$$a_1 a_2 a_3 a_4 - a_2 a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_1 a_4 - a_2 a_3 a_4 a_1.$$

Da nun $a_1 = i_0$ gesetzt ist, haben die 4 Glieder allemal denselben Werth, wenn man vom Vorzeichen absieht, und das Vorzeichen ist bei zwei Gliedern gleich und entgegengesetzt dem Vorzeichen der beiden andern. Es wird also der ganze Ausdruck gleich Null. Dasselbe geschieht auch, wenn a_2, a_3 oder a_4 gleich i_0 gesetzt wird.

Damit ist die Allgemeingiltigkeit der Gleichung (5) nachgewiesen. Entsprechend könnte man die entsprechende Gleichung

$$\Sigma \pm a_{s_1} a_{s_2} a_{s_3} a_{s_4} a_{s_5} = 0$$

beweisen. Diese läßt sich übrigens direct aus der andern ableiten, indem man in dem neuen Ausdruck jedesmal solche Glieder zusammenfaßt, welche denselben äußersten Factor links besitzen. Dasselbe gilt von den Ausdrücken, welche analog aus mehr als fünf Quaternionen gebildet werden können.

Die Frage, ob das System der Gleichungen (2) durch die Gleichung (5) vollständig gemacht wird, bleibt noch offen.

Ueber einen Mittelwerthssatz.

Von

O. Hölder.

Vorgelegt von H. A. Schwarz.

1.

Im Messenger of Mathematics vol. XVII no. 10 hat Herr L. J. Rogers gezeigt, wie aus der Thatsache, daß das geometrische Mittel aus beliebig vielen positiven Werthen stets kleiner ist als das arithmetische, eine Reihe von Ungleichungen abgeleitet werden kann. Diese Ungleichungen, welche bei Convergenzuntersuchungen Dienste leisten können, lassen sich aus einem allgemeinen Theorem unmittelbar ableiten, welches durch seinen Zusammenhang mit den Principien der Differentialrechnung ein besonderes Interesse beansprucht.

Bedeutet nämlich $\varphi(x)$ eine Function einer reellen Veränderlichen mit zunehmendem Differentialquotienten, so ist das arithmetische Mittel aus einer beliebigen Zahl von Functionswerthen stets größer als der Functionswerth, welcher dem in derselben Weise gebildeten Mittelwerth der zugehörigen Argumente entspricht. Dabei ist der Begriff des arithmetischen Mittels gleich in der allgemeinen Weise zu nehmen, daß jedem der Werthe, aus welchen dasselbe zu bilden ist, eine beliebige positive Größe als Gewicht zugeordnet wird, so daß also die Formel

$$\frac{a_1\varphi(x_1)+a_2\varphi(x_2)+\cdots+a_n\varphi(x_n)}{a_1+a_2+\cdots+a_n} > \varphi\left(\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)$$

den Ausdruck des genannten Satzes darstellt.

2.

Um diesen Satz zu beweisen, beginne ich mit dem Fall, in welchem zwei Argumente x_1 und x_2 vorhanden sind. Der Mittelwerth werde mit s bezeichnet,

$$s = \frac{a_1x_1+a_2x_2}{a_1+a_2},$$

wo a_1 und a_2 positive Größen bedeuten.

Der Einfachheit wegen möge angenommen werden, daß die Größe x_1 die kleinere sei, so daß also

$$x_1 < s < x_2$$

ist. Nach dem Fundamentalsatz der Differentialrechnung ist nun

$$\varphi(x_1)-\varphi(s) = (x_1-s)\,[\varphi'(x)]_{x_1,s}$$

wo $[\varphi'(x)]_{x_1,s}$ einen unbekannten Mittelwerth aus den Werthen von $\varphi'(x)$ im Intervall $x_1,\ldots s$ bedeutet. Man findet daher

$$\varphi(x_1)-\varphi(s) = \frac{a_2}{a_1+a_2}(x_1-x_2)\,[\varphi'(x)]_{x_1,s}$$

und ganz ebenso

$$\varphi(x_2)-\varphi(s) = \frac{a_1}{a_1+a_2}(x_2-x_1)\,[\varphi'(x)]_{s,x_2}.$$

Indem man jetzt mit a_1 beziehungsweise mit a_2 multiplicirt und dann addirt, ergeben die beiden letzten Gleichungen die Relation

$$a_1\varphi(x_1)+a_2\varphi(x_2)-(a_1+a_2)\varphi(s)$$
$$= \frac{a_1a_2}{a_1+a_2}(x_2-x_1)\left\{[\varphi'(x)]_{s,x_2}-[\varphi'(x)]_{x_1,s}\right\}.$$

Nach Voraussetzung ist der Differentialquotient $\varphi'(x)$ eine zunehmende Function, es ist also auch

$$[\varphi'(x)]_{s,x_2} > [\varphi'(x)]_{x_1,s}$$

und es folgt somit aus der vorhergehenden Relation, daß

$$a_1\varphi(x_1) + a_2\varphi(x_2) - (a_1 + a_2)\varphi(s) > 0$$

ist.

3.

Aus dem zuletzt gewonnenen Resultat kann der gewünschte Beweis durch Wiederholung hergestellt werden. Ich nehme noch weitere $n-2$ Argumente $x_3, x_4, \ldots x_n$ an; die zugehörigen positiven Gewichte seien $a_3, a_4 \ldots a_n$. Zur Abkürzung werde außerdem

$$s_1 = \frac{(a_1 + a_2)s + a_3x_3}{a_1 + a_2 + a_3} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3}{a_1 + a_2 + a_3},$$

$$s_2 = \frac{(a_1 + a_2 + a_3)s_1 + a_4x_4}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4},$$

. . . .

gesetzt.

Nun ist

$$a_1\varphi(x_1) + a_2\varphi(x_2) - (a_1 + a_2)\varphi(s) > 0$$

$$(a_1 + a_2)\varphi(s) + a_3\varphi(x_3) - (a_1 + a_2 + a_3)\varphi(s_1) > 0$$

$$(a_1 + a_2 + a_3)\varphi(s_1) + a_4\varphi(x_4) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\varphi(s_2) > 0$$

. . . .

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})\varphi(s_{n-3}) + a_n\varphi(x_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\varphi(s_{n-2}) > 0.$$

Durch Addition erhält man hieraus

$$a_1\varphi(x_1) + a_2\varphi(x_2) + \ldots + a_n\varphi(x_n)$$
$$-(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\varphi(s_{n-2}) > 0,$$

womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Aus der Art der Herleitung ergiebt sich, daß in der letzten Ungleichung das Zeichen $>$ im strengen Sinn zu nehmen, d. h. die Gleichheit auszuschließen ist, vorausgesetzt, daß die Function $\varphi'(x)$ wirklich stets zunimmt, also in keinem Intervall constant ist, daß ferner die Argumente $x_1, x_2, \ldots x_n$ nicht alle einander gleich sind und die Größen $a_1, a_2, \ldots a_n$ sämmtlich einen von Null verschiedenen Werth haben. Tritt eine der genannten Ausnahmen ein, so ist an Stelle des Zeichens $>$ das Zeichen $\geqq$ zu setzen.

Ein analoger Satz besteht unter der Voraussetzung, daß $\varphi'(x)$ eine abnehmende Function ist; man hat dann das Zeichen $>$ in das Zeichen $<$ zu verwandeln.

4.

Unter der Voraussetzung, daß die Function $\varphi(x)$ einen zweiten Differentialquotienten besitzt, kann noch eine weitere Schlußfolgerung gezogen werden. Zunächst gewinnt der Satz jetzt die Form, daß

$$\frac{a_1\varphi(x_1)+a_2\varphi(x_2)+\cdots\cdot+a_n\varphi(x_n)}{a_1+a_2+\cdots\cdot+a_n} \gtrless \varphi\left(\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\right)$$

ist, je nachdem der zweite Differentialquotient $\varphi''(x)$ in dem ganzen in Betracht kommenden Intervall positiv oder im ganzen Intervall negativ ist.

Ich lasse jetzt die Voraussetzung fallen, daß der erste Differentialquotient immer zunehmen oder immer abnehmen soll. Die Function $\varphi''(x)$ kann also ihr Vorzeichen ändern, dieselbe möge aber zwischen endlichen Grenzen bleiben in dem betrachteten Intervall, in welchem die Argumente $x_1, x_2, \ldots x_n$ gelegen sind. M sei die obere, N die untere Grenze dieser Function. Es ist dann

$$\varphi(x)-\tfrac{1}{2}Nx^2$$

eine Function mit positivem und

$$\varphi(x)-\tfrac{1}{2}Mx^2$$

eine Function mit negativem zweitem Differentialquotienten.

Wendet man auf jede dieser beiden Functionen den gefundenen Satz an, so ergiebt sich, wenn jetzt σ an Stelle von s_{n-2} gesetzt wird, daß der Ausdruck

$$a_1\varphi(x_1)+a_2\varphi(x_2)+\cdots+a_n\varphi(x_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\varphi(\sigma)$$

größer ist als

$$\tfrac{1}{2}N\left\{a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\sigma^2\right\}$$

und kleiner als

$$\tfrac{1}{2}M\left\{a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\sigma^2\right\}.$$

Es ist also

$$a_1\varphi(x_1)+a_2\varphi(x_2)+\cdots+a_n\varphi(x_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\varphi(\sigma)$$
$$=\tfrac{1}{2}[N,\,M]\times\frac{S}{a_1+a_2+\cdots+a_n},$$

wo

$$[N,\,M]$$

einen zwischen N und M gelegenen Werth bedeutet und S eine Abkürzung ist:

$$S =$$
$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2) - (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)^2.$$

Dieser Ausdruck kann auch so dargestellt werden:

$$S = \sum_{\nu,\mu} a_\nu a_\mu x_\mu^2 - \sum_{\nu,\mu} a_\nu a_\mu x_\nu x_\mu,$$

wo die Summationsbuchstaben ν und μ in den Doppelsummen die ganzen Zahlen von 1 bis n durchlaufen. Der Ausdruck

$$\sum_{\nu,\mu} a_\nu a_\mu x_\nu^2 - \sum_{\nu,\mu} a_\nu a_\mu x_\nu x_\mu$$

ist mit dem vorhergehenden identisch. Bildet man die halbe Summe von beiden, so erhält man

$$S = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu,\mu} a_\nu a_\mu (x_\nu - x_\mu)^2.$$

In dieser Summe reduciren sich alle diejenigen Glieder auf Null, für welche $\nu = \mu$ ist. Man kann den Factor $\frac{1}{2}$ weglassen, wenn man dafür die Summe über alle Paare von einander verschiedener Zahlen ν, μ aus der Reihe 1, 2, . . n erstreckt und dabei jedes Zahlenpaar nur einmal nimmt.

Schließlich findet man also

$$\Sigma\, a_\nu \varphi(x_\nu) - \varphi(\sigma) \cdot \Sigma\, a_\nu = \tfrac{1}{2} \mathfrak{M} \frac{\Sigma\, a_\nu a_\mu (x_\nu - x_\mu)^2}{\Sigma\, a_\nu},$$

wo $\mathfrak{M}$ einen Mittelwerth bedeutet aus den Werthen des zweiten Differentialquotienten $\varphi''(x)$, und die Summe im Zähler rechts in der angegebenen Weise aufzufassen ist. Dabei ist

$$\sigma = \frac{\Sigma\, a_\nu x_\nu}{\Sigma\, a_\nu}.$$

5.

Dieses Resultat kann auch aus der Restformel der Taylor'schen Reihe abgeleitet werden. Es ist

$$\varphi(x_\nu) = \varphi(\sigma) + (x_\nu - \sigma)\varphi'(\sigma) + \tfrac{1}{2}(x_\nu - \sigma)^2 \mathfrak{M}_\nu,$$

wo $\mathfrak{M}_\nu$ einen Mittelwerth aus den Werthen der Function $\varphi''(x)$ im Intervall $\sigma \ldots x_\nu$ bedeutet. Multiplicirt man mit a_ν und summirt man von $\nu = 1$ bis $\nu = n$, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}\Sigma\, a_\nu \varphi(x_\nu) &= \varphi(\sigma)\, \Sigma\, a_\nu + \varphi'(\sigma)\, \Sigma\, a_\nu (x_\nu - \sigma) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\, \Sigma\, \mathfrak{M}_\nu a_\nu (x_\nu - \sigma)^2.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\Sigma a_\nu (x_\nu - \sigma) = \Sigma a_\nu x_\nu - \sigma \Sigma a_\nu = 0.$$

Ferner ist nach dem gewöhnlichen Mittelwerthssatz

$$\Sigma \mathfrak{M}_\nu a_\nu (x_\nu - \sigma)^2 = \mathfrak{M} \Sigma a_\nu (x_\nu - \sigma)^2,$$

wo $\mathfrak{M}$ einen Mittelwerth von

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_n$$

bedeutet. Es ist aber

$$\Sigma a_\nu (x_\nu - \sigma)^2 = \Sigma a_\nu x_\nu^2 - 2\sigma \Sigma a_\nu x_\nu + \sigma^2 \Sigma a_\nu.$$

Setzt man hierin

$$\Sigma a_\nu x_\nu = \sigma \Sigma a_\nu,$$

so erhält man

$$\Sigma a_\nu x_\nu^2 - \sigma^2 \Sigma a_\nu,$$

also den früher mit

$$\frac{S}{\Sigma a_\nu}$$

bezeichneten Ausdruck. Damit kommt man auf die Formel

$$\Sigma a_\nu \varphi(x_\nu) - \varphi(\sigma) \Sigma a_\nu = \tfrac{1}{2} \mathfrak{M} \frac{\Sigma a_\nu a_\mu (x_\nu - x_\mu)^2}{\Sigma a_\nu}$$

zurück.

6.

In dem Fall, in welchem zwei Argumente x_1 und x_2 nur vorhanden sind, erhält man, falls $a_1 = a_2 = 1$ gesetzt wird:

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) - 2\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \tfrac{1}{4} \mathfrak{M} \cdot (x_1 - x_2)^2.$$

Dieses Ergebniß ist sehr bekannt. In der Theorie der Functionen zweier reellen Veränderlichen besteht eine analoge Beziehung. Bedeutet nämlich V eine Function von x und y und R den Radius eines Kreises in der Ebene, deren Punkte die Werthepaare x, y vorstellen, so ist

$$\int_P V dp - 2\pi R \cdot V_0 = \tfrac{1}{2} \pi R^3 [\Delta V].$$

Das Integral ist über die Peripherie P des Kreises zu erstrecken, dp ist das Bogenelement. V_0 ist der Werth der Function im Mittelpunkt des Kreises und $[\Delta V]$ ist ein Mittelwerth aus den Werthen der Größe

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

für die Kreisfläche. Unter der Annahme, daß die Function V mit ihren ersten und zweiten Differentialquotienten stetig sei, läßt die genannte Relation sich aus dem Green'schen Satz ableiten.

7.

Es mögen jetzt in der Grundformel für $\varphi(x)$ die einfachsten Functionen eingesetzt werden. Zunächst sei

$$\varphi(x) = x^m,$$

wo m eine beliebige reelle Größe bedeuten soll. Es ist $\varphi''(x) > 0$, wenn $m > 1$ oder $m < 0$ ist, und $\varphi''(x) < 0$, wenn $0 < m < 1$ ist; dabei soll das Argument x auf positive Werthe beschränkt werden. Man findet nun

$$(\Sigma a_\nu)^{m-1} \cdot \Sigma a_\nu x_\nu^m > (\Sigma a_\nu x_\nu)^m,$$

falls $m > 1$ oder $m < 0$ ist. Nimmt man an, daß

$$1 < m < 2$$

ist, so erhält man für den Exponenten $m-1$ die Ungleichung

$$(\Sigma a_\nu)^{m-2} \cdot \Sigma a_\nu x_\nu^{m-1} < (\Sigma a_\nu x_\nu)^{m-1}.$$

Durch Combination der beiden letzten Relationen ergiebt sich

$$\Sigma a_\nu \cdot \Sigma a_\nu x_\nu^m > \Sigma a_\nu x_\nu^{m-1} \cdot \Sigma a_\nu x_\nu.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\Sigma a_\nu x_\nu^m = \tau_m,$$

so kann man die gewonnenen Ungleichungen in die Formen

$$\tau_0^{m-1} \tau_m > \tau_1^m$$

und

$$\tau_0 \tau_m > \tau_{m-1} \tau_1$$

setzen. Da man nun in den Formeln a_ν durch $a_\nu x_\nu^k$ und x_ν durch x_ν^r ersetzen kann, so muß es gestattet sein, in jeder der letzten Ungleichungen die Indices der Größen τ sämmtlich um eine und dieselbe Größe zu vermehren oder zu vermindern, oder diese Indices sämmtlich mit derselben Größe zu multipliciren. Dadurch gewinnt man unmittelbar die von Herrn Rogers aufgestellten Ungleichungen § 3 (1), (2) und § 1 (3), (5).

8.

Setzt man $\varphi(x) = e^x$, so erhält man

$$\frac{a_1 e^{x_1} + a_2 e^{x_2} + \cdots + a_n e^{x_n}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} > e^{\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n}{a_1 + a_2 \cdots + a_n}},$$

oder, wenn

$$e^{x_\nu} = y_\nu$$

gesetzt wird,

$$\left(\frac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right)^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \geq y_1^{a_1} \cdot y_2^{a_2} \ldots . y_n^{a_n}.$$

Dies ist der Satz vom arithmetischen und geometrischen Mittel in seiner allgemeinsten Gestalt, wie ihn Herr Rogers zum Ausgangspunkt wählt, § 1 (1).

Setzt man $\varphi(x) = \log x$, so ergiebt sich, indem man sich auf positive Argumente beschränkt

$$\log \frac{\Sigma a_\nu x_\nu}{\Sigma a_\nu} > \frac{\Sigma a_\nu \log x_\nu}{\Sigma a_\nu},$$

Vgl. a. a. O. § 4.

Falls an Stelle von $\varphi(x)$ die Function $x \log x$ genommen wird, und die Größen

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$$

gesetzt werden, so erhält man wieder für positive Argumente

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \log \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$
$$< \frac{1}{n} \{x_1 \log x_1 + x_2 \log x_2 + \cdots + x_n \log x_n\},$$

oder, wenn man die Logarithmen fortschafft,

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^{x_1 + x_2 + \cdots + x} < x_1^{x_1} \cdot x_2^{x_2} \ldots . x_n^{x_n},$$

Vergl. a. a. O. § 1 (2).

9.

Für die trigonometrischen Functionen ergeben sich folgende Resultate:

$$\frac{a_1 \sin x_1 + a_2 \sin x_2 + \cdots + a_n \sin x_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} < \sin \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n},$$

vorausgesetzt, daß

$$0 < x_\nu < \pi.$$

Liegen die Größen x alle im Intervall $\pi \ldots 2\pi$ so hat man an Stelle des Zeichens $<$ das Zeichen $>$ zu nehmen. Ebenso findet man

$$\frac{a_1 \operatorname{tg} x_1 + a_2 \operatorname{tg} x_2 + \cdots + a_n \operatorname{tg} x_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} > \operatorname{tg} \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n},$$

falls die Argumente alle im Intervall $0 \cdots \frac{\pi}{2}$ oder alle im Intervall $\pi \cdots \frac{3\pi}{2}$ gelegen sind. Für die Intervalle $\frac{\pi}{2} \cdots \pi$ und $\frac{3\pi}{2} \cdots 2\pi$ gilt wieder das Umgekehrte.

10.

Von dem bekannten Satz, daß (für $m > 1$)

$$n^{m-1} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^m > \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \right)^m$$

ist, welcher durch Specialisirung einer unter 7. gegebenen Formel sich ergiebt, folgt hier noch eine Anwendung auf Reihenconvergenz. Ich beweise den Lehrsatz: Wenn für die positiven Größen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu^m \qquad (m > 1)$$

convergirt, so gilt dasselbe von der Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x_\nu}{\nu^{\frac{m-1}{m}+\varrho}},$$

wenn $\rho > 0$ ist.

Aus der gegebenen Formel schließt man, daß

$$\sum_{1}^{n} x_\nu < n^{\frac{m-1}{m}} \left(\sum_{1}^{n} x_\nu^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

ist, also wegen der Convergenz der Summe

$$\sum_{1}^{\infty} x_\nu^m,$$

daß für jeden Werth von n

$$\sum_{1}^{n} x_\nu < \text{const. } n^{\frac{m-1}{m}}$$

bleibt.

Wendet man jetzt die partielle Summation an, so ergiebt sich, indem

$$\sigma_n = \sum_{1}^{n} x_\nu$$

gesetzt wird:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu}{\nu^{\frac{m-1}{m}+\varrho}} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \sigma_\nu \left\{ \frac{1}{\nu^{\frac{m-1}{m}+\varrho}} - \frac{1}{(\nu+1)^{\frac{m-1}{m}+\varrho}} \right\} + \frac{\sigma_n}{n^{\frac{m-1}{m}+\varrho}}.$$

Weil nun

$$\sigma_n < \text{const. } n^{\frac{m-1}{m}}$$

ist, so muß

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n}{n^{\frac{m-1}{m}+\varrho}} = 0$$

sein, denn ρ ist eine positive, von Null verschiedene Größe. Um den anderen Theil zu beurtheilen, entwickelt man

$$\frac{1}{\nu^{\frac{m-1}{m}+\varrho}} - \frac{1}{(\nu+1)^{\frac{m-1}{m}+\varrho}} = \frac{1}{\nu^{\frac{m-1}{m}+\varrho}} \left\{ 1 - \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{-\frac{m-1}{m}-\varrho} \right\}.$$

Wenn ν unendlich wächst, so erhält das Verhältniß der rechten Seite dieser Gleichung zur Größe

$$\left(\frac{m-1}{m} + \rho\right) \frac{1}{\nu^{\frac{m-1}{m}+\varrho+1}}$$

den Grenzwerth 1. Es convergirt also die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu \left\{ \frac{1}{\nu^{\frac{m-1}{m}+\varrho}} - \frac{1}{(\nu+1)^{\frac{m-1}{m}+\varrho}} \right\},$$

denn sie reducirt sich auf

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu^{\varrho+1}},$$

wo die Größen A_ν unter einer festen Grenze liegen.

Durch Zusammenfassung des Vorhergehenden erhärtet man die behauptete Convergenz der Summe

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x_\nu}{\nu^{\frac{m-1}{m}+\varrho}}.$$

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September, October 1888.

(Fortsetzung.)

Bulletin de l'Academie R. des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique. 58 année, 3. série, tom. 16. N. 7. 8.