II. *Solutio Problematis à Dom^no* G. G. Leibnitio, *Geometris* Anglis *nuper propositi.* *Per* Brook Taylor, *LL. D.* & R. S. *Secr.*

CUM Dom. *G. G. Leibnitius* nuper defunctus, in controversiâ jampridem ortâ circa inventionem Methodi Fluxionum, (quam is Differentialem vocare maluit, sibique pertinaciter appropriari nisus est,) nihil omnino responsi dederit argumentis, quibus inclyti istius Inventi gloria Dom^no *Neutono* vendicatur ; en tandem, hortante Dom^no *Joh. Bernoulli*, Problema Geometris *Anglis* solvendum proposuit ; quo scilicet vires eorum in Methodo istâ experiretur ; quasi Problematis istius Solutioni si cæteri istius Nationis deprehendantur impares, rectè concludatur, nec ipsum *Neutonum*, qui, fatente etiam *Leibnitio*, ab hujusmodi contemplationibus jam jure immunis esse debet, olim fuisse parem inventioni istius Methodi. Sive Problema solvatur, sive insolutum maneat, nihil exinde consequetur quod *Neutonum* afficiat ; nec istis certè *Leibnitii* Fautoribus, qui Problematis solutionem etiamnum continenter efflagitant, jus ullum est nos ad certamen ingeniorum tantâ cum licentiâ provocandi ; adeoque Problema eorum jure merito negligi posset. Verùm ne aliquando exinde occasionem triumphandi arripiant, si hoc Problema maneat ab *Anglis* omninò intactum, ipse, Geometra longè non summi inter nostrates subsellii, inducor, ut solutionem edam qualem qualem Problematis, nec usu, nec difficultate adeò insignis.

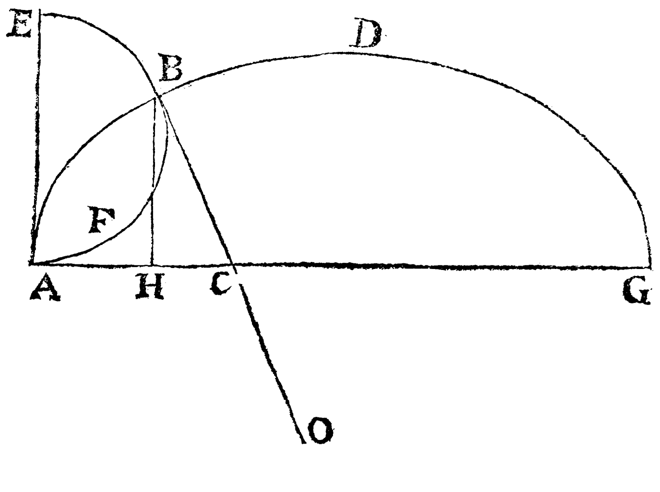
Problema à *Leibnitio* primò propositum, ita fuit intellectum quasi nihil aliud requisitum fuisset, quam ut secarentur ad angulos rectos Hyperbolæ Conicæ iisdem Centro & Verticibus descriptæ. Verùm cum illi nunciatum fuerat hunc casum à quibusdam *Anglis* fuisse illicò solutum, rescripsit, non solutionem casûs particularis, sed generalem requiri. Quo factum est ut solutiones istæ particulares non editæ fuerint; verùm in Transactione Philosophicâ N° 347. subinde prodiit Solutio maximè generalis. Sed nec illâ contenti fuerunt *Leibnitius* & Fautores ejus, quin illam derisui habuêre, quasi qui illam excogitaverat non potuisset eam ad casum specialem applicare. Si nondum viderint quomodo ex illâ æquationes sint deducendæ, id profectò illorum imperitiæ tribuendum erit. Paulò ante *Leibnitii* obitum prodiit tandem Problema sequens; quod quidem diversimodè solvi potest, premendo vestigia Solutionis generalis modò citatæ, sed quod in præsentia solvimus ut sequitur.

Problema.

Super rectâ AG *tanquam axe, ex puncto* A *educere infinitas Curvas, qualis est* ABD, *ejus naturæ, ut radii Osculi, in singulis punctis* B *& ubique ducti*, BO *secentur ab axe* AG *in* C, *in datâ ratione, ut nempe sit* BO *ad* BC *ut* 1 *ad* n.

Deinde construendæ sunt Trajectoriæ EBF *primas Curvas* ABD *normaliter secantes.*

Solutionis



Solutionis Pars prima;

Nempe Inventio Curvarum secandarum ABD.

1. Ductâ ordinatâ BH ad axem AG normali, sint, Abscissa $AH = z$, Ordinata $HB = x$, Curva $AB = v$. Tum per Methodum Fluxionum directam erit $BC = \frac{\dot{v}}{\dot{z}} x$, & fluente uniformiter v, $BO = \frac{\dot{v}\dot{x}}{\ddot{z}}$. Unde per conditionem Problematis fit $BO \left(\frac{\dot{v}\dot{x}}{\ddot{z}}\right) : BC \left(\frac{\dot{v}}{\dot{z}} x\right) :: 1 : n$; adeoque $\ddot{z} x - n \dot{z} \dot{x} = 0$.

2. Collatâ hâc æquatione cum formulâ Fluxionum secundâ, in calce *Prop.* 6. Methodi Incrementorum, invenitur $\dot{z} x^{-n} = \dot{v} \alpha^{-n}$; existente α linea data, per cujus valorem potest Curva ABD accommodari conditioni alicui Problemati annexæ.

3. Pro $\dot{v}$ scripto ipsius valore $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$, migrat æquatio $\dot{z} x^{-n} = \dot{v} \alpha^{-n}$ in hanc $\dot{z} = \frac{\dot{x} x^n}{\sqrt{\alpha^{2n} - x^{2n}}}$. Unde datur z ex datâ x, per quadraturam Curvæ cujus abscissâ existente x est ordinata $\frac{x^n}{\sqrt{\alpha^{2n} - x^{2n}}}$.

4. Sint σ & τ numeri integri, vel affirmativi vel negativi, tales ut sit Curvarum isto modo provenientium simplicissima, ea cujus est Abscissa y, & Ordinata $y^{\frac{1-n+2\sigma n}{2n}} \times \overline{\alpha - y}|^{\tau - \frac{1}{2}}$; tum erit ea omnium Curvarum simplicissima, per quarum Quadraturam datur Abscissa z ex datâ Ordinatâ x.

5. Est Curva ABD Geometrica, quoties pro n sumitur reciprocum numeri cujusvis imparis.

 6. In

6. In prædictis Curvam ABD consideravimus ut versùs axem AG concavam, quo in casu maxima ordinata x æqualis est lineæ datæ α, quam Parametrum Curvæ commode vocare licet. Et in hoc casu Curva actu occurret Axi. Unde fluente ipsius $\frac{\dot{x}x^n}{\sqrt{\alpha^{2n}-x^{2n}}}$ debitè sumptâ, hoc est, ita ut simul evanescant z & x, transibit Curva per punctum datum A, sicut postulat Problema.

7. Sed si quæratur Curva ABD, quæ sit versùs axem convexa, ad eundem modum pervenietur ad æquationem $\dot{z}=\frac{\alpha^n\dot{x}}{\sqrt{x^{2n}-\alpha^{2n}}}$; quæ etiam ex æquatione priori derivari potest mutando signum ipsius n. Et in hoc casu est curva ABD Geometrica, quoties pro n sumitur reciprocum cujusvis numeri paris. In hoc verò casu Ordinata omnium minima x æqualis est Parametro α; adeoque Curva nusquam occurrit Axi. Quare limitatur Problema ad casum priorem.

8. Ex præmissis facilè colligitur Curvas omnes ABD esse inter se similes, & circa punctum datum A similiter positas, lateribus earum homologis existentibus proportionalibus Parametris α.

Solutionis Pars altera;

Nempe Inventio Curvæ secantis.

9. Ex § 2. fit $\dot{v}:\dot{z}::\alpha^n:x^n$. Sed est $BC:BH::\dot{v}:\dot{z}$, Unde fit $BC:BH::\alpha^n:x^n$. Ex conditione verò Problematis est BC tangens Curvæ quæsitæ EBF. Quare si jam sumantur AH (z) & BH (x) pro coordinatis Curvæ EBF, Curvâ ipsâ EB existente r, erit, per Meth. Flux. direct. $\dot{r}:-\dot{x}::(BC:BH::)\,\alpha^n:x^n$. Unde fit $\frac{x^n}{\alpha^n}=\frac{-\dot{x}}{\dot{r}}$.

10. In

10. In Curva ABD finge æquationem $\dot{z} = \frac{\dot{x}x^n}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}}$ transformari in æquationem signis radicalibus non affectam $\dot{z} = A\dot{x}\frac{x^n}{a^n} + B\dot{x}\frac{x^{3n}}{a^{3n}} +$, &c. Tum regrediendo ad Fluentes fiet $z = \frac{1}{n+1}A\frac{x^{n+1}}{a^n} + \frac{1}{3n+1}B\frac{x^{3n+1}}{a^{3n}} +$, &c. coefficiente novâ introductâ nullâ, quoniam per conditionem Problematis debent simul nasci z & x. Hinc vice $\frac{x^n}{a^n}$ substituto ipsius valore $\frac{-\dot{x}}{\dot{r}}$ in § 9 invento, fit $z = \frac{1}{n+1}Ax\frac{-\dot{x}}{\dot{r}} + \frac{1}{3n+1}Bx\frac{-\dot{x}^3}{\dot{r}^3} +$, &c. quæ æquatio fluxionalis est primi gradûs ad Curvam quæsitam EBF. Revocatur autem ad formulam simpliciorem in terminis numero finitis, modo sequenti.

11. Fluat uniformiter r, & existente a quantitate non fluente, sit $\frac{-\dot{x}}{\dot{r}} = \frac{s^n}{a^n}$. Substituto hoc valore ipsius $\frac{-\dot{x}}{\dot{r}}$ in æquatione novissimè inventâ, atque ductâ æquatione in $\frac{s}{x}$, transformatur ea in hanc $\frac{zs}{x} = \frac{1}{n+1}A\frac{s^{n+1}}{a^n} + \frac{1}{3n+1} \times B\frac{s^{3n+1}}{a^{3n}} +$ &c. Unde capiendo Fluxiones fit $\frac{\dot{s}zx + s\dot{z}x - sz\dot{x}}{x^2} = A\dot{s}\frac{s^n}{a^n} + B\dot{s}\frac{s^{3n}}{a^{3n}} = \frac{\dot{s}s^n}{\sqrt{a^{2n} - s^{2n}}}$. Quod ultimum constat ex Analogia Serierum $A\dot{x}\frac{x^n}{a^n} +$ &c. & $A\dot{s}\frac{s^n}{a^n} +$ &c. Hinc pro s & $\dot{s}$ substitutis eorum valoribus ex æquatione $\frac{-\dot{x}}{\dot{r}} = \frac{s^n}{a^n}$ collectis, elicitur æquatio $nx^2zz - xxzz - n\dot{x}xz^2 - \dot{x}\dot{x}x^2 = 0$. Quæ ad Fluxiones primas revocatur modo sequenti.

12. In termino ultimo $-\ddot{x}\dot{x}x^2$ vice $\ddot{x}\dot{x}$ ſcripto ipſius valore $-\dot{z}z$, & æquatione deinde applicata ad z, fit $n\dot{x}^2 z - \ddot{x}xz - nx\dot{x}\dot{z} + x\dot{x}\ddot{z} = 0$. Quæ æquatio in x^{-n-1} ducta eſt Fluxio æquationis $-\dot{x}x^{-n}z + x^{1-n}\dot{z} = a^{1-n}\dot{r}$; exiſtentibus a & r non fluentibus. Eſt ergo $-\dot{x}x^{-n}z + x^{1-n}\dot{z} = a^{1-n}\dot{r}$, ſeu $\overline{\dot{z}x - z\dot{x}} \times a^{n-1} = \dot{r}x^n$, æquatio fluxionalis primi gradûs ad Curvam quæſitam EBF.

13. In iſtâ autem æquatione eſt a valor Ordinatæ BH, quando incidit punctum H in punctum A.

14. Haud proclive eſt æquationem $\overline{\dot{z}x - z\dot{x}} \times a^{n-1} = \dot{r}x^n$, manente n in terminis generalibus, revocare ad æquationem Fluentes tantùm involventem, vel ad quadraturam Curvarum. Sed puncta curvæ EBF poſſunt commodè inveniri per deſcriptionem Curvæ ABD, & Curvæ cujuſdam Geometricæ. Per Geometricam hic intelligo Curvam, cujus æquationem non ingrediuntur Fluxiones, nec fluentes in Indicibus dignitatum. Secetur enim Curva ABD, cujus Parameter ſit α, in B, à Curvâ geometricâ cujus æquatio eſt $a\alpha^n x^n - za^n x^n = xa^n\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}$; atque erit punctum illud interſectionis B ad unam ex Trajectoriis quæſitis, nempe quæ tranſit per punctum E, exiſtente $AE = a$ & normali ipſi AG.

15. Hinc ſi ABD ſit Curva Geometrica, erit etiam EBF geometrica.

Scholium. Poteſt & alio modo inveniri æquatio $\overline{\dot{z}x - z\dot{x}} \times a^{n-1} = \dot{r}x^n$. Nam certâ quâdam Analyſi quam nunc celare ſtatuo, inveni æquationem $\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = \frac{\dot{r}\dot{r}}{\dot{z}\dot{z} + \dot{x}\dot{x}}$. Quâ comparatâ cum æquatione $\frac{x^n}{\alpha^n} = \frac{-\dot{x}}{\dot{r}}$ (§ 9) eliminando α & $\dot{\alpha}$, tandem pervenitur ad prædictam æquationem $\overline{\dot{z}x - z\dot{x}} \times a^{n-1} = \dot{r}x^n$.

Exemplum.

Exemplum. Ad demonſtrationem Solutionis noſtræ ſuffecerit exemplum ſimpliciſſimum. Sit itaque $n=1$; quo in Caſu eſt ABD ſemicirculus diametro AG deſcriptus, atque eſt EBF item ſemicirculus deſcriptus diametro AE. Eſt autem in hoc Caſu $\frac{\dot{x}x^n}{\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}}=\frac{\dot{x}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Unde in § 3. fit $\dot{z}=\frac{\dot{x}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; adeoque $z=a-\sqrt{a^2-x^2}$, quæ æquatio eſt ad Circulum diametro $AG=a$ deſcriptum, ut fieri debuit. Item pro n ſcripto 1, æquatio $\dot{z}x-z\dot{x}\times a^{n-1}=\dot{r}x^n$ (§ 12.) migrat in hanc $\dot{z}x-z\dot{x}=\dot{r}x$. Unde exterminando r ope æquationis $\dot{r}r=\dot{x}x+\dot{z}z$, fit $\frac{2\dot{z}zx-\dot{x}z^2}{x^2}=-\dot{x}$; adeoque regrediendo ad Fluentes $\frac{zz}{x}=-x+a$, quæ æquatio eſt ad Circulum diametro $AE=a$ deſcriptum, ut etiam fieri debuit.

III. *Extract of a Letter of Dr.* Chr. Hunter, *M.D. to Dr.* J. Woodward, *R. S. S. from* Durham, *giving an Account of a* Roman *Inſcription, lately dug up in the North of* England; *with ſome Hiſtorical and Chronological Remarks thereon.*

THE Inſcription which comes herewith, (*Fig.* II.) was dug up, two Years ago, in the *Roman CASTRUM*, near *Lancheſter:* The Inſcription is very legible, and gives me reaſon to hope, a Search after the firſt Fortifying this Place will not be unneceſſary; eſpecially, being able to fix the Time of *Gordian's* Repair-