Psu Matemáticas
Profesor: Guillermo Corbacho
gcorbach@uc.cl

Guía Psu Matemáticas

Aplicación de definiciones y propiedades básicas de Ángulos

1. Sistemas de Medidas

No vamos a definir lo que es un ángulo, pues tal concepto está bien arraigado en los alumnos de 4º medio.
Existen tres sistemas de medición de ángulos.

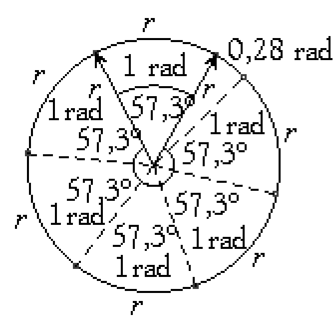
a) Sexagesimal: Se divide una circunferencia en 360 partes iguales. Cada arco así definido es un grado sexagesimal, el cuál es definido como su unidad de medida y se denota por el símbolo (º). De este sistema vamos a recordar la definición:
Minuto sexagesimal es la sesenta ava parte de un grado sexagesimal. 1º = 60'
Segundo sexagesimal es la sesenta ava parte de un minuto sexagesimal. 1' = 60"

b) Circular: La unidad de medida del ángulo es el radián. Un radián es la medida del ángulo, cuyo arco de circunferencia abarca una longitud igual al radio.
Si r es el radio de una ⊗, su perímetro viene dado por:

$$P = 2\pi\ r \approx 2 \bullet 3{,}14\ r = 6{,}28\ r$$

Igual a 6,28 radios o llamados comúnmente radianes. Y la medida de un radián, comparado con el sistema sexagesimal- abarca aproximadamente 57,3º.

Resumiendo: una circunferencia tiene una medida de distancia de 6,28 radios.
Y la medida de su ángulo completo es 6,28 radianes.



c) Centesimal: Es el sistema de medida de ángulos, menos conocido. Se divide la circunferencia en 400 partes iguales y cada arco así definido es un grado centesimal, lo que constituye su unidad de medida. Se denota por el símbolo (^{g}).

2. Transformación de ángulos de un sistema a otro

Para transformar ángulos sexagesimales a radianes o viceversa, o al sistema centesimal, se utiliza la bendita y amada proporcionalidad directa o bien amplificamos o simplificamos de manera conveniente. Para lo cuál hay que tener presente solo una, cualquiera de ellas, de las siguientes equivalencias dadas a lo largo de cada fila, de la siguiente tabla de equivalencias de un sistema a otro.

Sexagesimal (º)	Circular (rad)	Centesimal (g)
1⊗ = 360º	1⊗ = 2π [rad]	1⊗ = 400^g
180º	π [rad]	200^g
90º	$\frac{\pi}{2}$ [rad]	100^g
45º	$\frac{\pi}{4}$ [rad]	50^g

Ejemplos:
i) Vamos a transformar 30^g del sistema centesimal a su equivalencia en grados del sistema sexagesimal:
1^{ero}: Clasificamos:

Sexagesimal	Centesimal
180º	200^g
x	30^g

2do: Efectuamos producto cruzado:

$$180^o \bullet 30^g = x \bullet 200^g$$

3ero: Despejamos x:

$$\frac{180^o \bullet 30^g}{200^g} = x$$

$$\frac{18^o \bullet 3}{2} = x$$

$$9^o \bullet 3 = x$$

$$27^o = x$$

ii) Transformar $\frac{\pi}{6}\ [rad]$ a ángulos sexagesimales.

Solución:
La segunda fila de equivalencia nos muestra la siguiente equivalencia entre sistemas sexagesimales y circular:

$90^o = \frac{\pi}{2}[rad]$ Basta con dividir por 3 o multiplicar a ambos lados por $\frac{1}{3}$ para obtener en el lado derecho la expresión final $\frac{\pi}{6}[rad]$

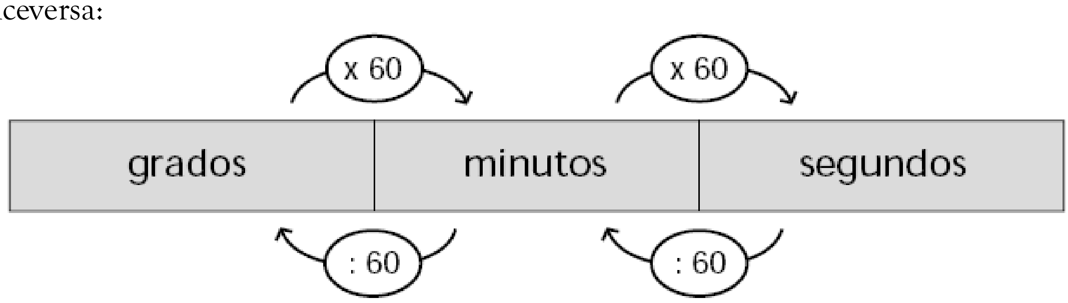
$$90^o = \frac{\pi}{2}[rad] \qquad / \bullet \frac{1}{3}$$

$$\frac{90^o}{3} = \frac{\pi}{2} \bullet \frac{1}{3}[rad]$$

$$30^o = \frac{\pi}{6}[rad]$$

3. Conversión de grados a minutos y a segundos y viceversa en el sistema sexagesimal

El diagrama siguiente nos muestra la conversión de grados a minutos y a segundos y viceversa:



4. Operaciones de suma y resta con ángulos sexagesimales

a) Suma

Para sumar ángulos deberemos sumar grados con grados, minutos con minutos y segundos con segundos.

$$\begin{array}{r} 32^o\ 15'\ 6'' \\ +2^o\ 8'\ 29' \\ \hline 34^o\ 23'\ 35'' \end{array}$$

Si el resultado de alguna de estas sumas es mayor o igual que 60, lo pasamos a la unidad inmediatamente superior.

$$\begin{array}{r} 15^o\ 20'\ 16'' \\ +20^o\ 30'\ 54'' \\ \hline 35^o\ 50'\ 70'' \end{array}$$

Teniendo en cuenta que 70" = 60’’ + 10’’
= 1' 10" en donde transformamos 60 seg. (60’’) en un 1 minuto (1’)

El resultado de la suma lo expresamos como:
35º 51' 10".

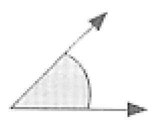
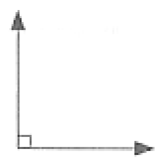
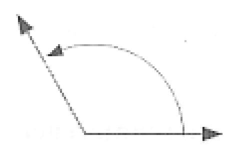
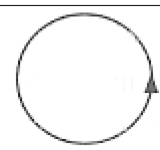
b) <u>Resta</u>
La operación se dispone igual que la suma

$$\begin{array}{r} 30^\circ\ 31'\ 12'' \\ -22'\ 48'' \\ \hline \end{array}$$

Puesto que no podemos restarle 48" a 12" debemos modificar el minuendo pasando 1 minuto a segundos: 30º 31' 12" = 30º 30' 72".
Con lo cual ya podemos realizar la resta:

$$\begin{array}{r} 30^\circ\ 30'\ 72'' \\ -22'\ 48'' \\ \hline 30^\circ\ 8'\ 24'' \end{array}$$

5. <u>Clasificación de ángulos en el sistema sexagesimal</u>

Angulo Agudo	Angulo Rectángulo	Angulo Obtuso
 Si $0^\circ < \alpha < 90^\circ$	 Si $\alpha = 90^\circ$	 Si $90^\circ < \alpha < 180^\circ$
Angulo Extendido	**Angulo Completo**	
 Si $\alpha = 180^\circ$	 Si $\alpha = 360^\circ$	

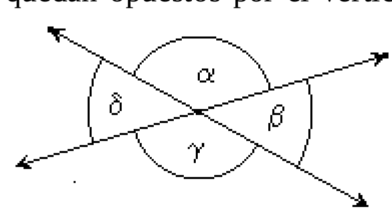
6. <u>Definiciones</u>

i) <u>Ángulos complementarios</u>: Son aquellos que sumados dan 90º. Es decir, $\alpha + \beta = 90^\circ$.
ii) <u>Ángulos suplementarios</u>: Son aquellos que sumados dan 180º. Es decir, $\alpha + \beta = 180^\circ$.
iii) <u>Ángulos adyacentes</u>: Son aquellos que tienen un lado en común y los otros dos sobre una misma recta, semirrecta o segmento rectilíneo. Además, forman una semicircunferencia, esto es, 180º. Por lo tanto, son también suplementarios.

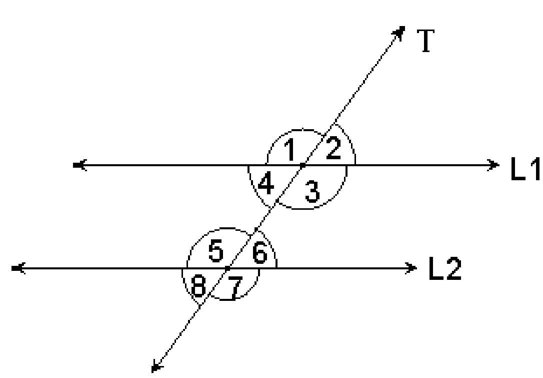
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

iv) <u>Ángulos opuestos por el vértice</u>: Son ángulos formados por la intersección entre dos rectas, semirrectas o segmentos de rectas. Aquellos que quedan opuestos por el vértice son congruentes (tienen igual medida).

$$\alpha \equiv \gamma$$
$$\beta \equiv \delta$$



v) <u>Ángulos entre paralelas cortadas por una recta transversal</u>
Sean $L_1 // L_2$ y T una recta como ilustra la figura.
Entonces se cumplen las siguientes relaciones:
a) <u>*ángulos opuestos por el vértice*</u>:
$\measuredangle 1 \equiv \measuredangle 3$; $\measuredangle 2 \equiv \measuredangle 4$;
$\measuredangle 5 \equiv \measuredangle 7$; $\measuredangle 6 \equiv \measuredangle 8$;



b) *ángulos correspondientes*:
$\measuredangle 1 \equiv \measuredangle 5$; $\measuredangle 2 \equiv \measuredangle 6$;
$\measuredangle 3 \equiv \measuredangle 7$; $\measuredangle 4 \equiv \measuredangle 8$;

c) *ángulos alternos internos*:
$\measuredangle 3 \equiv \measuredangle 5$; $\measuredangle 4 \equiv \measuredangle 6$;

d) *ángulos alternos externos*:
$\measuredangle 1 \equiv \measuredangle 7$; $\measuredangle 2 \equiv \measuredangle 8$;

e) *ángulos suplementarios*:
Los ángulos entre paralelas que no tienen igual medida, son suplementarios entre sí.
$\measuredangle 1 + \measuredangle 2 = 180º$
$\measuredangle 3 + \measuredangle 4 = 180º$
$\measuredangle 5 + \measuredangle 6 = 180º$
$\measuredangle 7 + \measuredangle 8 = 180º$
$\measuredangle 1 + \measuredangle 4 = 180º$
$\measuredangle 1 + \measuredangle 7 = 180º$
Etc.

6. Propiedades básicas en el triángulo

1. *En todo triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos, pero mayor que su diferencia.*

2. *La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.*

3. *Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a el.*

Ejercicios Psu Matemáticas
Aplicación de definiciones y propiedades básicas de Ángulos

1. Si el complemento de un ángulo α es 2α. ¿Cuál es el valor de α?
   A) 60º
   B) 40º
   C) 45º
   D) 30º
   E) 35º

   Solución:
   Los ángulos α y 2α son complementarios entre sí $\Rightarrow \alpha + 2\alpha = 90º$
   $$3\alpha = 90º$$
   $$\alpha = \frac{90º}{3} = 30º$$
   Alternativa D)

2. ¿Qué medida tiene el menor de dos ángulos suplementarios si uno de ellos tiene 30º más que el otro?
   A) 100º
   B) 150º
   C) 105º
   D) 70º
   E) 75º

   Solución:
   Sea x el menor de los ángulos suplementarios. Entonces, el mayor de los ángulos suplementario es:
   $30º + x$ (Pues, del enunciado, el mayor es 30º más que el menor)

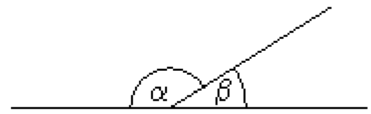
   Ahora bien, por definición de ángulos suplementarios, la suma de ellos es 180º:
   $$x + (30º + x) = 180º$$
   $$2x + 30º = 180º$$
   $$2x = 150º$$
   $$x = \frac{150º}{2} = 75º$$

   Alternativa E)

3. ¿Cuál es el ángulo que es igual al doble de su suplemento?
   A) 45º
   B) 60º
   C) 90º
   D) 120º
   E) 150º

   Solución:
   Es claro que hay dos ángulos suplementarios, x e y.
   Donde $x = 2y$ Uno es igual al doble del otro **(I)**
   Así,
   $$x + y = 180º$$ Ahora reemplazamos la igualdad (I)
   $$2y + y = 180º$$
   $$3y = 180º$$
   $$y = \frac{180º}{3} = 60º$$
   Y el doble de tal ángulo es 120º. Alternativa D)

4. Si el valor de $\alpha - \beta = 106º$, ¿cuál es el valor de β?
   A) 37º
   B) 74º
   C) 143º
   D) 53º
   E) 16º



Solución:
La figura muestra que α y β son adyacentes, entonces: $\alpha + \beta = 180º$ (I)
Y del enunciado: $\underline{\alpha - \beta = 106º}$ (II)
Sumando término a término (I) y (II): $2\alpha = 286º$
Dividiendo por dos: $\alpha = \dfrac{286º}{2} = 143º$
Reemplazando el valor de α en (I)

$$143º + \beta = 180º \Rightarrow \beta = 37º$$

Alternativa A)

5. Dos ángulos complementarios están en la razón de 2: 3, ¿cuánto mide el menor de ellos?
   A) 54º
   B) 36º
   C) 72º
   D) 18º
   E) 40º

Solución:
Los ángulos α y β son complementarios $\Rightarrow \alpha + \beta = 90$ Además, los 90º se dividen en 2 para α + 3 = 5 partes. Así, $90º : 5 = 18º$ es el valor de cada parte.

$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$ A α le corresponden dos de estas partes y a β tres.

$$\Rightarrow \alpha = 2 \bullet 18 = 36º \quad \text{y} \quad \beta = 3 \bullet 18 = 54º$$

El menor de los ángulos es 36º. Nótese que no era necesario calcular β.
Alternativa B)

6. Si un ángulo se disminuye en la mitad de su suplemento, resulta 60º, ¿cuánto medía el ángulo?
   A) 160º
   B) 120º
   C) 100º
   D) 90º
   E) Ninguna de las anteriores.

Solución:
Sean α y β los ángulos suplementarios. Entonces $\alpha + \beta = 180º$. (I)

Si $\alpha - \dfrac{\beta}{2} = 60º \quad / \bullet 2$

$2\alpha - \beta = 120º$ (II)

De (I) y (II) tenemos un sistema de ecuaciones para α y β.
Sumando término a término (I) y (II) se nota que desaparecerá uno de los ángulos desconocidos, quedándonos una sola ecuación para igual número de incógnitas.
Observemos:

$$\begin{array}{l} \alpha + \beta = 180º \\ \underline{2\alpha - \beta = 120º} \\ 3\alpha \quad = 300º \Rightarrow \alpha = \dfrac{300º}{3} = 100º \end{array}$$

Alternativa C)

7. El suplemento de la suma de $\sphericalangle\alpha = 62^\circ\,28'\,12''$ y $\sphericalangle\beta = 79^\circ\,28'\,59''$ es:
   A) $141^\circ\,56'\,71''$
   B) $37^\circ\,57'\,11''$
   C) $179^\circ\,59'\,60''$
   D) $37^\circ\,57'\,11''$
   E) $38^\circ\,2'\,49''$

   Solución:
   Primero veamos la suma y luego su suplemento.

$$\begin{array}{r} 62^\circ\,28'\,12'' \\ +\ \underline{79^\circ\,28'\,59''} \\ 141^\circ\,56'\,71'' \end{array}$$

   Recordando que en el sistema decimal:
   $60''$ pasan a ser $1'$ y a su vez $60'$ pasan a ser 1°
   Así,
   $141^\circ\,56'\,71'' = 141^\circ\,57'\,11''$

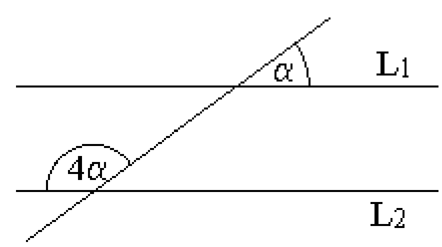
   El suplemento es lo que nos falta para llegar a 180º si ya tenemos 141º 57' 11''
   Lo que nos falta es:

$$180^\circ - 141^\circ\,57'\,11''$$
$$\Rightarrow 179^\circ\,60' - 141^\circ\,57'\,11''$$
$$\Rightarrow 179^\circ\,59'\,60'' - 141^\circ\,57'\,11'' \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 179^\circ\,59'\,60'' \\ -\ \underline{141^\circ\,57'\,11''} \\ 38^\circ\,02'\,49'' \end{array}$$

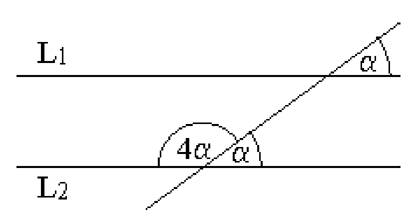
   O bien $38^\circ\ 2'\ 49''$

   Alternativa E).

8. Si $L_1 // L_2$; el valor de α en la figura es:
   A) 36º
   B) 34º
   C) 32º
   D) 30º
   E) 28º



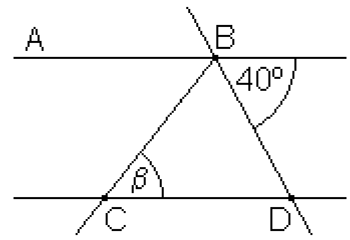
   Solución:
   El ángulo α es correspondiente con el que está sobre la paralela de abajo, de modo que la medida de tal ángulo es igual a α, tal como muestra la figura:
   Notemos que 4α y α son dos ángulos adyacentes suplementarios.
   Es decir:



$$\alpha + 4\alpha = 180^\circ$$
$$5\alpha = 180^\circ$$
$$\alpha = \frac{180^\circ}{5}$$
$$\alpha = 36^\circ$$

   Alternativa A)

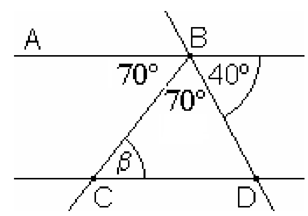
9. Si $\overline{AB} // \overline{CD}$; $\overline{BC}$ bisectriz del $\sphericalangle ABD$ (divide por la mitad a tal ángulo), entonces β = ?
   A) 55º
   B) 40º
   C) 70º
   D) 65º
   E) 50º



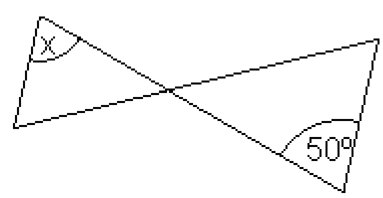
Solución:
A partir de la figura original se observa que el $\sphericalangle\mathrm{ABD}$ y el de 40º son suplementarios. Esto es:

$$\sphericalangle\mathrm{ABD} + 40º = 180º \Rightarrow \sphericalangle\mathrm{ABD} = 180º - 40º = 140º$$

Y por definición de bisectriz, esta divide al ángulo en dos partes iguales. La figura muestra tal situación.
Pero también se observa que uno de ellos es alterno interno con β.
Por lo tanto, β = 70º.
Alternativa C).

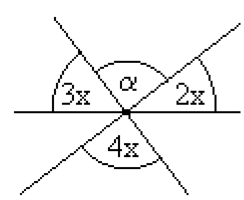


10. Si $L_1 // L_2$, entonces x = ?
   A) 45º
   B) 50º
   C) 55º
   D) 60º
   E) 65º

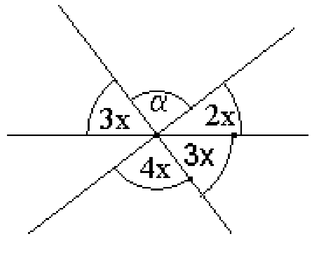


Solución:
$x = 50º$ por ser alternos internos entre //s.
Alternativa B).

11. El valor de α es:
   A) 20º
   B) 40º
   C) 60º
   D) 80º
   E) 90º



Solución:
Tenemos dos incógnitas, pero aplicando el hecho de que ángulos opuestos por el vértice son iguales, se logra formar una media circunferencia (180º) en una sola incógnita:



Así notamos que:

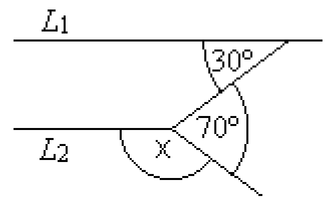
$$4x + 3x + 2x = 180º$$
$$9x = 180º$$
$$x = \frac{180}{9}$$
$$= 20º$$

Sobre la recta horizontal, los ángulos 3*x*, α y 2*x* forman una media circunferencia:

$$5x + \alpha = 180º$$
$$5 \bullet 20º + \alpha = 180º$$
$$100º + \alpha = 180º$$
$$\alpha = 180º - 100º$$
$$= 80º$$

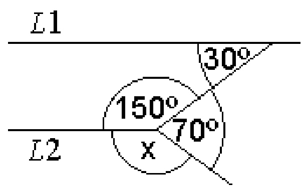
Alternativa D).

12. Se sabe que $L_1 // L_2$; el valor de *x* en la figura es:



A) 70º
B) 140º
C) 135º
D) 155º
E) 150º

Solución:
Los ángulos entre paralelas del mismo lado de la recta transversal siempre son suplementarios. Es decir, que sumados dan 180º. Así, el ángulo situado bajo el de 30º debe ser de 150º.

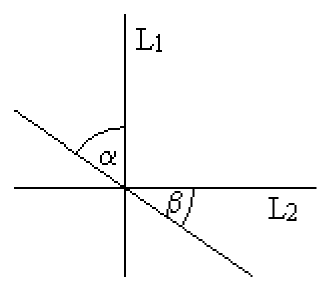


Así, en la circunferencia se observa que:

$$150º + 70º + x = 360º$$
$$220º + x = 360º$$
$$x = 360º – 220º$$
$$= 140º$$

Alternativa B).

13. Si $L_1 \perp L_2$, entonces α = ?



A) 45º
B) 90º – β
C) 180º – β
D) 2β
E) β

Solución:
El ángulo de 90º junto con α y β forman una media circunferencia:

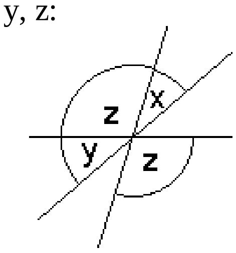
$$90º + \alpha + \beta = 180º$$
$$90º + \alpha + \beta = 180º$$
$$\alpha + \beta = 90º \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90º – \beta$$

Alternativa B)

14. Si x = 52º; y = 26º, entonces z = ?

A) 26º
B) 52º
C) 78º
D) 128º
E) 102º

Solución:
Aplicando el hecho de que ángulos opuestos por el vértice son iguales, se logra formar una media circunferencia (180º) con los ángulos x, y, z:
Así,



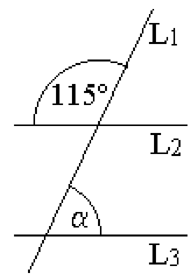
$$x + y + z = 180º$$

Si x = 52º; y = 26º, entonces:

$$52º + 26º + z = 180º$$
$$78º + z = 180º$$
$$z = 180º – 78º = 102º$$

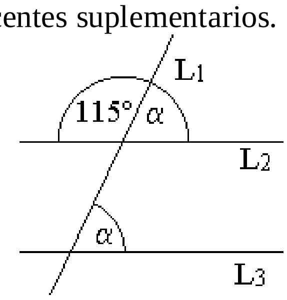
Alternativa E)

15. En la figura, ¿Cuánto mide α?
   A) 65º
   B) 115º
   C) 85º
   D) 105º
   E) Falta información.



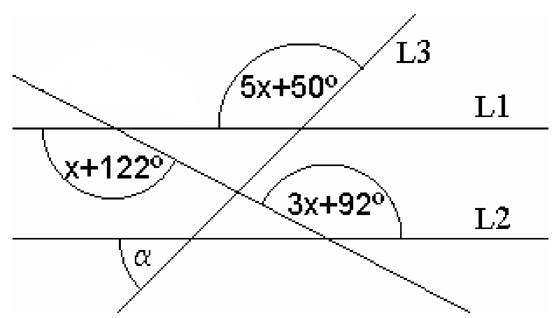
Solución:
α es ángulo correspondiente con el ángulo de la derecha que está sobre la paralela superior, siendo ambos de igual medida, como se muestra en la siguiente figura.
Y sobre la paralela superior, observamos dos ángulos adyacentes suplementarios.
Esto es:

$$115º + \alpha = 180º$$
$$\alpha = 180º - 115º$$
$$\alpha = 65º$$



Alternativa A)

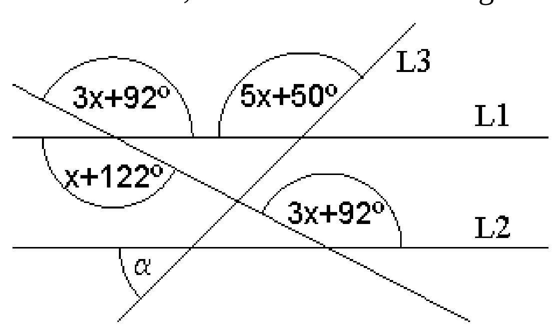
16. Si $L_1 // L_2$, entonces x = ?
   A) 55º
   B) 15º
   C) 125º
   D) 43º
   E) 137º



Solución:
El ángulo $3x + 92º$ se puede proyectar por la recta transversal que tiene por uno de sus lados y corresponderlo sobre la paralela superior o de arriba, tal como muestra la figura.

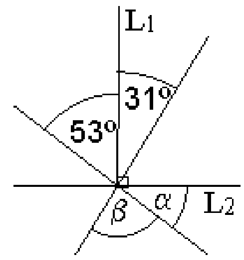
Como tal ángulo es opuesto por el vértice a $x + 122º$, se tiene la igualdad:

$x + 122º = 3x + 92º$
$30º = 2x$
$15º = x$

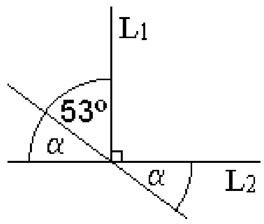


Alternativa B).

17. En la figura, $L_1 \perp L_2$ entonces:
   A) $\alpha + \beta = 84^\circ$
   B) $\beta - \alpha = 22^\circ$
   C) $2\alpha + \beta = 115^\circ$
   D) $\alpha - 2\beta = 9^\circ$
   E) $\beta - 2\alpha = 10^\circ$

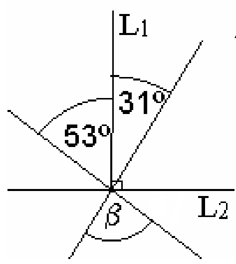


Solución:
Aplicamos ángulos opuestos por el vértice para α, de modo que podemos poner tal medida como muestra la figura.



Como $L_1 \perp L_2$, a cada lado de L_1 y por sobre la recta L_2, se forman ángulos de 90º.
$\alpha + 53^\circ = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$

En la próxima figura notaremos que el ángulo β es igual a la suma de 53º y 31º.

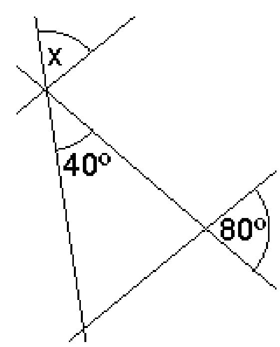


$\beta = 53^\circ + 31^\circ$ (Por ser β ángulo opuesto por el vértice a la suma de ambos).
$= 84^\circ$

De modo que, finalmente, podemos analizar cada una de las alternativas. Conociendo que $\alpha = 37^\circ$ y $\beta = 84^\circ$.
Veamos:
A) es falsa. Pues ya sabemos que tan solo $\beta = 84^\circ$.
B) $\beta - \alpha = 84^\circ - 37^\circ = 47^\circ \neq 22^\circ$. b) es falsa.
C) $2\alpha + \beta = 2 \bullet 37^\circ + 84^\circ = 74^\circ + 84^\circ = 158^\circ \neq 115^\circ$. Falso.
D) $\alpha - 2\beta = 37^\circ - 168^\circ \neq 9^\circ$. Falso.
E) $\beta - 2\alpha = 84^\circ - 70^\circ = 10^\circ$. Verdadero.

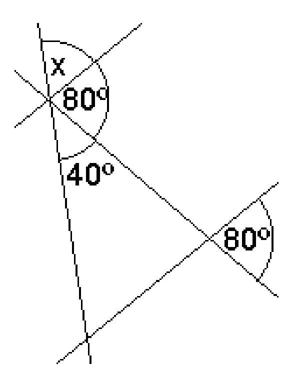
Alternativa E).

18. Si $L_1 // L_2$, entonces x = ?
   A) 80º
   B) 40º
   C) 60º
   D) 120º
   E) 70º



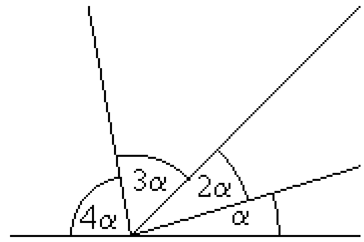
Solución:
Haciendo corresponder el ángulo de 80º bajo la paralela de arriba, tenemos a tres ángulos que forman la medida de media circunferencia, esto es, 180º.

$x + 80^\circ + 40^\circ = 180^\circ$
$x + 120^\circ = 180^\circ$
$x = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$



Alternativa C).

19. En la siguiente figura, el valor de α es:
   A) 20º
   B) 25º
   C) 18º
   D) 24º
   E) 32º

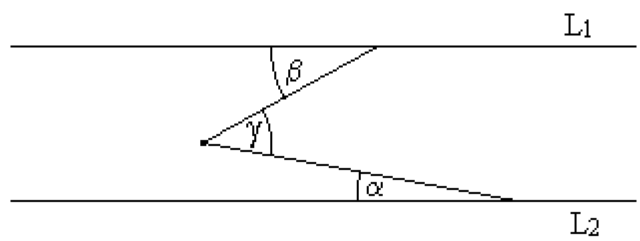


Solución:
Tenemos una serie de ángulos que suman media circunferencia.
$4\alpha + 3\alpha + 2\alpha + \alpha = 180º$

$$10\alpha = 180º \Rightarrow \alpha = \frac{180º}{10º} = 18º$$

Alternativa C)

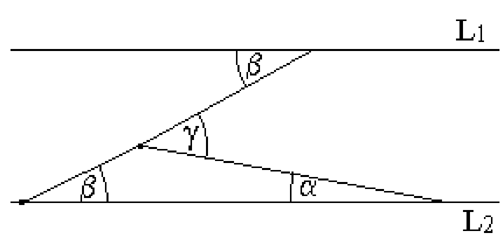
20. Si $L_1 // L_2$, ¿cuál es el valor de γ ?
   A) $\alpha + 2\beta$
   B) $2\alpha + \beta$
   C) $\alpha + \beta$
   D) $2\alpha - \beta$
   E) $2\beta - \alpha$



Solución:
Prolongando el lado común de β y γ se forma un triángulo. Pero además, se forma un ángulo entre las paralelas L_1 y L_2 que es alterno interno con β, y por tanto, igual a el. La figura muestra lo indicado.

En el, hemos de notar que γ es ángulo externo al Δ que se a formado. Y por lo tanto, es igual a los dos ángulos no adyacentes él.
Es decir,

$$\gamma = \alpha + \beta$$



Alternativa C)