UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC
CURSO DE FILOSOFÍA – PESQUISA FILOSÓFICA I

JAIR JOSÉ DO VALLE FILHO Nº 11101988

JOHANN GOTTLOB FREGE E A INDEPENDÊNCIA DOS POSTULADOS DAS GEOMETRIAS EUCLIDIANA E NÃO-EUCLIDIANAS

FLORIANÓPOLIS-SC
2011

Conteúdo

I - PRIMEIRA PARTE: A GEOMETRIA COMO CIÊNCIA 3
Introdução 3
Breve bibliografía.......... 3
Um pouco de historia das geometrias euclidiana e não euclidiana 3
O pensamento matemático.......... 3
Axioma: 3
Postulado: 3
Uma versão dos cinco Postulados de Euclides 3
Retas paralelas 4
O surgimento histórico das geometrias não euclidianas 4
Os axiomas da geometria euclidiana são: 4
As negações do quinto axioma euclidiano 4
Os axiomas das geometrias não euclidianas são: 4
Os Elementos formam um texto, constituído por 13 "livros" 4
O que é uma geometria euclidiana? 5
O que é uma geometria não euclidiana? 5
Outra negação.......... 5
Os conceitos de retas.......... 5
II – SEGUNDA PARTE: O PENSAMENTO FILOSÓFICO NA MATEMÁTICA 7
Introdução 7
Considerações iniciais.......... 7
Juízos sintéticos dos enunciados geométricos 7
Euclides ao deduzir seus teoremas incorre em erros lógicos 8
Advento das geometrias não-euclidianas 8
Geometria interpretada e geometria não interpretada 8
A interpretação fregeana das geometrias.......... 8
A interpretação empírica das geometrias 8
Analise de geometrias não interpretadas.......... 9
Conclusões.......... 10
III - REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 11

I - PRIMEIRA PARTE: A GEOMETRIA COMO CIÊNCIA

Introdução

A primeira parte deste trabalho de pesquisa filosófica sobre as geometrias inicia com uma breve historia da geometria euclidiana e o advento das geometrias não-euclidianas. Os postulados da geometria euclidiana e das geometrias não euclidiana. A parte comum e a parte distinta. Esta primeira parte se constitui no pensamento das geometrias como ciência, seria a parte cientifica.
A segunda parte apresenta a discussão filosófica se as geometrias são conhecimentos ‘a priori’ ou ‘a posteriori’; se são analíticos ou sintéticos; se são interpretados ou não interpretados; se são consistentes ou inconsistentes; se são verdadeiros se são falsos.

EUCLIDES
(325 a.C. - 265 a C.)
Breve bibliografía

Euclides, Arquimedes e Apolônio são considerados os três maiores matemáticos da antiguidade. O historiador chamado Proclo faz alguns comentários sobre sua vida. Em um plano por um ponto do plano, só é possível passar uma única reta paralela a uma reta dada. Este é o postulado base da geometria de Euclides. No século 18, surgem as geometrias não-euclidianas. Foi Lobachevskí que propôs por um ponto do plano pode passar mais de uma reta paralela. Aí surgem outras geometrias sem nenhuma contradição.

Nikolái Ivánovich Lobachevski[1]
Никола́й Ива́нович Лобаче́вский
(1792 - 1856)
Um pouco de historia das geometrias euclidiana e não euclidiana

Os Elementos de Euclides, e sua geometria atravessam mais de dois milênios intocáveis. O seu quinto postulado: Dado uma reta qualquer e um ponto fora desta reta, existe uma única paralela à reta dada, passando por este ponto. Permanece intocável, neste período histórico

O pensamento matemático

Os aspectos relevantes do pensamento matemático ou natureza do pensamento matemático. Dentre outros são aspectos relevantes do pensamento matemático: a formalização, generalização, dedução, demonstração, classificação, representação, generalização, classificação, análise, cálculos, etc. O pensamento matemático se utiliza da intuição, da lógica, da dedução, relação entre os conceitos, da buscar de padrões e da sistema sistematização.

Axioma:

Axioma é uma palavra grega que significa “considerar válido”,
O conceito de axioma dentro da Matemática, se constitui numa hipótese inicial considerada valida.

Postulado:

Postulado é o que se considera como fato reconhecido, como verdade indemonstrável.

Uma versão dos cinco Postulados de Euclides

1- Dados dois pontos se pode traçar uma reta que os une.
2- Qualquer segmento pode ser prolongado de forma continua em uma reta ilimitada na mesma direção.

[1] Em wikipedia: “Con independencia del húngaro János Bolyai y del alemán Carl Friedrich Gauss, Lobachevski descubrió un sistema de geometría no euclidiana.”

3- Se pode traçar uma circunferência de centro em qualquer ponto e raio qualquer.
4- Todos os ângulos retos são iguais.
5- Se uma reta, ao cortar a outras duas, forma os ângulos internos de um mesmo lado menores que dois retos, essas duas retas prolongadas indefinidamente se cortam do lado em que estão os ângulos menores que dois retos.

Retas paralelas

A geometria euclidiana difere da hiperbólica (e também da elíptica) exatamente na questão das paralelas.
Duas retas no plano são ditas paralelas quando eles não tem pontos em comum.
Axioma da existência e unicidade das paralelas.
Dado uma reta e um ponto fora dela, existe uma única reta paralela a reta dada, passando pelo ponto dado.
O axioma acima é forma mais usada entre os axiomas e é equivalente ao quinto postulado de Euclides (ou duodécimo axioma de Euclides).
Duas quaisquer retas levemente concorrentes, se encontrariam além dos limites alcançáveis
O quinto postulado permaneceu sem ser negado, com sua veracidade inquestionável por mais de dois milênios.

O surgimento histórico das geometrias não euclidianas

As geometrias não euclidianas surgiram a partir da busca de demonstrar que o 5º axioma era um teorema, milhares de matemáticos durante mais de dois mil anos tentaram.
As geometrias não euclidianas consideram os quatro primeiros axiomas da geometria euclidiana e, negando o quinto (a negação do axioma se constitui em alterar o seu conteúdo proposicional)

Os axiomas da geometria euclidiana são:

- Dados dois pontos, há um segmento de reta que os une;
- Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta;
- Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer pode-se construir um círculo de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada;
- Todos os ângulos retos são iguais;
- A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180 graus

As negações do quinto axioma euclidiano

O quinto axioma escrito da seguinte forma: - a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180 graus.
Uma negação do quinto axioma escrito da seguinte forma seria:
- a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180 graus.

Outra negação do quinto axioma escrito da seguinte forma seria:
- a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180 graus.

Georg Friedrich Bernhard Riemann[2]
(1826 - 1866)

Os axiomas das geometrias não euclidianas são:

Os quatro primeiros axiomas da geometria euclidiana e o quinto axioma escrito da seguinte forma: a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180 graus.
Os quatro primeiros axiomas da geometria euclidiana e o quinto axioma escrito da seguinte forma: a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180 graus.

Os Elementos formam um texto, constituído por 13 "livros"

[2] Em Wikipédia: “Riemann dio sus primeras conferencias en 1854, en las cuales fundó el campo de la geometría de Riemann”

Os seis primeiros tratam essencialmente de geometria no plano
Nos Elementos, escrito por Euclides de Alexandria, no Livro I, se encontram: Definições, postulados, axiomas, triângulos, paralelismo,e o Teorema de Pitágoras.
Antes de negar o quinto postulado a geometria euclidiana era única, é era considerada verdadeira. E era entendido que a percepção humana era euclidiana por determinação divina.
Negar o quinto postulado.
Qual a conseqüência da negação de um postulado de uma geometria?
A conseqüência da negação de um postulado de uma geometria consiste em encontrar uma geometria em que pelo menos um de seus axiomas ou postulados não se verifica para esta geometria.
A conseqüência da negação de um postulado não é absolutas, é parcial. O postulado negado continua valido para a geometria anterior, e a geometria anterior continua valida para os seus postulados.

O que é uma geometria euclidiana?

Uma geometria é dita euclidiana quando esta de acordo com os axiomas ou postulados de Euclides.

O que é uma geometria não euclidiana?

Uma geometria é dita não-euclidiana quando pelo menos um dos dez axiomas ou postulados de Euclides não é valido para esta geometria
A negação da geometria euclidiana, ocorre historicamente com a alteração do quinto postulado.
Dado uma reta qualquer e um ponto fora desta reta, existe mais de uma paralela à reta dada, passando por este ponto.

Outra negação

Dado uma reta qualquer e um ponto fora desta reta, não existe uma nenhuma reta paralela à reta dada, passando por este ponto.
Esta negação é parcial. A geometria euclidiana continua valida tendo como parâmetro os seus postulados ou axiomas.
Porem os dois postulados acima permitem a existência de outras geometrias não-euclidianas.
Da a primeira alteração do quinto postulado acima surge a geometria não euclidiana denominada geometria hiperbólica.

Os conceitos de retas

O conceito de reta para as geometrias não euclidianas é distinto do conceito de reta euclidiana.
Uma reta euclidiana se constitui de uma curva com declividade nula.
O conceito de retas não-euclidianas são curvas com declividade diferente de zero.
Ex. as retas hiperbólicas se constituem em hipérboles, cada uma com sua declividade diferente.
Ex. nas geometrias esféricas as retas tem declividade diferente de zero e constante, são circunferências.

II – SEGUNDA PARTE: O PENSAMENTO FILOSÓFICO NA MATEMÁTICA

Introdução

A primeira parte desta pesquisa filosofica se constituiu em uma introdução cientifica das geometrias, a segunda parte pretende uma introdução filosofica das geometrias, se utilisara dos conceitos de juizos a priori e a posteriori, de juizos analiticos e sinteticos, se utilizara os conceitos de geometria interpretada e de geometria não interpretada, se veerificara o uso de enunciados de forma intuitiva por Euclides, enunciados estes que para não constituirem em erros logicos deveriam constar entre os postulados ou axiomas e definições.
A filosofia da geometria está numa espécie de fronteira entre a ciência e a filosofia, este parte da pesquisa pretende ser apenas uma introdução aos problemas filosóficos das geometrias. Quais os fundamentos filosóficos do pensamento geométrico? Quais as formas filosóficas dos pensamentos geométricos?
O pensamento filosófico da geometria até o fim da idade media apresentam as seguintes características: admitem os valores lógicos ou verdadeiros ou falsos; a verdade deve ser procurada e a falsidade deve ser evitada; supõem que os enunciados constituem a própria realidade; e são prisioneiros da linguagem.
A cerca de um século os pensamento filosóficos das geometrias assumem novas feições, com Lobacheviski, Bolyai e Gauss. Lobacheviski constrói uma geometria tão coerente quanto à euclidiana, ao tomar como falso o quinto postulado euclidiano. A ruptura causada termina com mais de dois milênios de hegemonia dos Elementos de Euclides. Esta ruptura se propaga alem das fronteiras geométricas e atinge a Física Clássica Newtoniana com o impacto da Física Relativística Eisteniana.

Johann Gottlob Frege[3]
(1848-1925)

Como concilhar as geometrias euclidiana e não euclidianas? Frege traz uma grande luz, após o estrepito da ruptura, com o recurso da interpretação, que sera apresentada mais adiante. A interpretação fregeana das geometrias, como alternativa as interpretações empiricas de geometrias. Tambem são esclarecedoras as analises da consistencia logica forma das geometrias não interpretadas.
Grandes foram a contribuição de George Boole, Georg Cantor, De Morgan, Gottlob Frege, na libertação das limitações ao pensamento cientifico e filosófico da atualidade. Dos citados acima, nos ateremos ao ultimo, por fundar da lógica matemática moderna, ferramenta de onde extraímos conceitos de uma interpretação analítica das geometrias, utilizados nesta segunda parte.

Considerações iniciais

Se uma lei matemática é incompatível com outra, as duas não podem ser verdadeiras. Lobatcheviski ao falsear o quinto postulados produziu um problema filosófico: a geometria euclidiana ou a lobactcheviskiana e verdadeira? A física clássica diz que a primeira é verdadeira, porem a física relativística diz que a verdadeira é a geometria riemanniana. E agora o problema ficou mais amplo qual a solução filosófica?
As leis da geometria euclidiana foram consideradas verdadeiras por mais de dois mil anos, o surgimento das geometrias não-euclidianas colocaram em cheque a verdade da geometria euclidiana.
Outro problema filosófico a geometria euclidiana usa na dedução de seus teoremas ‘conhecimentos intuitivos’ e gráficos de retas, semi-retas, segmentos, circunferências, planos, etc. que não integram seus postulados, axiomas e definições.

Juízos sintéticos dos enunciados geométricos

Platão na antiguidade considera os juízos geométricos sintéticos. Emanuel Kant considera em sua obra os juízos geométricos euclidianos como juízos sintéticos. Para Kant os termos geométricos primitivos, os postulados e os axiomas primitivos usados para definir outros termos geométricos e deduzir os teoremas geométricos euclidianos pelo fato de serem considerados primitivos, e verdadeiros tornam a geometria

[3] “Quando um conceito, que serve de base a uma importante ciência, oferece dficu idades, torna-se tarefa irrecusável investigá-lo de modo mais preciso e superar essas d jficuldades . . .“ Frege dedicou toda sua vida á investigação dos conceitosfundamentais da aritmética, desde sua juventude em Gõttingen.

euclidiana e seus juízos sintéticos. Para Kant a única geometria é a euclidiana. Para Kant a geometria euclidiana suas definições, axiomas, postulados e teoremas são todos verdadeiros. Podemos afirmar que desde Platão até Kant a geometria euclidiana foi a única geometria e os seus enunciados são considerados como sintéticos.
Frege entende que do ponto de vista conceitual pode-se assumir o contrario de um axioma geométrico sem incorrer em contradições e proceder deduções a partir desta ultima. A substituição lobatcheviskiana por um postulado contrario ao quinto postulado euclidiano e as deduções são perfeitamente verdadeiras. Porem existe para ele a possibilidade demonstra que os axiomas ou postulados geométricos são independentes entre si em relação as leis lógicas primitivas e portanto são sintéticos. (Frege, Gottlob. Os pensadores - Os fundamentos da aritmética, p.217)

Euclides ao deduzir seus teoremas incorre em erros lógicos

Procedendo uma rigorosa analise das deduções dos teoremas euclidianos, percebemos erros lógicos. Na dedução muitas vezes são empregados enunciados que não integram as definições, axiomas e postulados. Tal procedimento ocorre quando Euclides se vale da intuição para suas deduções, nestas intuições estão presentes enunciados de forma implícita. O autor na pagina dá um exemplo Filosofia da Matemática de Stephen F. Barker: na dedução do primeiro teorema dado um segmento de reta com extremidades A e B, traçando uma circunferência com a distancia AB, a partir da extremidade A, e uma circunferência a partir da extremidade B, o encontro das duas circunferências determinara um ponto D. as distancias AB AD BD são iguais, e está construído um triangulo eqüilátero ABD. O autor comenta que estão implícitos vários enunciados na demonstração: tais como que as circunferências e o segmento de reta pertencem a um mesmo plano; que se considera dos dois pontos de intersecção apenas o ponto D, porem ocorre a intersecção no ponto E, que o triangulo ABE também é eqüilátero. Estes argumentos alguns do autor outros meus, constatam que a geometria euclidiana apresenta erros lógicos formais, inconsistências que porem não invalidam, que são sanáveis acrescentando os enunciados implícitos nas intuições euclidianas. Este erro acompanhou por milênios a geometria euclidiana.

Advento das geometrias não-euclidianas

Com o advento das geometrias não euclidianas e com o advento da física relativística, a geometria euclidiana passa a ser considerada não verdadeira.

Geometria interpretada e geometria não interpretada

Um avanço da atualidade usada por Frege, rompendo a ambivalência verdadeira ou falsa, apresentando uma nova possibilidade alternativa: as geometrias não interpretadas não são nem verdadeiras nem falsas. Frege vai mais alem e da uma interpretação analítica a geometria euclidiana, e esta geometria é verdadeira. Tal interpretação pode ter sua aplicação estendida as demais geometrias.

A interpretação fregeana das geometrias

Adotando a interpretação analítica de Frege as geometrias interpretadas passam a ser analíticas. Exemplificando uma interpretação analítica da geometria euclidiana ao definirmos os termos geométricos da seguinte forma: o triangulo euclidiano é aquele cuja soma dos ângulos internos é dois ângulos retos; a geometrias hiperbólicas são aquelas em que a soma dos ângulos internos é sempre menor que dois ângulos retos, e as geometrias esféricas, elípticas, etc. são aquelas em que a soma dos ângulos internos de um triangulo são sempre maior do que dois ângulos retos. Se todos os termos de uma geometria são analíticos implica que esta interpretação constitui uma geometria analítica.

A interpretação empírica das geometrias

Interpretando empiricamente a geometria euclidiana e riemanianna. Estas geometrias interpretadas empiricamente se constituem em geometrias sintéticas a posteriori. Na visão da física clássica newtoniana, a única geometria verdadeira é a geometria euclidiana interpretada empiricamente. Na visão da física relativística a única geometria verdadeira é a riemanniana interpretada empiricamente.

Analise de geometrias não interpretadas

Par uma analise rigorosa de qualquer geometria é necessário que esta geometria seja não interpretada. A geometria euclidiana da suporte para a analise da consistência das geometrias não euclidianas. Por outro lado a teoria dos números através de um modelo da geometria euclidiana não interpretada da suporte para a analise da consistência da geometria euclidiana. Pode ser que no futuro a teoria dos números de suporte para analise da consistência das geometrias euclidiana e não euclidianas, mas ainda não chegamos lá. Enquanto não chegamos a esta analise com o uso da teoria dos números, a geometria euclidiana dá suporte as demais para a analise de suas consistências.

A geometria euclidiana na forma que foi concebida, na atualidade é considerada uma geometria interpretada. Substituindo-se os termos geométricos por vogais ou consoantes, nos postulados, axiomas, definições e teoremas geométricos construímos uma geometria euclidiana não interpretada. Numa analise lógica formal dos enunciados acima referidos se constata que a geometria euclidiana é consistente. Entende-se por consistente uma geometria quando não se encontra nenhuma contradição em seus enunciados. A consistência da geometria euclidiana leva a prova da consistência das geometrias não euclidianas. A consistência da geometria euclidiana não interpretada se obtém através da construção de um modelo desta geometria a partir da teoria dos números reais.

Com o advento das geometrias não euclidianas, os geômetras, os matemáticos e os filósofos passaram a considerar que as geometrias, bem como as matemáticas deixaram de ser verdadeiras e passaram apenas a serem consideradas validas pelo uso que se faz delas.

Num estudo de filósofos da atualidade, eles consideram que a única geometria interpretada verdadeira é a geometria riemanniana. Porem o filosofa Frege, entende diferente: para ele em uma geometria interpretada os seus enunciados não precisam ser empíricos, podem constituir-se de enunciados ‘a priori’. Para ficar mais claro usaremos o exemplo da pagina 75 da Filosofia da Matemática de Stephen F. Barker; para ele o fato de a soma dos ângulos de um triângulo ser igual a dois ângulos retos se constitui numa verdade ‘a priori’. Neste conhecimento o termo geométrico e usado de uma maneira diferente das visões da natureza ou da mente humana. O termo geométrico triângulo tem a característica de ter em sua definição a soma dos ângulos internos igual a dos ângulos retos. O termo triângulo nesta interpretação da geometria euclidiana é um termo analítico ‘a priori’. Uma coisa para ser um triângulo tem que se adequar a sua definição. E na natureza não existem os termos ‘ponto’, ‘reta’, ‘triangulo’, etc. a geometria euclidiana assim interpretada é verdadeira.

Conclusões

1. A geometria euclidiana é considerada verdadeira desde Euclides (325-265 aC) até Lobacheviski (1792-1856).
2. Lobacheviski, nega o quinto postulado, como conseqüência a geometria euclidiana passa a não ser considerada verdadeira.
3. Riemann, nega o quinto postulado euclidiano e lobacheviskiano, como conseqüência ambas as geometrias passam a não ser consideradas verdadeiras.
4. Frege propõe que as geometrias quando não interpretadas não são verdadeiras nem falsas.
5. Frege propõe que os postulados ou axiomas geométricos são independentes e, portanto podem ser contrariados.
6. Frege propões uma interpretação analítica para a geometria euclidiana, e esta geometria é verdadeira.
7. A interpretação analítica pode também ser proposta para as demais geometrias.
8. Conclui-se que as geometrias desde que sejam consistentes, não apresentando contradições internas, em uma interpretação analítica, são verdadeiras ou válidas.

III - REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARKER, Stephen F., Philodophy of Mathematics, Filosofia da Matemática, Tradução: Leonidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota, Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976.

FREGE, Johann Goottlob, Ueber die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift, 1969, pags. 91-97, Sobre a Justificação Cientifica de uma Conceitografia, in Pensadores, Tradução: Luis Henrique dos Santos, São Paulo: Abril Cultural, 1980.

HEMPEL, Carl G., Philosophy of Natural Science, Filosofia da Ciencia, Tradução: Plínio Sussekind Rocha, Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1981.

POINCARÉ, Henri, Ensaios Fundamentais, Rio de Janeiro: Contraponto, 2008.

RUSSEL, Bertrand, Introduction to Mathematical Philosophy. Introdução a Filosofia Matematica, Tradução: Giasone Rebuá, Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1974.

NOLT, John. ROHATYN, Dennis, Schaum's Outline of Theory and Problems of Logic, Lógica, Tradução: Leila Zardo Puga, São Paulo: McGraw-Hill, 1991.