás. Esta última maniobra es crítica, pues la cola del helicóptero podría golpear con el suelo.

Si se disminuye la carga discal T/S disminuyen los requisitos de potencia, y en autorrotación el rotor se frenará menos.

2.9. Actuaciones en despegue

En un helicóptero con ruedas se puede realizar rodadura antes del despegue y después del aterrizaje. En comparación con un avión, un helicóptero tiene un centro de gravedad más elevado en términos relativos, de forma que la aeronave es más inestable y puede volcar fácilmente.

Dado que el helicóptero se tiene que propulsar hacia adelante mediante su rotor, enseguida genera tracción que hace disminuir la fuerza de contacto con el suelo y el agarre de los neumáticos. Para poder avanzar hay que inclinar el rotor principal hacia adelante, lo que produce un momento de picado en el fuselaje, de modo que la parte delantera se solicita más que la parte trasera del tren de aterrizaje.

El fuselaje del helicóptero es mucho menor que el de un avión, y la distancia entre las ruedas es menor, otro factor que afecta a la estabilidad ante el vuelco. El viento cruzado hace que el rotor antipar trabaje en vuelo de avance inclinado, lo que hace variar su tracción T_t .

Por todos estos motivos, hace falta un terreno de rodadura liso, con viento cruzado mínimo y a bajas velocidades de rodadura. El despegue se clasifica en cuatro estilos

- Despegue estilo helicóptero

Consiste en un despegue vertical hasta unos pocos metros de altura y, una vez en vuelo a punto fijo, se avanza en trayectoria inclinada. Debe vigilarse que al inclinar el rotor hacia adelante, variando el paso cíclico, no se caiga el helicóptero por desequilibrio de fuerzas. Para ello se aumenta la tracción aumentando el paso colectivo.

Este tipo de despegue no será realizable si la altitud o la temperatura hacen que disminuya la densidad, ni si el helicóptero es demasiado pesado.

- Despegue estilo avión

Si se tiene un tren de aterrizaje con ruedas y una superficie adecuada, puede despegarse ganando velocidad con el rotor inclinado rodando por la pista, de forma que la potencia necesaria para elevarse disminuya gracias a la velocidad de avance.

- Despegue con efecto suelo

Es muy similar al despegue estilo avión, con la salvedad de que se realiza un pequeño ascenso inicial que permita aprovechar el efecto suelo para disminuir la potencia necesaria. Este modo puede realizarse con un tren de aterrizaje de patines.

- Despegue con múltiples motores

Con la posibilidad de que se produzca un fallo de motor. La decisión de continuar el despegue tras el fallo del motor se basa en dos conceptos, según si se despegue estilo helicóptero o estilo avión. Si se está despegando en modo avión existe una velocidad v_1 a partir de la cual es necesario seguir adelante con el despegue.

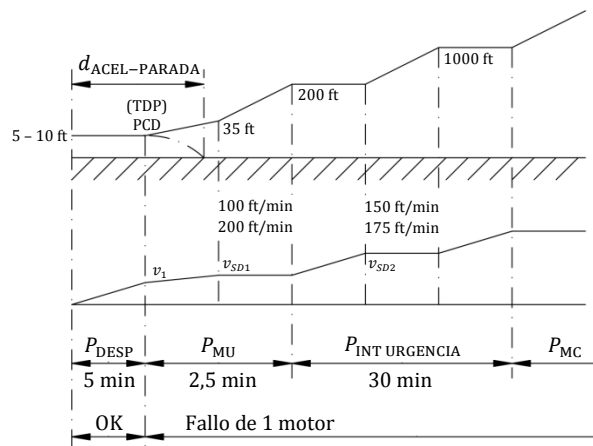


Figura 2.6. Senda de despegue estilo avión con fallo de un motor.

Si se está despegando en modo vertical existe una altura crítica h_{cr} que permite completar el despegue en base a la normativa de poder superar los obstáculos por al menos 35 ft durante todo el despegue, con una velocidad v_{SD1} que permita un exceso de potencia que haga posible ascender a 100 ft/min o a 200 ft/min.

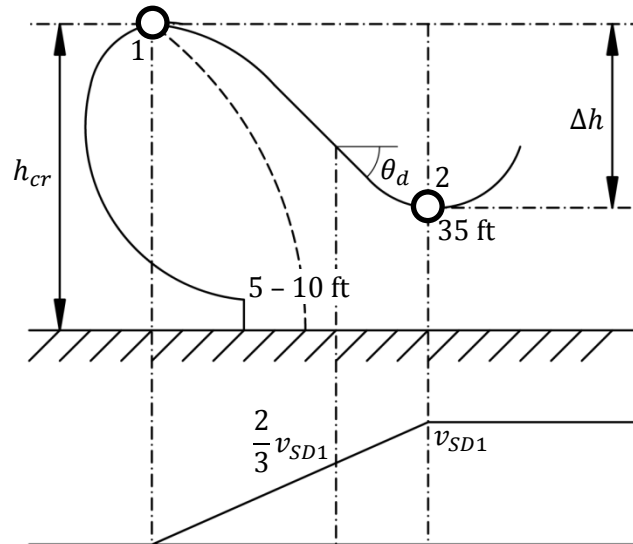


Figura 2.7. Senda de despegue vertical con fallo de un motor.

La energía entre los puntos 1, de altura crítica, y 2, de velocidad crítica, se divide en 4 términos

$$E_{1 \rightarrow 2} = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 0$$

- El término E_1 corresponde a la energía potencial

$$E_1 = mg \cdot \Delta h$$

- El término E_2 corresponde a la energía aplicada a lo largo del recorrido

$$E_2 = \int_1^2 P dt = (n - 1) P_{MU} \cdot t$$

- El término E_3 corresponde a la energía cinética

$$E_3 = \frac{1}{2} m v_{SD1}^2$$

- El término E_4 corresponde a la resistencia

$$E_4 = \int_1^2 P dt = \frac{P_1 v_{SD1}}{a} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{v_{DS1}}{v_k} \right)^2 \right)$$

Para este último término se considera la potencia en función de la velocidad $P(v)$ como una parábola, y aceleración a constante

$$P = P_1 - (P_1 - P_2) \frac{v^2}{v_{SD1}^2} = P_1 \left(1 - \left(\frac{v}{v_k} \right)^2 \right) \quad v_k^2 = \frac{v_{DS1}^2}{1 - \frac{P_2}{P_1}} \quad dt = \frac{dv}{a}$$

De este modo puede determinarse Δh en función del resto de parámetros

$$\Delta h = \frac{v_{SD1}^2}{2g} \left(1 + \frac{2g}{Wv_{SD1}a} \left(\frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 - P_{disp} \right) \right)$$

La potencia P_1 se obtiene de vuelo a punto fijo, y P_2 se calcula a partir de vuelo en avance con $v_x = v_{SD1}$ y $\bar{v}_x \ll 1$, donde v_{SD1} es la velocidad que permite un exceso de potencia que permita ascender a 100 ft/min o a 200 ft/min. A partir de la potencia disponible se encontrará v_{SD1} .

$$P_1 = P_{i0} + P_0 \quad P_{disp} = P_2 + P_V = \left(\frac{1}{\eta_r} + \frac{k_t}{\eta_t} \right) (P_i + P_0 + P_{of}) + \left(\frac{1}{\eta_r} + \frac{k_t}{\eta_t} \right) Wv_{SD1}$$

La aceleración se aproxima, por ejemplo, si se dispone del tiempo entre 1 y 2, por

$$a \approx \frac{v_{SD1}}{t}$$

Otro modo de aproximarla, más parecido al método de ensayo en vuelo, es a partir del punto de la trayectoria en el que la velocidad horizontal es $v_x = (2/3)v_{SD1}$. Conocido el ángulo de descenso θ_d en este punto, deberá aplicarse la ecuación de la energía en forma diferencial

$$\begin{aligned} dE_1 &= -mg \, dh & dE_2 &= (n-1)P_{MU} \, dt \\ dE_3 &= mv \, dv & dE_4 &= P \, dt = P_1 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \frac{v_{SD1}}{v_k} \right)^2 \right) dt \end{aligned}$$

Los diferenciales dh y dv se pueden convertir en dt

$$dh = \frac{2}{3} v_{SD1} \tan \theta_d \, dt \quad v \, dv = \frac{2}{3} v_{SD1} \cdot a \, dt$$

Sustituyendo, sumando e igualando a cero las cuatro energías entonces se obtiene

$$a = \frac{9(n-1)P_{MU} - 5P_1 - 4P_2}{6mv_{SD1}} - g \tan \theta_d$$

2.10. Actuaciones en aterrizaje

El aterrizaje se divide en cuatro tipos, tipo helicóptero, tipo avión, en autorrotación y especial.

En el tipo helicóptero se vuela con velocidad de avance inclinado en descenso hasta que, a cierta altura (a unos 40 m del suelo), y de modo similar a la autorrotación, se realiza la maniobra de recogida, que disminuye las velocidades horizontal y de descenso hasta la situación de vuelo a punto fijo (a unos 10 m del suelo), cuando se inicia un descenso en vuelo axial.

Si no es posible aplicar la potencia necesaria para el vuelo a punto fijo previo al descenso final se aterriza en tipo avión. Es muy parecido al anterior, pero ahora en la maniobra de recogida no se reduce a cero la velocidad horizontal, sino que se vuela en vuelo horizontal, que tiene un requisito de potencia inferior al vuelo a punto fijo. Cuando la velocidad horizontal es adecuada para la rodadura se contacta con el suelo y la parada se efectúa durante la rodadura.

La autorrotación ya se ha estudiado en el punto "2.7. Actuaciones en vuelo de autorrotación axial" y en el punto "2.8. Actuaciones en vuelo de autorrotación en avance".

El aterrizaje especial es cualquier aterrizaje que no pertenezca a alguna de las categorías anteriores.

3. Dinámica de palas

3.1. Tipos de rotor principal

Debido a la distribución de sustentación y a la resistencia sobre una pala aparecen unos momentos flectores, hacia arriba y hacia atrás respectivamente, que son muy elevados. Si además se considera vuelo de avance, las cargas aerodinámicas variarán de forma cíclica y el encaste trabajará a fatiga. Para evitar los problemas que estos momentos puedan generar se permite el movimiento de la pala en batimiento y de arrastre, además del paso, de forma que se elimine el momento en el encaste y no se transmitan las cargas al buje y al resto del helicóptero.

Esto puede conseguirse de diferentes maneras.

- El rotor articulado está provisto de articulaciones y cojinetes que permiten el movimiento en los tres grados de libertad.
- El rotor semirrígido (en inglés, *hingless*) permite los movimientos de batimiento y arrastre mediante el uso de materiales flexibles.
- El rotor flexible (en inglés, *bearingless*) permite los movimientos de los tres grados de libertad sin uso de articulaciones.
- El rotor balanceante (en inglés, *teetering*) consiste en dos palas articuladas en su eje, y que balancean unidas respecto a esta articulación, a modo de columpio.

En condiciones de simetría axial las palas describen un cono debido a su ángulo de batimiento β , y además lo harán con un cierto retraso respecto a su posición nominal debido a su ángulo de arrastre ξ . En vuelo de avance, donde se pierde la axilsimetría los ángulos no son constantes a lo largo del giro, y se modifican mediante el control de paso cíclico.

3.2. Ángulo de batimiento en vuelo axial

En condiciones de vuelo axial donde el flujo presenta axilsimetría el ángulo de batimiento o conicidad β se denomina β_0 y no varía con la posición de la pala. Para determinarlo basta con tomar el equilibrio de momentos en el eje. El momento aerodinámico se equilibrará con el generado por la fuerza centrífuga debido al giro de las palas.

$$\sum M = M_A + M_C = 0$$

Se considera momento positivo cuando tiende a disminuir el ángulo de batimiento. La fuerza centrífuga se toma como

$$dF_C = m\Omega^2 r \cos \beta_0 dr$$

Donde $m = m(r)$ es la distribución de masa por unidad de longitud, que puede variar a lo largo de la pala. El momento que genera esta fuerza es

$$dM_C = dF_C \cdot r \sin \beta_0$$

Para el momento aerodinámico se toma la fuerza aerodinámica calculada tal y como ya se hizo en el punto “1.9. Teoría del elemento de pala para vuelo axial”, por lo tanto

$$dM_A = r dF_A$$

Y, suponiendo que la articulación de batimiento está en $r = 0$, para toda la pala se tendrá

$$\int_0^R dM_C = - \int_0^R dM_A \Rightarrow \int_0^R r^2 \Omega^2 m \cos \beta_0 \sin \beta_0 dr = \int_0^R r dF_A$$

Se realizará la suposición de que el ángulo de batimiento es pequeño y entonces el primer término puede escribirse como

$$\int_0^R r^2 \Omega^2 m \cos \beta_0 \sin \beta_0 dr = \beta_0 \Omega^2 \int_0^R m r^2 dr = \beta_0 \Omega^2 I_b$$

Donde I_b es el momento de inercia de la pala respecto al eje de batimiento. Finalmente

$$\beta_0 = \frac{1}{I_b \Omega^2} \int_0^R r dF_A$$

El ángulo de batimiento aumentará con la sustentación de la pala, y por lo tanto con el peso del helicóptero. Por otro lado disminuirá con la masa de la pala y en concreto con la masa en la punta de la pala. Se deja como ejercicio comprobar que el rotor de torsión ideal presenta un menor ángulo de batimiento β_0 que un rotor equivalente de torsión constante debido a la distribución de la fuerza aerodinámica.

3.3. Ángulo de batimiento en vuelo de avance

Tanto en el punto “1.9. Teoría del elemento de pala para vuelo axial” como también en el punto “1.15. Teoría del elemento de pala en vuelo de avance” se obvió el hecho de que el batimiento de la pala modifica las velocidades que recibe cada elemento de pala, pero a partir de ahora se tendrá en cuenta y se tendrá

$$\frac{U_T}{\Omega R} = x + \mu \sin \psi \quad \frac{U_N}{\Omega R} = \lambda \cos \beta + \mu \cos \psi \sin \beta + \frac{x\dot{\beta}}{\Omega}$$

El ángulo de batimiento β variará de forma cíclica, lo que provocará una velocidad $\dot{\beta}$ y una aceleración $\ddot{\beta}$ que a su vez provocará unas fuerzas de inercia a tener en cuenta en el equilibrio de momentos, pues este equilibrio se impone en un sistema de referencia no inercial.

$$\sum M = M_C + M_A + M_I = 0$$

$$dF_C = m r \Omega^2 dr \quad dF_A \approx dL = \frac{1}{2} \rho U_T^2 c \cdot c_{l\alpha} \left(\theta - \frac{U_N}{U_T} \right) dr \quad dF_I \approx m r \ddot{\beta} dr$$

Desarrollando, en esta ocasión las fuerzas de inercia hacen aparecer aceleraciones.

$$(\ddot{\beta} + \Omega^2 \beta) I_b = \int_0^R r dF_A$$

Esta ecuación se asemeja a una ecuación de vibración con frecuencia propia Ω excitada por la fuerza de sustentación. Las derivadas temporales del ángulo de batimiento también se pueden considerar respecto a la posición de la pala, de forma que sea más cómodo trabajar con ellas. Esto se hace como

$$\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\beta}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dt} = \beta' \Omega \quad \ddot{\beta} = \Omega^2 \beta''$$

Entonces puede escribirse la ecuación anterior como

$$\beta'' + \beta = \frac{1}{I_b \Omega^2} \int_0^R r dF_A$$

Mediante esta ecuación diferencial se puede encontrar el ángulo de batimiento en función de la posición azimutal de la pala. Esta ecuación puede escribirse también como

$$\beta'' + \beta = \gamma M_A \quad \gamma = \frac{\rho c c_{l\alpha} R^4}{I_b}$$

Donde γ es el número de Lock y toma valores entre 5 y 10, y el momento aerodinámico M_A se puede escribir como

$$M_A = \int_0^1 \frac{x}{2} (\theta(x + \mu \sin \psi) - (\lambda + x\beta' + \mu\beta \cos \psi)(x + \mu \sin \psi)) dx$$

Considerando que la torsión θ es $\theta(x, \psi) = \theta_G(x) + \theta_C(\psi)$, donde θ_G es la torsión geométrica $\theta_G = \theta_1 x$, y θ_C representa el paso cíclico, que $\Omega t = \psi$ y que además λ es constante, entonces se puede escribir

$$M_A = M_{\theta_C} \theta_C + M_{\theta_1} \theta_1 + M_\lambda \lambda + M_\beta \beta + M_{\beta'} \beta'$$

Más adelante, en el punto "3.7. Coeficientes del momento aerodinámico" se encuentra la expresión para cada uno de los coeficientes del momento aerodinámico. Se tiene entonces la ecuación diferencial

$$\beta'' + \beta = \gamma (M_{\theta_C} \theta_C + M_{\theta_1} \theta_1 + M_\lambda \lambda + M_\beta \beta + M_{\beta'} \beta')$$

Considérese por un momento que no actúa ningún tipo de fuerza aerodinámica en el rotor. Entonces esta ecuación se reduce a

$$\beta'' + \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \beta_c \cos \psi + \beta_s \sin \psi$$

La frecuencia natural es 1 en el dominio del azimut ψ , y es Ω en el dominio temporal. Teniendo de nuevo en cuenta las fuerzas aerodinámicas la ecuación diferencial queda

$$\beta'' - \gamma M_{\beta'} \beta' + \beta = \gamma (M_{\theta_C} \theta_C + M_{\theta_1} \theta_1 + M_\lambda \lambda + M_\beta \beta)$$

Donde se ha considerado que, para casos sencillos, lo habitual es que el término M_β sea despreciable y no tome parte en la ecuación, por lo que no se ha despejado. El momento aerodinámico introduce una amortiguación en el sistema, es el término $-\gamma M_{\beta'} \beta'$.

Se puede demostrar que un sistema amortiguado excitado a su frecuencia natural responde con un desfase de 90° . En el caso del rotor, la ausencia de fuerzas aerodinámicas supone la inclinación del rotor que ya se ha visto.

La aparición de fuerzas aerodinámicas provoca un movimiento de precesión del rotor, como una peonza, y que sería continuo de no ser por la amortiguación que producen también estas fuerzas, motivo por el que el rotor alcanza una posición de equilibrio desfasada 90° respecto a la excitación. La excitación vendrá a su vez determinada por el paso cíclico θ_C .

Para esta ecuación la solución es de la forma

$$\beta = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{nc} \cos n\psi + \beta_{ns} \sin n\psi)$$

Mientras se esté considerando pala rígida se tomará únicamente el término $n = 1$, pues se desprecian los términos de orden superior.

$$\beta = \beta_0 + \beta_{1c} \cos \psi + \beta_{1s} \sin \psi$$

De forma similar, se puede aplicar un paso cíclico de la forma

$$\theta_C = \theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\theta_{nc} \cos n\psi + \theta_{ns} \sin n\psi)$$

Y dado que para el batimiento sólo se han tomado los términos con $\cos \psi$ y $\sin \psi$, y no los de armónicos (o armónicos, ambas formas son válidas) superiores, no se considerarán tampoco estos armónicos para el paso cíclico, pues al intentar relacionar esos términos con el batimiento que provocan, se llegaría a la conclusión de que son nulos, y por lo tanto

$$\theta_C = \theta_0 + \theta_{1c} \cos \psi + \theta_{1s} \sin \psi$$

De este modo, dada una condición de vuelo y calculados los ángulos de batimiento para ella, se puede calcular el ángulo de paso cíclico para mantener dicha condición, o al revés, determinar la trayectoria de vuelo para un paso cíclico dado.

A modo de recordatorio se ilustra a continuación el sistema de referencia del azimut, visto desde arriba del rotor.

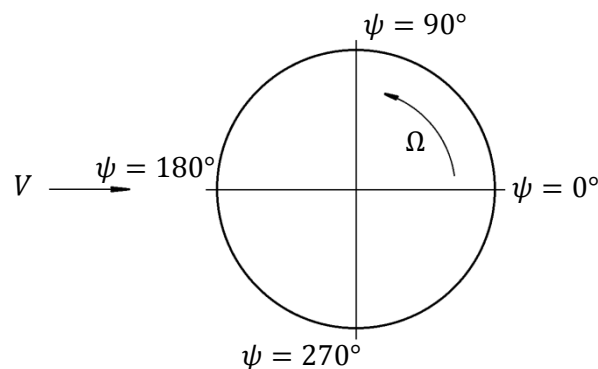


Figura 3.1. Posiciones azimutales, vistas desde arriba del rotor.

En el caso de vuelo a punto fijo, la resolución de la ecuación se hace a partir de los momentos. Se obtienen los coeficientes a partir de “3.7. Coeficientes del momento aerodinámico”.

$$M_{\theta C} = \frac{1}{8} \quad M_{\theta 1} = \frac{1}{10} \quad M_{\lambda} = -\frac{1}{6} \quad M_{\beta} = 0 \quad M_{\beta'} = -\frac{1}{8}$$

Suponiendo la solución de la forma

$$\beta = \beta_0 + \beta_{1c} \cos \psi + \beta_{1s} \sin \psi \quad \theta_C = \theta_0 + \theta_{1c} \cos \psi + \theta_{1s} \sin \psi$$

Se puede encontrar entonces β' y β'' , y sustituir todas estas expresiones en la ecuación diferencial. Entonces por agrupación de términos se llega a la solución

$$\beta_0 = \gamma \left(\frac{\theta_0}{8} + \frac{\theta_1}{10} - \frac{\lambda}{6} \right) \quad \theta_{1c} - \beta_{1s} = 0 \quad \theta_{1s} + \beta_{1c} = 0$$

Las relaciones entre θ_{1c} y β_{1s} , y entre θ_{1s} y β_{1c} son resultado del desfase de 90° en el sistema.

3.4. Influencia del batimiento en la sustentación

Se realiza a continuación un corto análisis del comportamiento del rotor en vuelo de avance.

- En el lado derecho del rotor $\psi = 90^\circ$ la sustentación es máxima, pues es la posición en que la velocidad que ve la pala es mayor. Al presentar el batimiento un retraso de 90° , éste será máximo en $\psi = 180^\circ$.
- En el lado izquierdo del rotor $\psi = 270^\circ$ la sustentación es mínima, pues es la posición en que la velocidad que ve la pala es menor. Al presentar el batimiento un retraso de 90° , éste será mínimo en $\psi = 0^\circ$.

Por lo tanto el rotor se inclina hacia atrás. Esto tiene más efectos.

- La inclinación hacia atrás aumenta el ángulo de ataque en la parte delantera del rotor $\psi = 180^\circ$, y por lo tanto también la sustentación. Al presentar el batimiento un retraso de 90° , éste aumentará en $\psi = 270^\circ$.
- La inclinación hacia atrás disminuye el ángulo de ataque en la parte trasera del rotor $\psi = 0^\circ$, y por lo tanto también la sustentación. Al presentar el batimiento un retraso de 90° , éste disminuirá en $\psi = 90^\circ$.

En definitiva, el rotor se inclina hacia atrás y a la derecha. Esta situación es desfavorable para el vuelo de avance, que requiere una inclinación hacia adelante del rotor, y que no haya inclinación lateral. Para evitarlo se modifica el paso cíclico.

- Aumentando el paso cíclico en el lado izquierdo del rotor $\psi = 270^\circ$ y disminuyéndolo en el derecho $\psi = 90^\circ$, y debido al retraso de 90° , la sustentación aumentará en la parte trasera del rotor $\psi = 0^\circ$ y disminuirá en la parte delantera del rotor $\psi = 180^\circ$, inclinando de nuevo el rotor hacia adelante. Esto implica que $\theta_{1s} < 0$.
- Aumentando el paso cíclico en $\psi = 0^\circ$ y disminuyéndolo en $\psi = 180^\circ$, es decir $\theta_{1c} > 0$, aumentará la sustentación en $\psi = 90^\circ$ y disminuirá en $\psi = 180^\circ$, nivelando el rotor lateralmente. Esto implica que $\theta_{1c} > 0$.

3.5. Planos de referencia

Respecto a un plano de referencia horizontal (*reference plane* o RP) se pueden definir otros planos a partir de algunas características del movimiento del rotor.

El primero es el plano del recorrido de las puntas de pala (*tip path plane* o TPP) y queda definido por la expresión del batimiento

$$\beta = \beta_0 + \beta_{1c} \cos \psi + \beta_{1s} \sin \psi$$

Respecto al plano horizontal de referencia, el ángulo de conicidad β_0 supone únicamente una traslación de las puntas de pala. Los términos del primer armónico producen una inclinación del plano de puntas de pala. El término β_{1c} genera una deflexión longitudinal hacia adelante y el término β_{1s} genera una deflexión lateral hacia la izquierda, como muestra la figura 3.2.

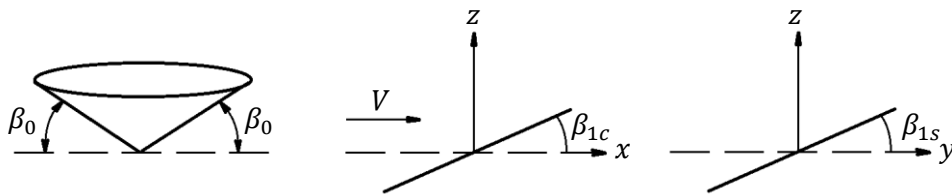


Figura 3.2. Inclinación del plano de recorrido de las puntas de pala.
Izquierda: Conicidad. Centro: Inclinación longitudinal. Derecha: Inclinación lateral.

Los armónicos mayores implican una distorsión de este plano de recorrido de las puntas de pala, pero dado que habitualmente son pequeños, se supondrán despreciables.

El plano central (*hub plane* o HP) es el normal al eje del rotor, y no tiene por qué ser horizontal en vuelo vertical, dependerá de la posición del centro de gravedad del helicóptero respecto al eje del rotor.

El plano de paso constante (*no-feathering plane* o NFP) es el plano respecto al cual el paso es constante para todo azimut, y por lo tanto está definido a partir de θ_{1c} y θ_{1s} de forma similar al plano de recorrido de las puntas de pala. El plano de control (*control plane* o CP) está representado por el plato distribuidor, el elemento que cambia el ángulo de paso de las palas. Se considerará que estos dos planos coinciden, aunque no siempre es así, pues el CP se basa en el paso deseado por el piloto, y el NFP en el paso real, que se puede ver modificado.

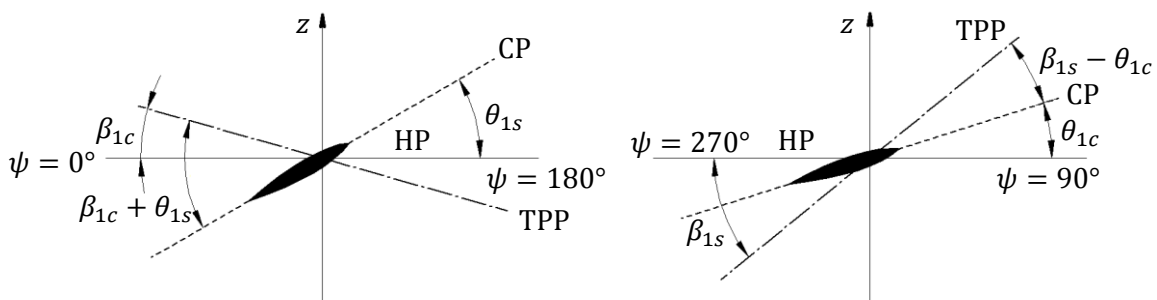


Figura 3.3. Inclinación del TPP respecto al CP.
Inclinación longitudinal: $\beta_{1c} + \theta_{1s}$ Inclinación lateral: $\beta_{1s} - \theta_{1c}$

3.6. Articulación de batimiento descentrada

Habitualmente las articulaciones de un rotor no están situadas justo en el eje, sino que pueden estar alejadas del mismo una distancia pequeña, pero suficiente para tenerla en cuenta. Si la articulación se encuentra a una distancia $e_b R$ respecto al eje, la frecuencia natural aumentará ligeramente, y el desfase de 90° será algo menor.

La resolución es muy similar al caso en que la articulación se situaba sobre el eje. El equilibrio de momentos se realizará en la articulación, pero es importante tener en cuenta que la fuerza resultante sobre ésta transmitirá un momento al eje.

Las fuerzas que actúan sobre el rotor son

$$dF_C = mr\Omega^2 dr \quad dF_I = m(r - e_b R)\ddot{\beta} dr \quad dF_A = \rho(\Omega R)^2 cR c_{l\alpha} d\bar{F}_A$$

La velocidad normal adimensional es

$$\frac{U_N}{\Omega R} = \lambda + (x - e_b)\beta' + \mu\beta \cos \psi$$

Los momentos que producen estas fuerzas respecto a la articulación son

$$dM_C = mr(r - e_b R)\beta\Omega^2 dr \quad dM_I = m(r - e_b R)^2\ddot{\beta} dr \quad dM_A = (r - e_b R) dF_A$$

Igualando estos momentos se obtiene la ecuación

$$\int_{e_b R}^R mr(r - e_b R)\beta\Omega^2 dr + \int_{e_b R}^R m(r - e_b R)^2\ddot{\beta} dr = \int_{e_b R}^R (r - e_b R) dF_A$$

Desarrollando la ecuación anterior, haciendo el cambio $\ddot{\beta} = \Omega^2\beta''$ y considerando la inercia

$$I_b = \int_{e_b R}^R (r - e_b R)^2 m dr$$

Se obtiene finalmente

$$\beta'' + v_b^2\beta = \gamma M_A$$

Donde

$$v_b^2 = 1 + \frac{e_b R}{I_b} \int_{e_b R}^R m(r - e_b R) dr$$

En este caso, a diferencia del anterior, tanto el control longitudinal como el lateral estarán acoplados, y el desfase entre la acción sobre el control y el batimiento será ligeramente menor de 90° . Este desfase ϕ puede obtenerse reescribiendo el batimiento como

$$\beta = \beta_0 + \theta_{1c} \cos(\psi - \phi) + \theta_{1s} \sin(\psi - \phi)$$

O también se puede reescribir el paso cíclico como

$$\theta_c = \theta_0 + \beta_{1c} \cos(\psi + \phi) + \beta_{1s} \sin(\psi + \phi)$$

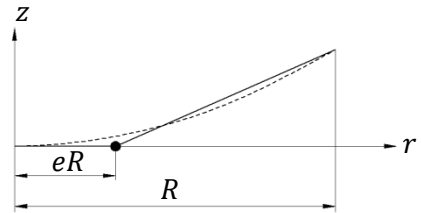
3.7. Coeficientes del momento aerodinámico

Desarrollando la expresión para el momento aerodinámico se pueden identificar los términos

$$\begin{aligned}
 M_{\theta c} &= \frac{1}{8}c_2 + \frac{1}{3}c_1\mu \sin \psi + \frac{1}{4}c_0\mu^2 \sin^2 \psi & c_0 &= 1 - 2e_b + e_b^2 \\
 M_{\theta 1} &= \frac{1}{10}c_3 + \frac{1}{4}c_2\mu \sin \psi + \frac{1}{6}c_1\mu^2 \sin^2 \psi & c_1 &= 1 - \frac{3}{2}e_b + \frac{1}{2}e_b^3 \\
 M_{\lambda} &= -\frac{1}{6}c_1 - \frac{1}{4}c_0\mu \sin \psi & c_2 &= 1 - \frac{4}{3}e_b + \frac{1}{3}e_b^4 \\
 M_{\beta} &= -\frac{1}{6}c_1\mu \cos \psi - \frac{1}{4}c_0\mu^2 \cos \psi \sin \psi & c_3 &= 1 - \frac{5}{4}e_b + \frac{1}{4}e_b^5 \\
 M_{\beta'} &= -\frac{1}{8}d_1 - \frac{1}{6}d_0\mu \sin \psi & d_0 &= 1 - 3e_b + 3e_b^2 - e_b^3 \\
 & & d_1 &= 1 - \frac{8}{3}e_b + 2e_b^2 - \frac{1}{3}e_b^4
 \end{aligned}$$

3.8. Batimiento en rotores semirrígidos

Las oscilaciones de batimiento de un rotor semirrígido se pueden analizar con las ecuaciones de un rotor articulado, que tiene una articulación equivalente en un punto alejado una distancia eR del buje, y con una rigidez a flexión añadida.



Las ecuaciones son efectivamente muy similares al caso de un rotor con una articulación descentrada.

Figura 3.4. Rotor semirrígido y rotor articulado equivalente.

$$\int_{eR}^R (r - eR) dF_A = \int_{eR}^R (r - eR)^2 m \ddot{\beta} dr + \int_{eR}^R (r - eR) r m \Omega^2 \beta dr + k_{\beta} (\beta - \beta_p)$$

En términos del azimut ψ

$$\beta'' + v_{\beta}^2 \beta = \gamma \bar{M}_A + \frac{\omega^2}{\Omega^2} \beta_p$$

La frecuencia natural también cambiará ligeramente, pero la inercia a batimiento se puede considerar idéntica.

$$v_{\beta}^2 = 1 + \frac{eR \int_{eR}^R m(r - eR) dr}{I_{\beta}} + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} = v_b^2 + \frac{k_{\beta}}{I_{\beta} \Omega^2} \quad I_{\beta} \approx I_b \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_{\beta}}{I_{\beta}}}$$

La posición de la articulación equivalente eR se puede estimar a partir del desplazamiento en la punta z_{tip} y de la derivada del desplazamiento en $x = 3/4$ de la pala

$$\left. \frac{dz}{dr} \right|_{x=0,75} = \frac{z_{tip}}{R - eR}$$

3.9. Acoplamiento entre el batimiento y el paso

Para aumentar la estabilidad del movimiento de las palas puede dotarse a la articulación de batimiento de un ángulo δ_3 como se indica en la figura 3.5.

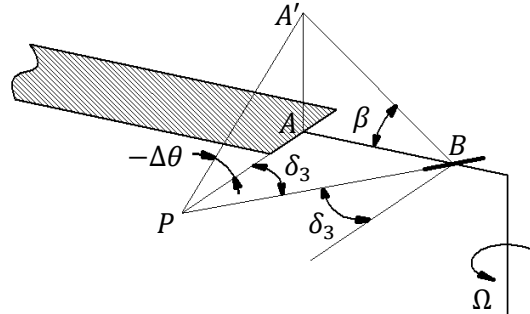


Figura 3.5. Ángulo δ_3 de la articulación de batimiento.

Al estar desalineada la articulación, el batimiento y el paso estarán acoplados. Una variación del batimiento β positiva (hacia arriba) provocará una variación del paso cíclico $\Delta\theta$ negativa (con el borde de ataque inclinado hacia abajo). Considerando que los ángulos β y $\Delta\theta$ son pequeños, se puede escribir la relación entre el batimiento y la variación de paso asociada como

$$\tan -\Delta\theta \approx -\Delta\theta = \frac{\overline{AA'}}{\overline{AP}} \quad \tan \beta \approx \beta = \frac{\overline{AA'}}{\overline{AB}} \quad \tan \delta_3 = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}$$

$$\Delta\theta = -\beta \tan \delta_3$$

Por lo tanto el paso cíclico es ahora $\theta_C + \Delta\theta$ y la ecuación diferencial del movimiento de batimiento queda de la siguiente forma

$$\beta'' + v_b^2 \beta = \gamma (M_{\theta_C} (\theta_C - \beta \tan \delta_3) + M_{\theta_1} \theta_1 + M_\lambda \lambda + M_{\beta'} \beta' + M_\beta \beta)$$

Aislando los términos del batimiento queda

$$\beta'' - \gamma M_{\beta'} \beta' + (v_b^2 + \gamma M_{\theta_C} \tan \delta_3 - \gamma M_\beta) \beta = \gamma (M_{\theta_C} \theta_C + M_{\theta_1} \theta_1 + M_\lambda \lambda)$$

Y la frecuencia natural será

$$v_\beta^2 = v_b^2 + \gamma \tan \delta_3 M_{\theta_C} - \gamma M_\beta$$

Hay que recordar que la frecuencia natural sin acoplamiento v_b es

$$v_b^2 = 1 + \frac{e_B R}{I_b} \int_{e_B R}^R m(r - e_B R) dr$$

3.10. Ángulo de arrastre en vuelo axial

La fuerza responsable del movimiento de arrastre será la fuerza tangencial dF_T , que se divide en términos de la resistencia inducida ϕdL y de la resistencia parásita dD . Puede comprobarse la existencia entonces de acoplamiento entre el batimiento y el arrastre en el término de la resistencia inducida, pero también hay un acoplamiento debido a la aceleración de Coriolis. Posteriormente se corregirá también el movimiento de batimiento para incluir este efecto.

La articulación de arrastre no puede estar situada en el eje, y no tiene por qué estar situada en la misma posición que la articulación de batimiento. El ángulo de arrastre se denota por la letra ζ , mientras que la distancia de la articulación de arrastre al eje será $e_a R$.

En el caso de simetría axial, es decir, vuelo axial, existirá una posición de equilibrio del ángulo de arrastre que se mantendrá constante a lo largo de todo el giro. Considerando un elemento diferencial de pala, la posición angular de este elemento respecto a la posición natural de la pala será ξ , y marca la dirección de la fuerza centrífuga dF_C como muestra la figura 3.6.

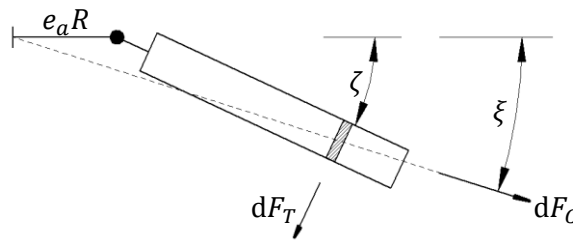


Figura 3.6. Fuerzas influyentes sobre el movimiento de arrastre.

Las fuerzas que actúan son

$$dF_T \approx \phi dL + dD \quad dF_{CH} = m\Omega^2 r \sin(\zeta - \xi) dr \approx m\Omega^2 r(\zeta - \xi) dr$$

Donde dF_{CH} es la componente tangencial de la fuerza centrífuga. Los momentos producidos por estas fuerzas son

$$dM_T = (r - e_a R) dF_T \quad dM_{CH} = m\Omega^2 r(r - e_a R)(\zeta - \xi) dr = m\Omega^2 e_a R \zeta (r - e_a R) dr$$

Equilibrando estos momentos se obtiene

$$\int_{e_a R}^R dM_{CH} = \int_{e_a R}^R dM_T$$

El ángulo de arrastre será ζ_0 constante, es decir $\dot{\zeta} = \ddot{\zeta} = 0$, donde

$$\zeta_0 = \frac{1}{e_a R \Omega^2} \frac{\int_{e_a R}^R (r - e_a R) dF_T}{\int_{e_a R}^R m(r - e_a R) dr}$$

3.11. Ángulo de arrastre en vuelo de avance

De forma similar al caso discutido en “3.3. Ángulo de batimiento en vuelo de avance” puede resolverse el caso del ángulo de arrastre en vuelo de avance.

$$\zeta'' + v_a^2 \zeta = \frac{1}{\Omega^2 I_a} \int_{e_a R}^R (r - e_a R) dF_T = \frac{M_a}{\Omega^2 I_a}$$

Donde I_a es la inercia del movimiento de arrastre

$$I_a = \int_{e_a R}^R m(r - e_a R)^2 dr$$

Hay que recordar que se está tomando como variable independiente el azimut ψ en detrimento del tiempo t . La frecuencia de oscilación del sistema será

$$v_a^2 = e_a R \frac{\int_{e_a R}^R m(r - e_a R) dr}{\int_{e_a R}^R m(r - e_a R)^2 dr}$$

Habitualmente $0,2 < v_a^2 < 0,3$ Las fuerzas que originan el momento de arrastre M_a son pequeñas en comparación con las fuerzas de sustentación. En concreto, el momento M_ζ es pequeño, lo que provoca una amortiguación pequeña.

Tanto la frecuencia de arrastre como el amortiguamiento aerodinámico en arrastre son muy pequeños. Esto provoca que se puedan producir inestabilidades aeroelásticas en el rotor. Para reducir este efecto se utilizan amortiguadores, ya sean friccionales o hidráulicos.

3.12. Resonancia en tierra

La resonancia en tierra consiste en el acoplamiento del modo de arrastre del rotor con algún modo del resto del fuselaje que implique movimientos del buje en el plano de rotación.

Supóngase un rotor de tres palas, y por lo tanto tres grados de libertad, por lo que las tres palas pueden oscilar en tres modos. El primero de ellos es simétrico, las palas se desplazan una misma cantidad y en la misma dirección, a la vez, sin consecuencias. Pero los otros dos modos son asimétricos, las palas se mueven cantidades diferentes en direcciones diferentes, lo que implica que el centro de masas del rotor no está situado en el eje, y además se desplazará alrededor del mismo. Aparecerá una fuerza centrífuga sobre el centro de masas del rotor.

Esta fuerza centrífuga se transmitirá al fuselaje, y si la frecuencia de oscilación del centro de masas del rotor es suficientemente próxima a algún modo excitable del fuselaje, comenzará a vibrar. Esto aumentará aún más el desplazamiento del centro de masas del rotor, realimentando la vibración. Además se incrementará la oscilación del batimiento, lo que aumentará más aún la oscilación de arrastre.

Estos dos modos asimétricos están a frecuencias $(v_a + 1)$ y $(v_a - 1)$. Si $v_a < 1$ entonces el segundo tendrá una frecuencia negativa, lo que provoca un desplazamiento del centro de masas en sentido contrario al giro, lo que facilita el acoplamiento con algún modo del fuselaje.

3.13. Acoplamiento entre arrastre y batimiento

El acoplamiento entre los modos de oscilación de batimiento y de arrastre se produce debido a las fuerzas de Coriolis.

Cualquier cuerpo que se mueva dentro de un sistema de referencia en rotación sufre un efecto que lo desvía de su trayectoria. Esto hace que el batir, el rotor experimente un movimiento de arrastre, y al revés.

Para un elemento de pala, su posición respecto al sistema móvil vendrá dada por

$$\vec{r} = eR \vec{i} + (r - eR) \cos \beta (\cos \zeta \vec{i} - \sin \zeta \vec{j}) + (r - eR) \sin \beta \vec{k}$$

Entonces la velocidad será

$$\vec{v} = (r - eR) \left(\dot{\beta} \cos \beta \vec{k} + \cos \beta (-\dot{\zeta} \sin \zeta \vec{i} - \dot{\zeta} \cos \zeta \vec{j}) - \dot{\beta} \sin \beta (\cos \zeta \vec{i} - \sin \zeta \vec{j}) \right)$$

Con la suposición de ángulos pequeños se eliminarán los senos y cosenos, así como los productos de ángulos. Escrita en forma vectorial la velocidad será

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -(r - eR)\dot{\beta}\beta \\ -(r - eR)\dot{\zeta} \\ (r - eR)\dot{\beta} \end{pmatrix}$$

La aceleración de Coriolis es por lo tanto

$$\vec{a}_{\text{Cor}} = 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -(r - eR)\dot{\beta}\beta \\ -(r - eR)\dot{\zeta} \\ (r - eR)\dot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\Omega(r - eR)\dot{\zeta} \\ 2\Omega(r - eR)\dot{\beta}\beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esta aceleración provocará la fuerza de Coriolis $d\vec{F}_{\text{Cor}} = dm \cdot \vec{a}_{\text{Cor}}$, que a su vez provocará un momento. Para el movimiento de batimiento esto se transforma en

$$M_{\text{Cor}} = \int_{eR}^R (r - eR)\beta dF_{\text{Cor}i} \Rightarrow \beta'' + v_b^2 \beta - 2\zeta' \beta = \gamma M_a$$

Y para el arrastre se tiene, despreciando la componente \vec{i} de la fuerza de Coriolis

$$M_{\text{Cor}} = \int_{eR}^R (r - eR) dF_{\text{Cor}j} \Rightarrow \zeta'' + v_a^2 \zeta + 2\beta' \beta = \frac{1}{\Omega^2 I_a} \int_{eR}^R (r - eR) dF_T$$

Donde las frecuencias son

$$v_b^2 = 1 + \frac{eR}{I_b} \int_{eR}^R m(r - eR) dr \quad v_a^2 = \frac{eR}{I_a} \int_{eR}^R m(r - eR) dr$$

De modo que aparecen términos de arrastre en la ecuación de batimiento y al revés.

3.14. Vibraciones de palas flexibles

El estudio y el control de las vibraciones de un helicóptero es fundamental para

- Mejorar la vida a fatiga de los componentes estructurales.
- Mejorar la durabilidad de los equipos eléctricos, electrónicos y mecánicos.
- Mejorar la eficacia y el confort de la tripulación.
- Mejorar el confort de los pasajeros.

Las fuentes principales de vibraciones del helicóptero son

- Fuerzas aerodinámicas oscilantes sobre el rotor principal.
- Vibraciones producidas por los componentes mecánicos.
- Fuerzas aerodinámicas variables sobre otras partes del helicóptero.

Existen tres tipos fundamentales de vibraciones

- Vibraciones libres, sin una fuerza variable aplicada. Estudiando el problema de vibraciones libres se obtendrán los modos propios de la estructura.
- Vibraciones forzadas, producidas por la aplicación de una fuerza oscilante, en el caso del helicóptero la fuerza aerodinámica.
- Vibraciones auto-excitadas, en el que un modo de vibración excitará un segundo modo de la estructura, es el caso de la resonancia.

La consideración de pala flexible es diferente a la articulación flexible que se vio en puntos anteriores. En ese caso únicamente se consideraba flexible a unión de la pala con el buje. Por el contrario ahora la pala completa será flexible y se supondrá como una viga en voladizo.

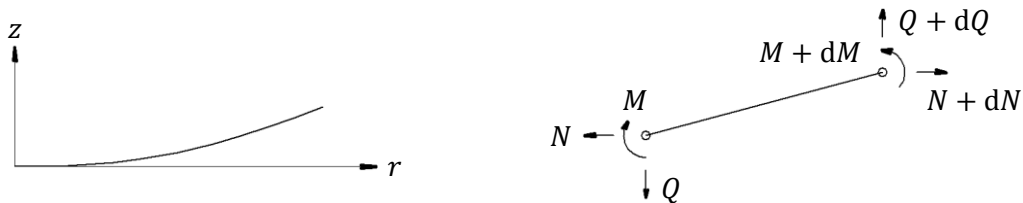


Figura 3.7. Flexión de la pala y elemento diferencial.

Las ecuaciones para un elemento de pala diferencial, como el que muestra la figura 3.7 son

$$-N + (N + dN) = -m\Omega^2 r dr \Rightarrow N(r) = \int_r^R m\Omega^2 r dr$$

$$-Q + (Q + dQ) = m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dr \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial r} = m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$$-M + (M + dM) + (Q + dQ)dr - (N + dN)dz = 0 \Rightarrow dM + Q dr - N dz = 0$$

Donde m es la masa por unidad de longitud $m(r)$. Derivando la última expresión dos veces respecto a r , y combinándola con la expresión para las fuerzas verticales se obtiene

$$\frac{\partial^2 M}{\partial r^2} + m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(N \frac{\partial z}{\partial r} \right) = 0$$

Y recordando, de las asignaturas “Teoría de estructuras” y “Estructuras aeroespaciales” la ecuación diferencial característica de una viga

$$M = EI \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \right) + m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(N \frac{\partial z}{\partial r} \right) = 0$$

Donde se considerará que el módulo de Young E y la inercia a flexión I dependerán de la posición. Se aplicará a esta ecuación el método de separación de variables visto en la asignatura “Métodos matemáticos”, por lo que se supone una solución de la forma

$$z(r, t) = Z(r) \cdot T(t) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial r} = Z' T \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial t} = Z T'$$

Se está realizando un abuso de lenguaje al designar mediante el apóstrofe ' las derivadas de ambas funciones, pues son derivadas respecto a dos variables distintas. Pero dado que tanto $Z(r)$ como $T(t)$ dependen de una sola variable no hay ambigüedad posible.

Tras la separación de variables la ecuación quedará

$$-\frac{T''}{T} = \frac{(EIZ'')'' - (NZ')'}{mZ}$$

El término de la izquierda depende exclusivamente del tiempo, mientras que el de la derecha es función únicamente de la posición. Por lo tanto la única posibilidad que se puede producir es que ambos términos sean iguales a una constante.

$$-\frac{T''}{T} = \frac{(EIZ'')'' - (NZ')'}{mZ} = \lambda^2 \Omega^2$$

Donde λ es una constante, que no puede tomar un valor cualquiera, pero que tiene infinitos valores posibles. Las condiciones de contorno de esta ecuación para un rotor articulado, de forma similar al caso de una viga apoyada simple, son

$$Z(0) = 0 \quad Z''(0) = 0 \quad Z''(R) = 0 \quad Z'''(R) = 0$$

Para un rotor flexible, a modo de viga en voladizo, las condiciones de contorno son

$$Z(0) = 0 \quad Z'(0) = 0 \quad Z''(R) = 0 \quad Z'''(R) = 0$$

Volviendo a la constante λ , el producto $\lambda^2 \Omega^2 = \omega^2$ para cada valor posible de λ será una frecuencia propia, pues la ecuación temporal es

$$T'' + \omega^2 T = 0$$

Esta ecuación necesitará unas condiciones iniciales para ser resuelta, pero no es de interés para el estudio de las vibraciones. La ecuación espacial es

$$(EIZ'')'' - (NZ')' - m\omega^2 Z = 0$$

Esta ecuación no es resoluble analíticamente debido al término de la rotación. Para resolverla se empleará el llamado Método de los modos asumidos.

Pero en una primera aproximación se pueden tomar los modos de vibración de la pala como los modos de vibración sin rotación, aunque las frecuencias sin rotación son inferiores a las frecuencias de vibración con rotación. Esto es debido a que la rotación induce una fuerza centrífuga que aumenta el esfuerzo normal sobre la pala, rigidizando la estructura.

Existe una expresión denominada expresión de Southwell, que permite obtener la frecuencia ω_n de cada modo vibración n de la pala en rotación a partir de la frecuencia de ese mismo modo sin rotación $\omega_{0,n}$, a partir de

$$\omega_n^2 = \omega_{0,n}^2 + \Omega^2 \alpha_n \quad \begin{array}{l} \bar{\Omega} \ll 1 \Rightarrow \omega_n \approx \omega_{0,n} \\ \bar{\Omega} \gg 1 \Rightarrow \omega_n \approx \Omega \sqrt{\alpha_n} \end{array}$$

En el diagrama de resonancia de Campbell, mostrado en la figura 3.8, se puede identificar a qué frecuencias de rotación del rotor pueden aparecer problemas de resonancia. Puede comprobarse en el diagrama como el aumento de la velocidad de rotación aumenta a su vez las frecuencias propias de cada modo.

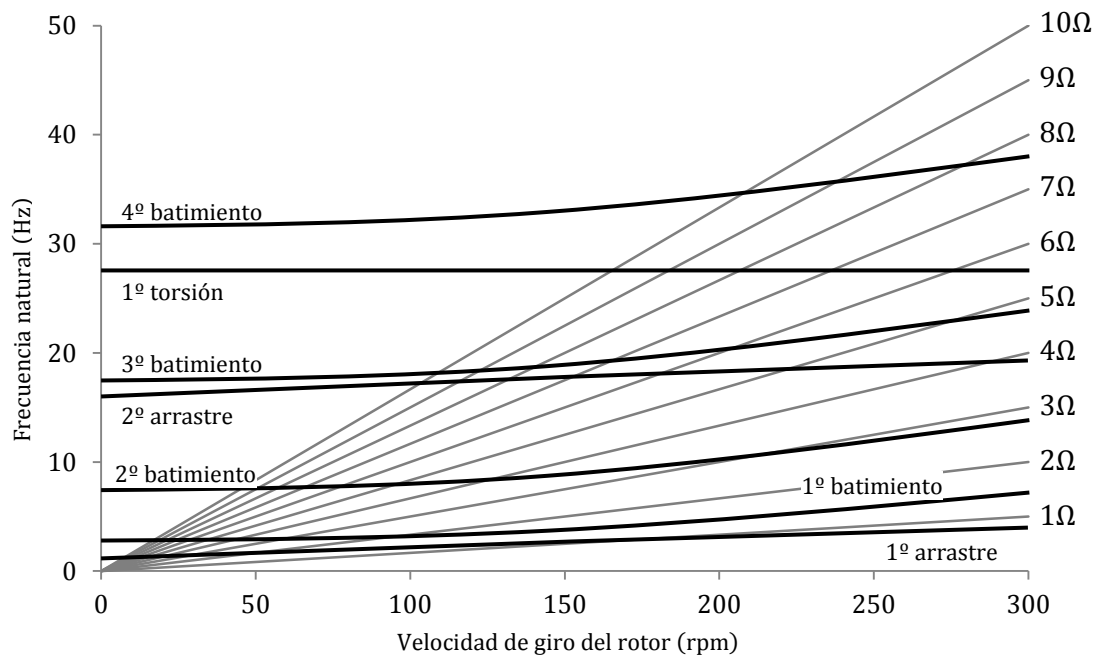


Figura 3.8. Diagrama de resonancia de Campbell.

3.15. Método de los modos asumidos

El método de los modos asumidos no es el único método para la resolución de esta ecuación, pero es el único que se estudiará en este curso. Consiste en suponer un número finito de funciones $\gamma_n(x)$, aunque haya infinitos modos, que cumplan las condiciones de contorno y que se supone aproximan la forma de los modos. Se expresarán estas funciones de forma adimensional, es decir, $x = r/R$ y $\psi = \Omega t$. Aplicando de nuevo la separación de variables la solución será de la forma

$$\bar{z}(x, \psi) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(x) \tau_i(\psi)$$

Para proceder se utilizará el método analítico de Lagrange, visto en la asignatura “Mecánica II”. Para ello será necesario obtener la expresión de la energía cinética asociada al movimiento de batimiento, denominada con la letra T .

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^R m \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dr = \frac{1}{2} \Omega^2 R^3 \int_0^1 m \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \psi} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \Omega^2 R^3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{d\tau_i}{d\psi} \frac{d\tau_j}{d\psi} \int_0^1 m \gamma_i \gamma_j dx = \\ &= \frac{1}{2} \Omega^2 R^3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_i' \tau_j' \int_0^1 m \gamma_i \gamma_j dx = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_i' \tau_j' A_{ij} \end{aligned}$$

Donde A_{ij} representa los términos de la matriz de masa generalizada. Se están utilizando como límite de integración inferior el valor $x = 0$, pero se puede aplicar también la posibilidad de un desplazamiento de la rótula.

La energía potencial se divide en dos términos $U = U_{EI} + U_N$ que son los términos de la energía interna debida a la deformación en flexión y a la de tracción, tal y como se ve en las asignaturas “Teoría de estructuras” y “Estructuras aeroespaciales”

$$\begin{aligned} U_{EI} &= \frac{1}{2} \int_0^R EI \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \right)^2 dr = \frac{1}{2R} \int_0^1 EI \left(\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2R} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_i \tau_j \int_0^1 EI \frac{d^2 \gamma_i}{dx^2} \frac{d^2 \gamma_j}{dx^2} dx \\ U_N &= \frac{1}{2} R \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_i \tau_j \int_0^1 N \frac{d\gamma_i}{dx} \frac{d\gamma_j}{dx} dx \end{aligned}$$

Finalmente

$$U = \frac{1}{2R} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_i \tau_j \int_0^1 (EI \gamma_i'' \gamma_j'' + R^2 N \gamma_i' \gamma_j') dx = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_i \tau_j B_{ij}$$

Donde B_{ij} representa los términos de la matriz de rigidez generalizada. La ecuación de Lagrange de este problema es entonces

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\tau}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \tau_i} = \frac{d}{d\psi} \left(\frac{\partial L}{\partial \tau_i'} \right) - \frac{\partial L}{\partial \tau_i} = 0$$

Donde $L = T - U$. A partir de las expresiones de las energías se llega entonces a

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\psi} \left(\frac{\partial L}{\partial \tau_i'} \right) &= \sum_{j=1}^n \tau_j'' A_{ij} \\ - \frac{\partial L}{\partial \tau_i} &= \sum_{j=1}^n \tau_j B_{ij} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_{j=1}^n (\tau_j'' A_{ij} + \tau_j B_{ij}) = 0$$

De la solución de la ecuación temporal $T'' + \lambda^2 T = 0$ se obtienen las funciones τ_j

$$\tau_j = \tau_{j0} \sin(\lambda_j \psi) \quad \tau_j'' = -\tau_{j0} \lambda_j^2 \sin(\lambda_j \psi) = -\lambda_j^2 \tau_j$$

La ecuación quedará entonces

$$\sum_{j=1}^n (B_{ij} - \lambda_j^2 A_{ij}) \tau_j = 0$$

Y para encontrar los valores propios λ_j se deberá hacer el siguiente determinante

$$\det([B] - \lambda^2[A]) = 0$$

Donde

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \Omega^2 R^3 \int_0^1 m \gamma_i \gamma_j dx \quad B_{ij} = \frac{1}{2R} \int_0^1 (EI \gamma_i'' \gamma_j'' + R^2 N \gamma_i' \gamma_j') dx$$

Donde el esfuerzo axil $N(x)$ se calcula previamente como

$$N(x) = \int_x^1 m \Omega^2 R^2 x dx$$

Cuando se encuentran los valores propios λ_i se encuentran los vectores propios τ_{j0} para cada uno de ellos resolviendo el sistema

$$([B] - \lambda_i^2[A]) \bar{\tau}^{\lambda_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{\tau}^{\lambda_i} = \begin{Bmatrix} \tau_{10}^{\lambda_i} \\ \tau_{20}^{\lambda_i} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Este sistema es indeterminado por lo que habrá que fijar alguna componente de τ . Finalmente la solución será de la forma

$$z = \begin{cases} \gamma_1 \tau_{10}^{\lambda_1} \sin \lambda_1 \Omega t & + & \gamma_1 \tau_{10}^{\lambda_2} \sin \lambda_2 \Omega t & + \dots \\ + & \gamma_2 \tau_{20}^{\lambda_1} \sin \lambda_1 \Omega t & + & \gamma_2 \tau_{20}^{\lambda_2} \sin \lambda_2 \Omega t & + \dots \\ + & \vdots & + & \vdots & + \ddots \end{cases}$$

La primera columna representa el primer modo aproximado, la segunda representa el segundo modo, etc. La frecuencia de cada modo será $\lambda_i \Omega$. Cada modo asumido γ tendrá un peso diferente en cada modo calculado, determinado por τ . Los vectores propios τ se normalizan para que $z(x=1) = 1$ para cada modo por separado.

Es habitual emplear en estos cálculos el parámetro adimensional k^2 que se define como

$$k^2 = \frac{EI}{m \Omega^2 R^4}$$

4. Vibraciones del helicóptero

4.1. Introducción

Las fuerzas aerodinámicas e inerciales que actúan sobre las palas del rotor se transmiten desde las palas al buje y después, a través del eje de rotación y el sistema de transmisión de potencia, llegan al reductor y al motor principal, de donde se transmiten al resto de la aeronave a través de los puntos de fijación del fuselaje.

Del conocimiento de los fenómenos de vibración en el rotor principal se derivan criterios de diseño dirigidos a

- Minimizar la existencia de vibraciones en las palas y su transmisión al buje, para lo que hay que conocer cómo se combinan las acciones excitantes resultantes sobre el rotor.
- Minimizar la transmisión de las vibraciones desde el tren de potencia al fuselaje, para lo que hay que conocer los mecanismos de transmisión de las excitaciones al fuselaje.
- Añadir sistemas que alivien las vibraciones existentes.

4.2. Fuerzas resultantes sobre el buje

En primer lugar se estudiará la transmisión de la fuerza resultante sobre todas las palas al buje. Se emplearán dos sistemas de referencia. El primero es un sistema de ejes cuerpo, fijo a la aeronave x, y, z , y el segundo ligado a la articulación de la pala con el buje 1, 2, 3, tal y como muestra la figura 4.1.

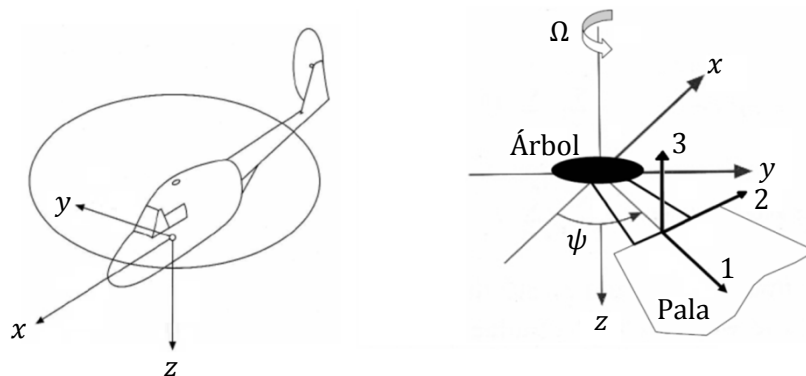


Figura 4.1. Sistemas de referencia empleados.

La pala k -ésima tendrá una posición respecto al sistema de ejes cuerpo ψ_k , definido por

$$\psi_k = \psi + \frac{2\pi}{b}(k - 1)$$

La fuerza resultante en la raíz de esa pala k , definida en cada componente i de los ejes ligados a ella será

$$R_{ik} = R_{ik}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (R_{ik}^{nc} \cos n\psi_k + R_{ik}^{ns} \sin n\psi_k)$$

Para expresar esta fuerza en los ejes cuerpo bastará con aplicarles un giro según el ángulo ψ_k .

$$\begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \psi_k & \sin \psi_k & 0 \\ \sin \psi_k & \cos \psi_k & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{1k} \\ R_{2k} \\ R_{3k} \end{bmatrix}$$

Y la fuerza resultante sobre el buje será la debida a todas las palas

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^b \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}$$

Se estudiará ahora un caso particular y sencillo para facilitar la visualización del fenómeno que se produce. Se trata de un caso de un rotor de dos palas, con vibraciones fuera del plano del rotor, es decir, en la dirección z . Se considera que todas las palas del rotor son iguales entre ellas. Para simplificar el cálculo se tomarán únicamente los dos primeros términos de la serie de Fourier con la que se define la fuerza resultante sobre la raíz de la pala, de modo que para la primera pala se tendrá, en el eje 3, paralelo a z , la siguiente resultante

$$R_{31} = R_3^0 + R_3^{1c} \cos \psi + R_3^{2c} \cos 2\psi + R_3^{1s} \sin \psi + R_3^{2s} \sin 2\psi$$

Dado que ambas palas son iguales entonces compartirán los términos.

$$R_{32} = R_3^0 + R_3^{1c} \cos(\psi + \pi) + R_3^{2c} \cos 2(\psi + \pi) + R_3^{1s} \sin(\psi + \pi) + R_3^{2s} \sin 2(\psi + \pi)$$

Y aplicando las relaciones trigonométricas para ángulos suma se puede reescribir

$$R_{32} = R_3^0 - R_3^{1c} \cos \psi + R_3^{2c} \cos 2\psi - R_3^{1s} \sin \psi + R_3^{2s} \sin 2\psi$$

La resultante de las fuerzas en el eje vertical, que no se ve afectado por el giro, será entonces la suma de R_{31} y R_{32}

$$Z = 2R_3^0 + 2R_3^{2c} \cos 2\psi + 2R_3^{2s} \sin 2\psi$$

Este resultado es muy importante. De todas las excitaciones que se producen en la dirección vertical, únicamente se transmiten al resto del fuselaje ciertos armónicos, y si se realiza el mismo estudio para cualquier otro número de palas, se comprobará que solamente se transmitirán al fuselaje las fuerzas verticales con armónicos múltiplos del número de palas nb . El mismo estudio para las fuerzas de arrastre resulta en que solo se transmiten las fuerzas múltiplos del número de palas más y menos uno, es decir $nb \pm 1$.

El tipo de rotor que se escoja afectará significativamente a las vibraciones, no sólo debido al número de palas, sino también al tipo de unión entre la pala y el buje, así como el material de que se fabrican. A día de hoy las palas se fabrican de material compuesto, que permite modificar la rigidez para ciertas direcciones y variar la distribución de masa e inercia a lo largo o ancho de la pala.

Dicho sea de paso, la fabricación de la pala tiene también en cuenta consideraciones como la protección del borde de ataque frente a degradación, mediante el uso de recubrimientos metálicos o plásticos.

4.3. Atenuación de vibraciones – Introducción

Para minimizar las fuerzas vibratorias que se transmiten al fuselaje se pueden utilizar diferentes estrategias:

- Sistemas pasivos de montaje del conjunto rotor/reductor/motor.
- Sistemas absorbentes de vibraciones. Pueden ser
 - ◆ Globales, reducen la vibración en todo el aparato, montados en el buje o las palas.
 - ◆ Locales, actúan sobre una zona concreta sobre la que están montados.
- Control activo de las vibraciones, no se estudia en este curso.

4.4. Atenuación de vibraciones – Sistemas pasivos

Los sistemas de atenuación de vibraciones pasivos se basan en los principios básicos de transmisión de vibraciones, ilustrados en la figura 4.2.

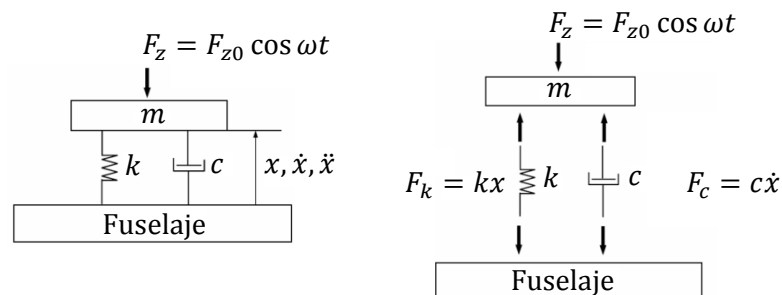


Figura 4.2. Principios básicos de la transmisión de vibraciones.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{z0} \cos \omega t \quad x = x_0 \cos(\omega t - \varepsilon)$$

$$\frac{x_0}{F_{z0}} = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \quad \varepsilon = \operatorname{atan} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

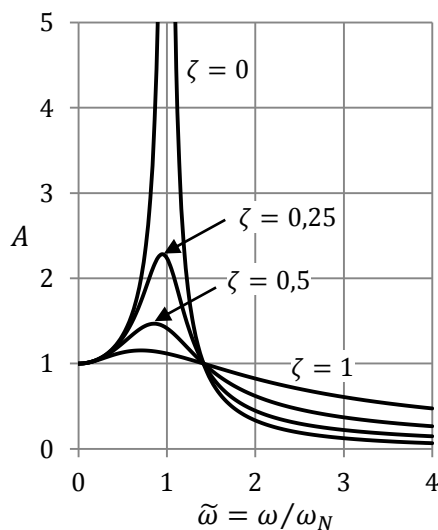


Figura 4.3. Factor de transmisión A.

En la figura 4.3 se muestra la variación del factor de transmisión con la frecuencia. La fuerza que se transmite al fuselaje se reducirá si aumenta la relación entre la frecuencia de excitación ω y la frecuencia natural del sistema ω_N .

La fuerza sobre el fuselaje F'_z será

$$F'_z = kx + c\dot{x} = F'_{z0} \cos(\omega t - \phi)$$

La relación entre la fuerza sobre el fuselaje y la fuerza ejercida por el rotor es

$$A = \frac{F'_{z0}}{F_{z0}} = \frac{1 + (2\zeta\tilde{\omega})^2}{\sqrt{(1 - \tilde{\omega}^2)^2 + (2\zeta\tilde{\omega})^2}} \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Un primer sistema para disminuir las vibraciones sería una unión blanda entre el sistema motriz y el resto del fuselaje, disminuyendo la rigidez de la unión mediante muelles o elastómeros, y se reduce la amplitud de los desplazamientos. Sin embargo, la reducción de las vibraciones es modesta y algunas excitaciones no se atenúan en absoluto.

Un sistema ligeramente más complejo es el DAVI (*Dynamic Anti-resonant Vibration Isolator*) que consiste en situar, entre el sistema motriz y el fuselaje, un resorte y un brazo rígido con una pequeña masa en la punta, como se esquematiza en la figura 4.4.

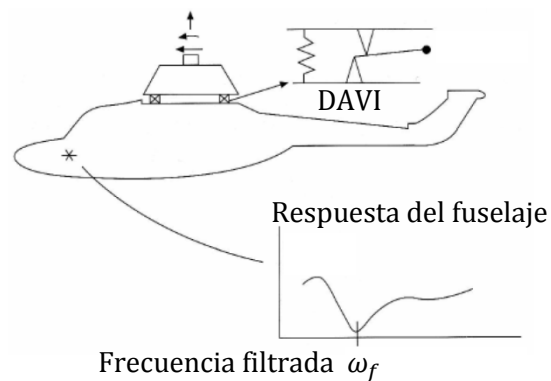


Figura 4.4. Sistema DAVI.

Las características del sistema DAVI son

- Proporciona una atenuación muy elevada de las vibraciones del fuselaje para un rango estrecho de frecuencias, habitualmente hacia las velocidades de giro del rotor.
- El balance entre rango de frecuencias filtradas y atenuación se consigue mediante la amortiguación del sistema.
- La frecuencia filtrada es poco sensible a las variaciones de masa del fuselaje.

A continuación se expone el análisis de este sistema.

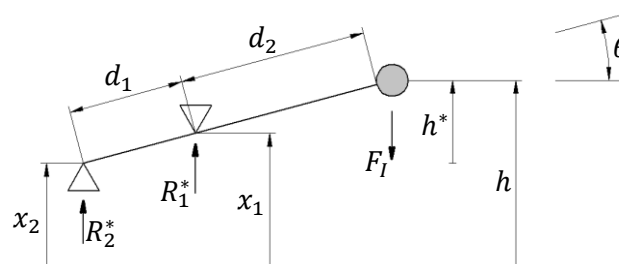


Figura 4.5. Coordenadas del sistema de la masa oscilante.

Se considerará x_1 el desplazamiento del conjunto rotor – motor, x_2 el desplazamiento del fuselaje y h el desplazamiento de la masa oscilante. Algunas relaciones geométricas son

$$\sin \theta = \frac{x_1 - x_2}{d_1} = \frac{h^*}{d_1 + d_2} \quad \lambda = \frac{d_2}{d_1}$$

$$h^* = (x_1 - x_2) \left(\frac{d_1 + d_2}{d_1} \right) \quad h = h^* + x_2 \Rightarrow h = x_1(1 + \lambda) - x_2\lambda$$

Las fuerzas que actúan en el sistema global son las que se muestran en la figura 4.6.

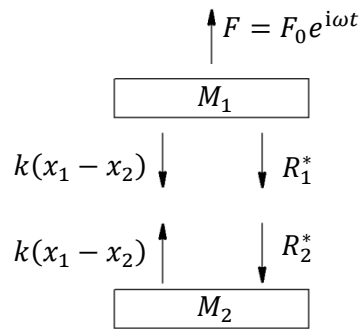


Figura 4.6. Fuerzas sobre el sistema

Por equilibrio de momentos en el punto 1 y en el punto 2 se obtiene

$$R_2^* d_1 + F_I \cdot d_2 = 0 \Rightarrow R_2^* = -F_I \frac{d_2}{d_1} = -m\ddot{h}\lambda$$

$$R_1^* d_1 - F_I (d_1 + d_2) = 0 \Rightarrow R_1^* = F_I \frac{d_1 + d_2}{d_1} = m\ddot{h}(1 + \lambda)$$

Donde F_I es la fuerza de inercia sobre la masa m . Sobre la masa superior se tiene

$$M_1 \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - R_1^* + F_0 e^{i\omega t}$$

Lo que se está buscando es que la fuerza del rotor $F_0 e^{i\omega t}$ no alcance el fuselaje. Para el fuselaje el equilibrio de fuerzas resulta en

$$M_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - R_2^*$$

Para resolver este sistema se buscarán soluciones de la forma

$$x_1 = x_{10} e^{i\omega t} \quad x_2 = x_{20} e^{i\omega t}$$

Estas ecuaciones diferenciales se expresan entonces de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 [M_1 + m(1 + \lambda)^2] + k & m(1 + \lambda)\lambda\omega^2 - k \\ m(1 + \lambda)\lambda\omega^2 - k & -\omega^2 [M_2 + m\lambda^2] + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para la segunda ecuación se puede encontrar una relación entre x_1 y x_2 .

$$x_1 = x_2 \frac{k - \omega^2 (M_2 + m\lambda^2)}{k - m\omega^2 (1 + \lambda)\lambda}$$

Y finalmente puede obtenerse

$$\frac{x_2}{F_0} = \frac{1 - \bar{\omega}^2 \mu (1 + \lambda)\lambda}{(1 - \bar{\omega}^2 [1 + \mu(1 + \lambda)^2])(1 - \bar{\omega}^2 [\rho + \mu\lambda^2]) - (1 - \bar{\omega}^2 \mu [1 + \lambda]\lambda)^2}$$

$$\bar{\omega}^2 = \omega^2 \frac{M_1}{k} \quad \rho = \frac{M_2}{M_1} \quad \mu = \frac{m}{M_1}$$

Las frecuencias de resonancia pueden encontrarse haciendo $x_2/F_0 \rightarrow \infty$. Para ello el denominador debe anularse, de forma que se obtienen las frecuencias

$$\bar{\omega}_1 = 0 \quad \bar{\omega}_2 = \sqrt{\frac{1 + \mu(1 + \lambda)^2 + \rho + \mu\lambda^2 - 2\mu(1 + \lambda)\lambda}{\rho + \mu\lambda^2 + \mu\rho(1 + \lambda)^2}}$$

Para que el fuselaje no vibre habrá que igualar el numerador a 0, obteniendo $\bar{\omega}_3$

$$\bar{\omega}_3 = \sqrt{\frac{1}{\mu(1 + \lambda)\lambda}}$$

La frecuencia que el sistema DAVI filtra es insensible al valor de la masa del fuselaje M_2 , y además para una misma frecuencia se puede disminuir la masa m a costa de aumentar la distancia a la que se sitúa, aunque de forma limitada, pues de alargarla demasiado habría que empezar a considerar la flexión de la barra.

El sistema *Nodamatic* es equivalente al sistema DAVI con la salvedad de que la rigidez viene dada por la barra de unión y la masa es la de la barra misma, más otras posibles masas que se pueden añadir.

4.5. Atenuación de vibraciones – Sistemas absorbentes de vibraciones

Como ya se ha comentado, algunos sistemas absorbentes de vibraciones se utilizan para eliminar las vibraciones de todo el fuselaje, otros sólo se centran en una parte del fuselaje. Algunos están montados en el buje y otros en la pala.

- Péndulo centrífugo bifilar

Consiste en unos péndulos centrífugos unidos al buje. Cada péndulo puede filtrar una frecuencia que varía con la velocidad de giro del rotor, es decir, es autoajutable. Además puede combinarse más de uno para filtrar varias frecuencias. La masa del péndulo oscila en arrastre, filtrando frecuencias en el plano del rotor. Requiere un mantenimiento elevado.

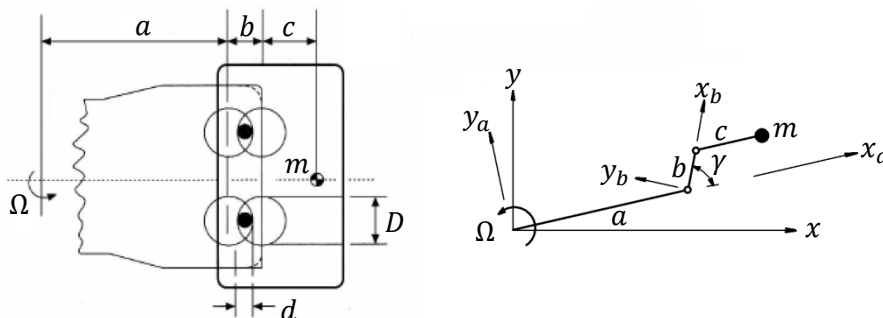


Figura 4.7. Péndulo centrífugo bifilar esquematizado.

La fuerza centrífuga sobre la masa es, en ejes x_a, y_a

$$\vec{F}_{ca} = m\Omega^2 \begin{Bmatrix} a + b \cos \gamma + c \\ b \sin \gamma \end{Bmatrix} \approx m\Omega^2 \begin{Bmatrix} a + b + c \\ b\gamma \end{Bmatrix}$$

Donde se ha considerado que el ángulo γ es pequeño. En ejes x_b, y_b esta fuerza será

$$\vec{F}_{Cb} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \vec{F}_{Ca} \approx m\Omega^2 \begin{Bmatrix} a + b + c \\ (-a - c)\gamma \end{Bmatrix}$$

Se ha simplificado $\gamma^2 \ll 1$. La aceleración de la masa en la base x_b, y_b es

$$m\vec{a}_b = m \begin{Bmatrix} -\dot{\gamma}^2 b \\ \dot{\gamma} b \end{Bmatrix}$$

Aplicando la segunda ley de Newton en el eje y_b se obtiene la frecuencia filtrada

$$(-a - c)\Omega^2 \gamma = \dot{\gamma} b \Rightarrow \dot{\gamma} + \Omega^2 \frac{a + c}{b} \gamma = 0 \Rightarrow \omega_n^2 = \Omega^2 \frac{a + c}{b} = \Omega^2 \frac{a + c}{D - d}$$

- *Flexispring*

Consiste en un conjunto de resortes unidos a una carcasa de masa considerable que puede vibrar tanto verticalmente como de forma radial y en arrastre. La masa de la carcasa es ajustable y de ella depende la frecuencia filtrada. No requiere mantenimiento.

- PENDAB

El sistema PENDAB consiste en un péndulo simple que puede vibrar en batimiento, evitando que lo haga la pala a ciertas frecuencias, reduciendo vibraciones en el fuselaje y en la pala, tanto en el plano de rotación como perpendiculares al mismo.

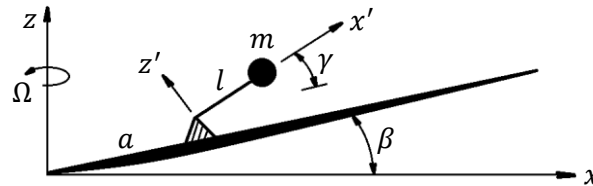


Figura 4.8. Sistema PENDAB.

El análisis matemático es casi idéntico al del péndulo centrífugo bifilar. La fuerza centrífuga que experimenta la masa es, considerando ángulos pequeños y la base x, z

$$\vec{F}_c = m\Omega^2 \begin{Bmatrix} a \cos \beta + l \cos \beta \cos \gamma \\ 0 \end{Bmatrix} \approx m\Omega^2 \begin{Bmatrix} a + l \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La fuerza centrífuga y la aceleración de la masa en la base x', z' serán

$$\vec{F}'_c = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \vec{F}_c \approx m\Omega^2 \begin{Bmatrix} a + l \\ -\gamma(a + l) \end{Bmatrix} \quad m\vec{a}' = m \begin{Bmatrix} -\dot{\gamma}^2 l \\ \dot{\gamma} l \end{Bmatrix}$$

Aplicando la segunda ley de Newton en el eje z' se obtiene la frecuencia filtrada

$$-\gamma(a + l)\Omega^2 = \dot{\gamma} l \Rightarrow \dot{\gamma} + \Omega^2 \frac{a + l}{l} \gamma = 0 \Rightarrow \omega_n^2 = \Omega^2 \frac{a + l}{l}$$

Como el péndulo centrífugo, el sistema PENDAB también es autoajutable.

- Resonador harmónico

El resonador harmónico es un absorbente de vibraciones local. Se monta sobre un punto del fuselaje para reducir las vibraciones localmente, por ejemplo en la zona de la tripulación o de la carga. La misma carga puede actuar como resonador harmónico en ocasiones.

Consiste en un conjunto masa – muelle sintonizado a una frecuencia determinada, habitualmente $b\Omega$, que no es autoajutable. Como elemento resonante se puede emplear tanto una masa muerta específica para esta función, como algún elemento pesado a bordo, tipo carga o similar. Se busca que el amortiguamiento del sistema sea mínimo para maximizar la resonancia de esta masa. El análisis matemático es el que sigue

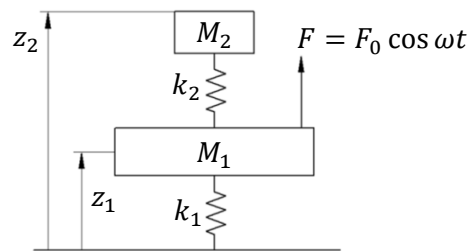


Figura 4.9. Resonador harmónico esquematizado.

Equilibrando las fuerzas verticales en ambas masas se obtiene el sistema

$$\left. \begin{aligned} M_1 \ddot{z}_1 &= F_0 - k_1 z_1 - k_2(z_1 - z_2) \\ M_2 \ddot{z}_2 &= -k_2(z_2 - z_1) \end{aligned} \right\}$$

Utilizando las soluciones que se indican el sistema queda

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= z_{10} \cos \omega t & -M_1 \omega^2 z_{10} &= F_0 - k_1 z_{10} - k_2(z_{10} - z_{20}) \\ z_2 &= z_{20} \cos \omega t & -M_2 \omega^2 z_{20} &= -k_2(z_{20} - z_{10}) \end{aligned} \right\}$$

De la segunda ecuación se obtiene

$$z_{20} = \frac{k_2}{k_2 - M_2 \omega^2} z_{10}$$

Y restando ambas ecuaciones, sustituyendo el valor de z_{20} , se tiene

$$\left(\frac{k_2 M_2 \omega^2}{k_2 - M_2 \omega^2} + k_1 - M_1 \omega^2 \right) z_{10} = F_0$$

Despejando z_{10} se llega finalmente a la expresión

$$z_{10} = F_0 \frac{k_2 - M_2 \omega^2}{k_2 M_2 \omega^2 + (k_1 - M_1 \omega^2)(k_2 - M_2 \omega^2)}$$

De esta última ecuación puede deducirse que si $k_2/M_2 = \omega^2$ entonces $z_{10} = 0$, es decir, el fuselaje no vibrará a esa frecuencia.

5. Estabilidad y control

5.1. Planteamiento general

El objetivo del estudio de la estabilidad y el control es conocer la maniobrabilidad de un helicóptero. En el fondo consiste en tres problemas:

- Equilibrado – Determinación de la actitud de un helicóptero para una condición de vuelo dada.
- Estabilidad – Determinación la respuesta del helicóptero después de una perturbación en la posición de equilibrio.
- Control – Determinación de la respuesta del helicóptero tras una acción sobre los mandos de control.

Estos problemas son similares a los que ya se vieron en la asignatura “Mecánica del vuelo” para el caso de aviones. Para plantear las ecuaciones de estos problemas se emplearán los ejes cuerpo del helicóptero, pues simplifica las expresiones de las fuerzas y las inercias, aunque debe tenerse en cuenta que se trata de un sistema no inercial.

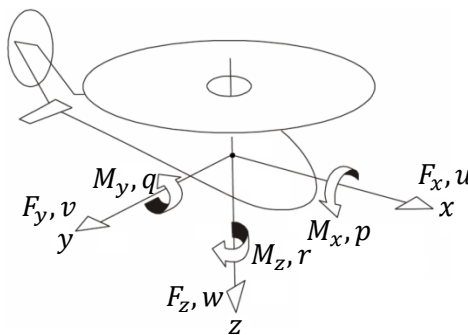


Figura 5.1. Sistema de ejes cuerpo empleado.

Las hipótesis generales que se aplican al estudio de la estabilidad y el control son

- El helicóptero se considera un sólido rígido.
- La posición del centro de masas del helicóptero es fija en ejes cuerpo.
- La dinámica asociada a otros efectos diferentes del movimiento del helicóptero se consideran mucho más rápidos que la dinámica de vuelo, es decir, las fuerzas y momentos externos se consideran casi-estacionarios. Por ejemplo, si se produce una perturbación sobre el ángulo de paso cíclico el rotor se inclina hacia adelante en un tiempo muy corto en comparación con el movimiento subsiguiente de la aeronave.
- El movimiento del helicóptero se describe con seis grados de libertad, tres movimientos de traslación u, v, w y tres movimientos de rotación p, q, r .
- El helicóptero es simétrico respecto al plano x, z .

Para determinar los seis grados de libertad se dispone de tres ecuaciones de fuerzas y tres ecuaciones de momentos, en forma vectorial.

$$\vec{F} + m\vec{g} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + m(\vec{\omega} \times \vec{v}) \quad (1)$$

$$\vec{M} = \vec{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) \quad (2)$$

La actitud del helicóptero viene dada por los ángulos de balance Φ , cabeceo Θ y guiñada Ψ , llamados ángulos de Euler, de forma que la velocidad angular del helicóptero se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + q \sin \Phi \tan \Theta + r \cos \Phi \tan \Theta \\ q \cos \Theta - r \sin \Phi \\ q \frac{\sin \Phi}{\cos \Theta} + r \frac{\cos \Phi}{\cos \Theta} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Se define entonces un nuevo vector de incógnitas llamado vector de control \vec{u} , con el ángulo de paso colectivo, el ángulo de paso cíclico longitudinal, el ángulo de paso cíclico lateral y el ángulo de paso colectivo del rotor de cola.

$$\vec{u} = [\theta_0, \theta_{1s}, \theta_{1c}, \theta_{0t}]$$

Se define también el vector de estado \vec{x} que representará la situación del helicóptero.

$$\vec{x} = [u, v, w, p, q, r, \Phi, \Theta, \Psi]$$

La relación entre el vector de control y el vector de estado la darán las seis ecuaciones arriba mencionadas, junto con la relación entre los ángulos de Euler y las velocidades angulares.

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = G(\vec{x}(t), \vec{u}(t))$$

Esto se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{u} &= rv - qw + \frac{F_x}{m} - g \sin \Theta & \dot{p} &= k_1 pq - k_2 rq + M_x^* \\ \dot{v} &= pw - ru + \frac{F_y}{m} + g \cos \Theta \sin \Phi & \dot{q} &= \frac{I_z - I_x}{I_y} pr + \frac{I_{xz}}{I_y} (r^2 - p^2) + \frac{M_y}{I_y} \\ \dot{w} &= qu - pv + \frac{F_z}{m} + g \cos \Theta \cos \Phi & \dot{r} &= -k_3 pq - k_1 rq + M_z^* \\ \dot{\Phi} &= p + q \sin \Phi \tan \Theta + r \cos \Phi \tan \Theta \\ \dot{\Theta} &= q \cos \Theta - r \sin \Phi \\ \dot{\Psi} &= \frac{q \sin \Phi + r \cos \Phi}{\cos \Theta} \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{I_{xz}(I_z + I_z - I_y)}{I_x I_z - I_{xz}^2} & k_2 &= \frac{I_z(I_z - I_y) + I_{xz}^2}{I_x I_z - I_{xz}^2} & k_3 &= \frac{I_x(I_y - I_x) - I_{xz}^2}{I_x I_z - I_{xz}^2} \\ M_x^* &= \frac{I_z}{I_x I_z - I_{xz}^2} M_x + \frac{I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} M_z & M_z^* &= \frac{I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} M_x + \frac{I_z}{I_x I_z - I_{xz}^2} M_z \end{aligned}$$

El problema de equilibrio consiste en resolver estas ecuaciones en vuelo estacionario, es decir $\dot{\vec{x}}(t) = 0$. El problema de estabilidad consiste en analizar lo que sucede cuando el vector de estado sufre una perturbación $\vec{x} + \Delta \vec{x}$ y el de control, de forma similar, analiza pequeñas variaciones del vector de control $\vec{u} + \Delta \vec{u}$.

5.2. Equilibrado del helicóptero

El problema de equilibrado consiste en, para una determinada configuración y condición de vuelo, encontrar la posición de los controles del helicóptero, la inclinación del rotor y la orientación del helicóptero.

La condición de vuelo en equilibrio es una situación de vuelo estacionario, y debe conseguirse el equilibrio de fueras en los tres ejes. Existe un grado muy elevado de acoplamiento entre las fuerzas y momentos sobre el helicóptero como consecuencia de la actuación sobre los controles, lo que supone la necesidad de aplicar un procedimiento iterativo para resolver el sistema.

Algunas ecuaciones e incógnitas desaparecen debido a que el problema es estacionario. Las tres ecuaciones de los ángulos de Euler se convierten en una identidad, y el vector de estado se reduce en tres variables, puesto que $p = q = r = 0$. En total hay 10 parámetros a determinar con 6 ecuaciones, de modo que es necesario conocer 4 variables de estado de antemano.

Hay más variables en el problema, por ejemplo las fuerzas aerodinámicas dependerán de la velocidad inducida y los ángulos de batimiento, y también las acciones del fuselaje y las fuerzas del rotor de cola dependen de otras variables. Estas otras variables se obtienen de la teoría de la cantidad de movimiento o de modelos numéricos más complejos, pero en todos los casos es necesario resolver por un método iterativo.

Las consideraciones generales para llevar a cabo la resolución del problema son

- Condición de vuelo determinada por la velocidad u, v, w y por el ángulo de actitud Ψ .
- Se descomponen las acciones exteriores en sus diferentes componentes.
- El sistema de referencia es el plano central (*hub plane* o HP).
- Se consideran ángulos pequeños.
- Se suponen velocidades inducidas constantes en el plano del rotor.
- El ángulo de deslizamiento es nulo, es decir, la fuerza lateral es nula.

5.3. Estabilidad estática

El problema de estabilidad consiste en analizar la respuesta del helicóptero cuando a partir de una condición de vuelo en equilibrio se produce una perturbación del vector de estado, generando fuerza y momentos que desestabilizan la condición de equilibrio y provocan una evolución temporal del vector de estado.

$$\vec{x} = \vec{x}_e + \Delta\vec{x}(t) \quad \Delta\vec{x}(0) = \Delta\vec{x}_0 \quad \vec{u} = \vec{u}_e$$

La estabilidad estática estudia el sistema de fuerzas y momentos de desequilibrio asociados a la perturbación en el instante inicial. En un helicóptero el problema es complejo porque existen partes móviles con su propia dinámica. Si se suponen perturbaciones pequeñas y se analizan instantes inmediatamente posteriores a la perturbación la estabilidad se convierte en un sistema de ecuaciones linealizado en torno a la condición de equilibrio.

Se linealiza aquí a modo de ejemplo la ecuación de la aceleración en x .

$$\dot{u} = rv - qw + \frac{F_x}{m} - g \sin \Theta$$

Se trata de expresar todas las variables de esta ecuación como la suma del valor en equilibrio más una perturbación

$$\begin{aligned} \dot{u}_e + \Delta \dot{u} = & (r_e + \Delta r)(v_e + \Delta v) - (q_e + \Delta q)(w_e + \Delta w) - \\ & -g \sin(\Theta_e + \Delta\Theta) + \frac{F_x}{m} \Big|_{\vec{x}_e, \vec{u}_e} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_x}{\partial x_i} \frac{1}{m} \Big|_{\vec{x}_e, \vec{u}_e} \Delta \vec{x}_i \end{aligned}$$

En la posición de equilibrio los términos \dot{u}_e , r_e y q_e son nulos. El término $\sin(\Theta_e + \Delta\Theta)$ se desarrolla como

$$\sin(\Theta_e + \Delta\Theta) = \sin \Theta_e \cos \Delta\Theta + \cos \Theta_e \sin \Delta\Theta \approx \sin \Theta_e + \cos \Theta_e \cdot \Delta\Theta$$

Si la ecuación original se aplica a la situación de equilibrio se comprueba que dos términos pueden eliminarse

$$0 = \frac{F_x}{m} \Big|_{\vec{x}_e, \vec{u}_e} - g \sin \Theta_e$$

De forma que la ecuación linealizada queda

$$\Delta \dot{u} = v_e \Delta r - w_e \Delta q + \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_x}{\partial x_i} \frac{1}{m} \Big|_{\vec{x}_e, \vec{u}_e} \Delta \vec{x}_i - g \cos \Theta_e \cdot \Delta\Theta$$

En forma vectorial

$$\Delta \dot{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial u} \\ \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial v} \\ \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial w} \\ \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial p} \\ \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial q} - w_e \\ \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial r} + v_e \\ \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial \Phi} \\ \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial \Theta} - g \cos \Theta \\ \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial \Psi} \end{pmatrix}_e^T \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \\ \Delta \Phi \\ \Delta \Theta \\ \Delta \Psi \end{pmatrix}$$

El primer vector está evaluado en el equilibrio.

Se pueden escribir ecuaciones similares para el resto de variables de estado. El problema de estabilidad viene dado entonces por la ecuación diferencial $\Delta \dot{\vec{x}} = [A] \cdot \Delta \vec{x}$, es decir

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{c}
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial u} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial u} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial u} \\
 \frac{\partial M_x^*}{\partial u} \\
 \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial u} \\
 \frac{\partial M_z^*}{\partial u}
 \end{array} \right\} \Delta \dot{u} \\
 \left. \begin{array}{c}
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial v} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial v} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial v} \\
 \frac{\partial M_x^*}{\partial v} \\
 \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial v} \\
 \frac{\partial M_z^*}{\partial v}
 \end{array} \right\} \Delta \dot{v} \\
 \left. \begin{array}{c}
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial w} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial w} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial w} \\
 \frac{\partial M_x^*}{\partial w} \\
 \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial w} \\
 \frac{\partial M_z^*}{\partial w}
 \end{array} \right\} \Delta \dot{w} \\
 \left. \begin{array}{c}
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial p} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial p} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial p} \\
 \frac{\partial M_x^*}{\partial p} \\
 \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial p} \\
 \frac{\partial M_z^*}{\partial p}
 \end{array} \right\} \Delta \dot{p} \\
 \left. \begin{array}{c}
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial q} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial q} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial q} \\
 \frac{\partial M_x^*}{\partial q} \\
 \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial q} \\
 \frac{\partial M_z^*}{\partial q}
 \end{array} \right\} \Delta \dot{q} \\
 \left. \begin{array}{c}
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial r} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial r} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial r} \\
 \frac{\partial M_x^*}{\partial r} \\
 \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial r} \\
 \frac{\partial M_z^*}{\partial r}
 \end{array} \right\} \Delta \dot{r} \\
 \left. \begin{array}{c}
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial \Phi} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial \Phi} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial \Phi} \\
 \frac{\partial M_x^*}{\partial \Phi} \\
 \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial \Phi} \\
 \frac{\partial M_z^*}{\partial \Phi}
 \end{array} \right\} \Delta \dot{\Phi} \\
 \left. \begin{array}{c}
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial \Theta} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial \Theta} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial \Theta} \\
 \frac{\partial M_x^*}{\partial \Theta} \\
 \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial \Theta} \\
 \frac{\partial M_z^*}{\partial \Theta}
 \end{array} \right\} \Delta \dot{\Theta} \\
 \left. \begin{array}{c}
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial \Psi} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial \Psi} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial \Psi} \\
 \frac{\partial M_x^*}{\partial \Psi} \\
 \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial \Psi} \\
 \frac{\partial M_z^*}{\partial \Psi}
 \end{array} \right\} \Delta \dot{\Psi}
 \end{array} = \left[\begin{array}{cccccccc}
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial u} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial v} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial w} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial p} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial q} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial r} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial \Phi} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial \Theta} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial u} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial v} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial w} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial p} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial q} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial r} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial \Phi} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial \Theta} \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial u} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial v} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial w} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial p} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial q} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial r} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial \Phi} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial \Theta} \\
 \frac{\partial M_x^*}{\partial u} & \frac{\partial M_x^*}{\partial v} & \frac{\partial M_x^*}{\partial w} & \frac{\partial M_x^*}{\partial p} & \frac{\partial M_x^*}{\partial q} & \frac{\partial M_x^*}{\partial r} & \frac{\partial M_x^*}{\partial \Phi} & \frac{\partial M_x^*}{\partial \Theta} \\
 \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial u} & \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial v} & \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial w} & \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial p} & \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial q} & \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial r} & \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial \Phi} & \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial \Theta} \\
 \frac{\partial M_z^*}{\partial u} & \frac{\partial M_z^*}{\partial v} & \frac{\partial M_z^*}{\partial w} & \frac{\partial M_z^*}{\partial p} & \frac{\partial M_z^*}{\partial q} & \frac{\partial M_z^*}{\partial r} & \frac{\partial M_z^*}{\partial \Phi} & \frac{\partial M_z^*}{\partial \Theta} \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \sin \Phi \tan \Theta & \cos \Phi \tan \Theta & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sin \Phi}{\cos \Theta} & \frac{\cos \Phi}{\cos \Theta} & 0 & 0
 \end{array} \right] \begin{array}{c}
 \Delta u \\
 \Delta v \\
 \Delta w \\
 \Delta p \\
 \Delta q \\
 \Delta r \\
 \Delta \Phi \\
 \Delta \Theta \\
 \Delta \Psi
 \end{array}$$

La matriz $[A]$ es la matriz de estabilidad, y está compuesta por las llamadas derivadas de estabilidad, que representan la sensibilidad de cada fuerza o momento a una perturbación de cada una de las componentes del vector de estado, evaluadas en la condición de equilibrio.

Para simplificar los innumerables casos posibles, se supondrá un helicóptero con el centro de masas alineado con el eje de giro, rotor articulado y sin excentricidad de la articulación de batimiento.

Existen 54 derivadas de estabilidad, pero se puede demostrar que todas las derivadas de estabilidad relacionadas con los ángulos de Euler son nulas, lo que deja un total de 36.

Se realizará un análisis cualitativo de las derivadas de estabilidad más importantes, a saber

$$F_{xu}, F_{xw}, F_{yv}, F_{zw}, M_{xv}, M_{xp}, M_{xq}, M_{xr}, M_{yu}, M_{yw}, M_{yq}, M_{zv}, M_{zr}$$

Es decir, se estudiará el comportamiento del helicóptero en función del signo de estas derivadas de estabilidad, de forma similar a lo que se hace para un avión en la asignatura de "Mecánica del vuelo".

Desde este punto de vista el helicóptero podrá ser, ante cada una de las perturbaciones, estáticamente estable, si el sistema de fuerzas y momentos trata de restaurar el equilibrio, estáticamente inestable si el sistema de fuerzas y momentos no trata de volver al equilibrio, o indiferente si el sistema de fuerzas y momentos se mantiene inalterado.

Por ejemplo, para F_{xu} , por la parte del fuselaje una perturbación que haga aumentar la velocidad Δu provoca un aumento de la resistencia, que va en sentido contrario al eje x , por lo tanto en lo que al fuselaje respecta $F_{xu} < 0$. En lo que respecta al rotor se tiene que éste adquirirá una situación de máximo batimiento en 180° y de mínimo batimiento en 0° debido a que la tracción aumenta a 90° y un defecto de tracción a 270° . En resumen el rotor queda inclinado hacia atrás y, como la tracción es perpendicular al plano de puntas, también la tracción queda inclinada hacia atrás, por lo que $F_{xu} < 0$. Esta situación es estable, porque hace que la perturbación disminuya.

La inclinación del rotor provoca un brazo de palanca de la tracción respecto al centro de masas del rotor, lo que implica que $\partial M_y / \partial u > 0$, también estable. De forma similar pueden deducirse F_{yv} y M_{xv} .

Si se produce una perturbación en la velocidad w aumentará la tracción y por lo tanto $F_{zw} < 0$.

La fuerza F_{xw} depende de la posición de vuelo en equilibrio, en vuelo en avance es negativa, pero en vuelo a punto fijo es nula.

Un incremento de la velocidad v disminuye la tracción producida por el rotor antipar, lo que provoca $M_{zv} > 0$, hecho que hace disminuir la perturbación y por lo tanto es estabilizador. Pero según la posición del rotor antipar respecto a la horizontal del centro de masas, el momento M_{xv} puede ser positivo, nulo o negativo.

5.4. Estabilidad dinámica

La estabilidad dinámica estudia el movimiento del helicóptero que sigue a una perturbación de su posición de equilibrio.

Desde este punto de vista un helicóptero puede ser dinámicamente estable si tras la perturbación el movimiento del helicóptero es convergente, inestable si es divergente y neutro si se mantiene con una amplitud constante.

Matemáticamente consiste en resolver el sistema de ecuaciones diferenciales linealizado

$$\Delta \dot{\vec{x}} - [A]\Delta \vec{x} = 0$$

Donde $[A]$ es la matriz de derivadas de estabilidad. Suponiendo soluciones de la forma $\Delta \vec{x} = \Delta \vec{x}_0 \cdot e^{\lambda t}$ se puede resolver el problema obteniendo los autovalores o frecuencias propias λ y con ellas los autovectores o modos propios, que tendrán componentes en muchas de las variables de estados.

La respuesta se comporta de forma similar a la de cualquier sistema de control como los que se ven en la asignatura "Automática y control". Depende del valor de la parte real de los autovalores λ la respuesta dinámica del helicóptero. Si $\Re(\lambda) < 0$ la exponencial envolvente será decreciente y el sistema será estable. Si $\Re(\lambda) > 0$ entonces la exponencial envolvente crecerá y el sistema será inestable, y finalmente si $\Re(\lambda) = 0$ el sistema es neutro. Si además el autovalor tiene parte imaginaria $\Im(\lambda)$, el movimiento tendrá una componente oscilatoria (línea continua), en vez de ser monótono (línea discontinua), como se muestra en la figura 5.2.

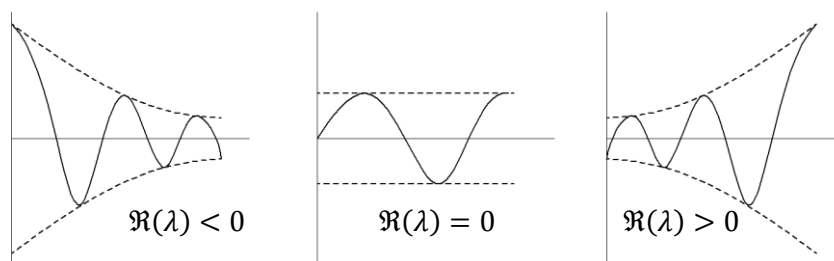


Figura 5.2. Comportamiento en función del valor de $\Re(\lambda)$.

Como indica la figura 5.3, el amortiguamiento ζ del movimiento viene dado por

$$\zeta = -\frac{\Re(\lambda)}{\Im(\lambda)}$$

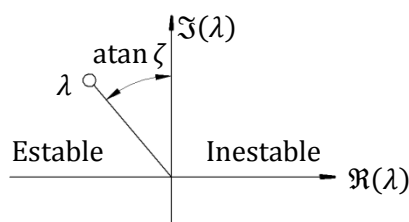


Figura 5.3. Amortiguamiento según la posición del autovalor en el plano complejo.

Para simplificar el problema se separan los tiempos de actuación de los modos, es decir, los modos rápidos se tienen en cuenta sólo a corto plazo, y los modos lentos se consideran sólo en el estudio a largo plazo de la estabilidad. También se separa habitualmente el estudio de la estabilidad longitudinal del de la estabilidad lateral – direccional tal y como se hace en “Mecánica del vuelo” para los aviones. Esto implica despreciar los términos con derivadas de estabilidad cruzadas, y anular alguna de las variables de estado de equilibrio. Esta hipótesis no es muy realista pero permite realizar un análisis cualitativo de la forma de los modos.

El problema longitudinal involucra las componentes u, w, q, Θ del vector de estado y las componentes θ_0, θ_{1s} del vector de control.

El problema lateral involucra las componentes v, p, r, Φ, Ψ del vector de estado y las componentes θ_{1c}, θ_{0t} del vector de control.

5.5. Estabilidad dinámica longitudinal

La dinámica longitudinal presenta en general los siguientes modos:

- Modo de velocidad vertical – Representa una convergencia rápida amortiguada en el movimiento vertical que suele estar desacoplada de la velocidad longitudinal y de cabeceo.
- Modo de velocidad de avance – Representa una convergencia muy rápida y altamente amortiguada en velocidad de avance, acoplada habitualmente con la velocidad de cabeceo y el ángulo de asiento. En función de la condición de vuelo puede evolucionar a modo de corto periodo.
- Modo de oscilación en cabeceo – Acoplado con la velocidad de avance, de dinámica lenta y su estabilidad depende de la condición de vuelo.

En vuelo a punto fijo los modos longitudinales se traducen en.

- Modo de velocidad vertical – Movimiento convergente vertical debido a una ráfaga vertical, la derivada de estabilidad es $F_{zw} < 0$. Modo desacoplado del resto de grados de libertad longitudinales, el autovector es $[0, 1, 0, 0]$.
- Modo de velocidad de avance
- Modo pendular – Figura 5.4, movimiento oscilatorio divergente con influencia de $F_{xu} < 0$, $M_{yu} > 0$ y $M_{yq} < 0$.

Los otros dos modos están acoplados, pero se pueden desacoplar en base a la diferencia de tiempos característicos.

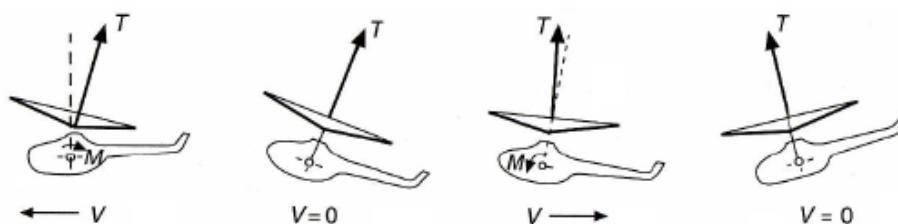


Figura 5.4. Movimiento pendular en vuelo a punto fijo.

El modo pendular en vuelo a punto fijo es un modo en el que por alguna razón se produce una perturbación sobre la velocidad de avance u . Después de esta perturbación el helicóptero avanza, lo que hace que el rotor tienda a inclinarse hacia atrás, sin tocar los mandos. Esto genera un momento positivo de cabeceo, es decir, el helicóptero encabrita. Pero la derivada del momento de cabeceo respecto al movimiento de cabeceo es negativa, lo que anula el momento de cabeceo, y como la tracción se ha inclinado hacia atrás, tiende a frenar la velocidad de avance hasta que se anula. Ahora la disminución de la velocidad hace que el rotor se incline hacia adelante, aumentando la velocidad de avance y provoque un momento de picado, y así de forma continua, resultando en un movimiento pendular como muestra la figura 5.4. Cuando este modo se produce en vuelo de avance, se convierte en el modo fugoide.

En vuelo a punto fijo las variables en la posición de equilibrio son $u_e = w_e = \Theta_e = 0$. Si el problema longitudinal esta desacoplado del lateral entonces se considera ángulo de balance $\Phi_e = 0$. Suponiendo que la vertical del eje de rotación pasa por el centro de gravedad entonces $F_{xw} = F_{xq} = F_{zu} = F_{zq} = M_{yw} = 0$. El problema es $\Delta \dot{\vec{x}} - [A]\Delta \vec{x} = 0$, y se reduce a $\det(\lambda[I] - [A]) = 0$, es decir

$$\begin{vmatrix} \lambda - \hat{F}_{xu} & 0 & 0 & g \\ 0 & \lambda - \hat{F}_{zw} & 0 & 0 \\ -\hat{M}_{yu} & 0 & \lambda - \hat{M}_{yq} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Las variables con sombrero están divididas por la masa o el momento de inercia según si se trata de una fuerza o un momento. Dado que la fila y la columna 2 solo presentan un término en la diagonal, pueden separarse de la siguiente forma

$$(\lambda - \hat{F}_{zw}) \begin{vmatrix} \lambda - \hat{F}_{xu} & 0 & g \\ -\hat{M}_{yu} & \lambda - \hat{M}_{yq} & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = \hat{F}_{zw} \quad \lambda^3 - (\hat{F}_{xu} + \hat{M}_{yq})\lambda^2 + \hat{F}_{xu}\hat{M}_{yq}\lambda + g\hat{M}_{yu} = 0$$

El primer modo es el de convergencia en velocidad vertical, que es un modo rápido. Para resolver el polinomio de tercer grado pueden separarse los modos rápidos de los lentos, reordenando la matriz.

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{xu} & -g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hat{M}_{yu} & 0 & \hat{M}_{yq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \Theta \\ q \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \Theta \\ q \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda[I] - [A_{22}]) = 0 \quad \det(\lambda[I] - [A_{11}] + [A_{12}][A_{22}]^{-1}([I] + \lambda[A_{22}]^{-1})[A_{21}]) = 0$$

El primer determinante es inmediato $\lambda_2 = \hat{M}_{yq}$. El segundo resulta en una ecuación de segundo grado de donde se obtienen los otros dos valores propios λ_3 y λ_4 .

$$\lambda^2 - \left(\hat{F}_{xu} + g \frac{\hat{M}_{yu}}{\hat{M}_{yq}^2} \right) \lambda - g \frac{\hat{M}_{yu}}{\hat{M}_{yq}} = 0$$

Nótese que esta ecuación es de la forma $\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$.

En vuelo de avance los modos longitudinales dependen del tipo de rotor del helicóptero.

- Rotor semirrígido – Presenta dos modos asociados a autovalores reales y un par de autovalores complejos (los valores complejos son siempre pares conjugados).
- Rotor articulado – Los dos modos asociados a autovalores reales pueden converger a un solo autovalor complejo asociado al modo de corto periodo, y el autovalor complejo corresponde al modo fugoide de baja frecuencia y puede convertirse en estable a partir de ciertas velocidades de vuelo.

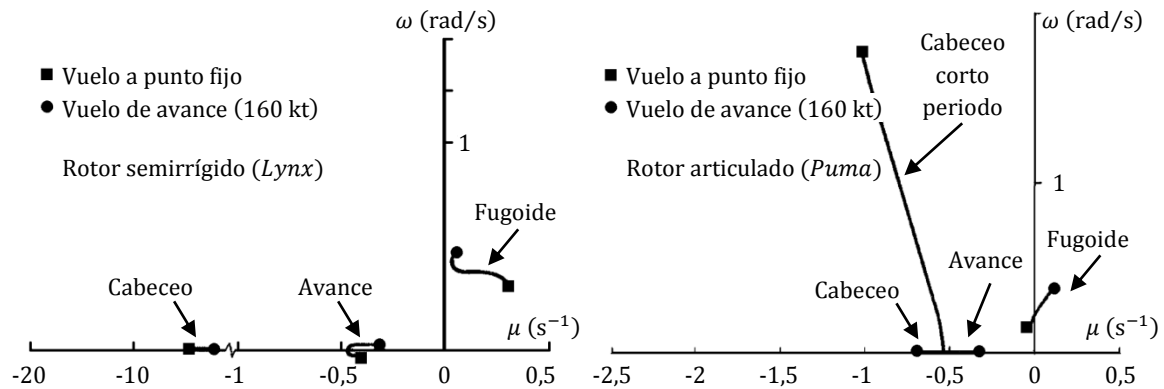


Figura 5.5. Modos longitudinales desacoplados.
(Adaptado de Padfield, G. D. Helicopter flight dynamics)

Nuevamente para analizar estos modos hay que desacoplar en base a la diferencia de tiempos característicos.

5.6. Estabilidad dinámica lateral

La dinámica lateral presenta en general los siguientes modos:

- Modo direccional – Modo neutro, solo implica el grado de libertad de guiñada. El autovalor es nulo, indicando que el helicóptero no reacciona a perturbaciones en guiñada, el autovector es $[0,0,0,0,1]$. $\lambda = 0 \Rightarrow e^{\lambda t} = 1$.
- Modo espiral – Implica el grado de libertad de velocidad angular de guiñada, independiente del balance. Normalmente es un modo convergente.
- Modo de convergencia en balance – Balanceo puro rápido amortiguado.
- Modo de oscilación lateral direccional (balanceo holandés) – Modo en que se acopla el balanceo y la velocidad de guiñada. La estabilidad depende de la condición de vuelo. Es similar al modo pendular, pero debido a la presencia del rotor antipar hay acoplamiento de otros fenómenos.

En vuelo a punto fijo los modos laterales se traducen en:

- Modo espiral – Desacoplado, sólo contribuye la derivada de estabilidad $M_{zr} < 0$.
- Modo de convergencia en balance – Modo rápido.
- Modo de oscilación lateral – Implica variaciones en el ángulo de balance y las velocidades de guiñada y lateral. Similar al modo pendular, puede converger o divergir.

En vuelo de avance los modos laterales también dependen del tipo de rotor del helicóptero.

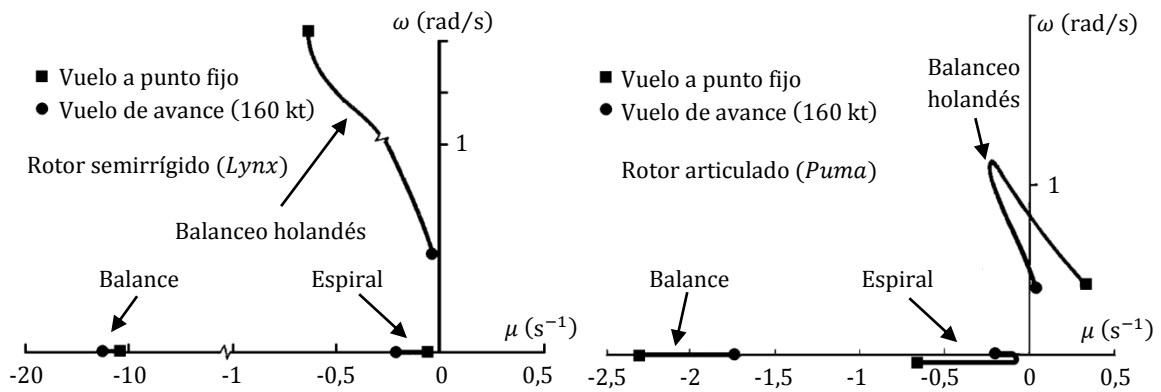


Figura 5.6. Modos laterales desacoplados.
(Adaptado de Padfield, G. D. Helicopter flight dynamics)

5.7. Control del helicóptero

Los controles de actitud de un helicóptero son:

- Control colectivo.
- Control cíclico.
- Control antipar o direccional.

Como ya es habitual, las acciones sobre los controles están acopladas entre ellas. Por lo general se considera que la tracción es perpendicular al plano de recorrido de las puntas de pala del rotor principal, por lo que cambiar la orientación de este plano modificará la orientación de la fuerza resultante. La tracción del rotor de cola no es orientable, pues no dispone de control de paso cíclico.

Por controlabilidad se entiende la capacidad de un helicóptero de girar alrededor de sus ejes debido a la acción de los mandos de control. Las cualidades de vuelo de un helicóptero se cuantifican en base a los siguientes parámetros.

- Efectividad – Cantidad de momento por deflexión unitaria de la palanca.
- Sensibilidad – Velocidad angular de la aeronave por deflexión unitaria de la palanca.
- Retardo – Tiempo que tarda en iniciarse la maniobra tras accionar los mandos.
- Fuerza en palanca – Fuerza que debe aplicar el piloto sobre los mandos.

En lo que a las ecuaciones de estabilidad y control respecta, el vector de estado evoluciona, no sólo por una modificación del propio vector de estado (perturbación), sino también por una modificación del vector de control.

$$\dot{\bar{x}} = G(\bar{x}, \bar{u}) \quad \bar{x} = \bar{x}_e + \Delta\bar{x}(\Delta x_0, \Delta\bar{u}) \quad \frac{d\Delta\bar{x}}{dt} = \frac{\partial G}{\partial \bar{x}} \Delta\bar{x} + \frac{\partial G}{\partial \bar{u}} \Delta\bar{u}$$

$\partial G/\partial \bar{x} = [A]$ es la matriz de derivadas de estabilidad y $\partial G/\partial \bar{u} = [B]$ es la matriz de control.

$$\Delta \bar{x} = [Y(t)]\Delta \bar{x}_0 + \int_0^t [Y(t-\tau)] \{[B]\Delta \bar{u}\}^T d\tau$$

$Y(t)$ representa la solución de estabilidad dinámica, la matriz de los autovectores por las exponenciales de los autovalores correspondientes por la matriz de autovectores invertida.

$$|\lambda[I] - [A]| = 0 \quad Y(t) = [W][e^{\lambda t}][W]^{-1}$$

Y la matriz $[B]$ es la matriz de derivadas de control

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial \theta_0} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial \theta_{1s}} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial \theta_{1c}} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_x}{\partial \theta_{0t}} \\ \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial \theta_0} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial \theta_{1s}} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial \theta_{1c}} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_y}{\partial \theta_{0t}} \\ \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial \theta_0} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial \theta_{1s}} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial \theta_{1c}} & \frac{1}{m} \frac{\partial F_z}{\partial \theta_{0t}} \\ \frac{\partial M_x^*}{\partial \theta_0} & \frac{\partial M_x^*}{\partial \theta_{1s}} & \frac{\partial M_x^*}{\partial \theta_{1c}} & \frac{\partial M_x^*}{\partial \theta_{0t}} \\ \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial \theta_0} & \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial \theta_{1s}} & \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial \theta_{1c}} & \frac{1}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial \theta_{0t}} \\ \frac{\partial M_z^*}{\partial \theta_0} & \frac{\partial M_z^*}{\partial \theta_{1s}} & \frac{\partial M_z^*}{\partial \theta_{1c}} & \frac{\partial M_z^*}{\partial \theta_{0t}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se analizara lo que sucede partiendo de la condición de vuelo en equilibrio a punto fijo con una perturbación del ángulo de paso colectivo. De estabilidad dinámica hay que recordar que el problema longitudinal tiene un modo de desplazamiento vertical desacoplado del resto.

$$\lambda - \hat{F}_{zw} = 0 \quad \lambda \rightarrow [0,1,0,0] \quad \lambda = \hat{F}_{zw}$$

La matriz $[B]$ contendría las derivadas parciales de las fuerzas que intervienen en la dinámica longitudinal respecto a las variables de control que intervienen en el problema longitudinal.

$$[B] = \begin{bmatrix} F_{x\theta_0} & F_{x\theta_{1s}} \\ F_{z\theta_0} & F_{z\theta_{1s}} \\ M_{y\theta_0} & M_{y\theta_{1s}} \end{bmatrix}$$

Para el movimiento vertical se usa la segunda fila.

$$Y(t) = 1 \cdot e^{\hat{F}_{zw}t} \cdot 1$$

$$\Delta w(t) = \int_0^t (e^{\hat{F}_{zw}(t-\tau)} \hat{F}_{z\theta_0} \Delta \theta_0) d\tau = -\frac{\hat{F}_{z\theta_0}}{\hat{F}_{zw}} (1 - e^{\hat{F}_{zw}t}) \Delta \theta_0$$