

III. *Specimina quædam illustria Doctrinæ Fluxionum sive exempla quibus Methodi istius Usus & præstantia in solvendis Problematis Geometricis elucidatur, ex Epistola Peritissimi Mathematici D. Ab. de Moivre desumpta.*

**H**Abes insuper Methodum quam pollicitus eram de Figurarum Curvilinearum Quadraturis ; de Solidorum à rotatione plani genitorum eorumque Superficierum dimensione ; de rectificatione Curvarum, deque Centri Gravitatis Calculo. Ea à multis doctissimis viris tractata fuisse scio ——— non ideo hoc meum qualecunque tentamen tibi displiciturum existimavi, si modo mihi contigerit ad hæc viam expeditiorem quam quæ vulgo nota est reperisse.

Verum priusquam ulterius progrediar hoc te monitum velim me usurpare illa quæ demonstravit Clarissimus *Newtonus* in pag. 251, 252 & 253 *Princ. Phil.* circa momentanea incrementa vel decrementa quantitatum quæ fluxu continuo crescunt vel decrescunt, præsertim quod dignitatis cujuscunque

$A^{\frac{n}{m}}$  momentum sit  $\frac{n}{m} a A^{\frac{n}{m}} - 1$ .

Porro data fluxione  $\frac{n}{m} a A^{\frac{n}{m}} - 1$  vicissim reperiri potest

quantitas fluens  $A^{\frac{n}{m}}$ , 1<sup>o</sup> tollendo  $a$  de fluxione, 2<sup>o</sup> fluxionis Indicem unitate augendo, 3<sup>o</sup> denique fluxionem dividendo per Indicem sic unitate auctum.

Curvæ abscissa designabitur deinceps per  $x$ , ejus fluxio per  $\dot{x}$ , ordinatim applicata per  $y$ , ejusque fluxio per  $\dot{y}$

His positis ut ad quadraturas deveniamus, 1<sup>o</sup> assumatur valor ordinatim applicatæ opæ æquationis naturam Curvæ exprimentis. 2<sup>o</sup> Multiplicetur hic valor per fluxionem abscissæ ; Rectangulum hinc ortum erit fluxio areæ. 3<sup>o</sup> Datâ fluxione Areæ reperiatur quantitas fluens, habebitur Area quæsita.

Proponatur æquatio  $x^m = y^n$  cujusvis Paraboloidos naturam exprimens, valor ordinatim applicatæ  $y$  est  $x^{\frac{m}{n}}$  qui si multipli-

multiplicetur per  $x$ , rectangulum  $x^{\frac{m}{n}} x$  erit fluxio Areae, proindeque Area quaesita erit  $\frac{n}{m+n} x^{\frac{m}{n}} + I$ , seu (posito  $y$  pro  $x^{\frac{m}{n}}$ )  $\frac{n}{m+n} x y$ :

Rursum proponatur Curva cujus aequatio sit,  $x^4 + aa xx = yy$  (illa scilicet quae inter exempla Cl. *Craigi* extat prima) assumpto  $x \sqrt{xx + aa} = y$ , fluxio Areae erit  $x \dot{x} \sqrt{xx + aa}$ ; Cum autem sub Radicalitate involvatur, supponatur  $\sqrt{xx + aa} = z$ , hinc  $xx + aa = z^2$ , ideoque  $x \dot{x} = z \dot{z}$ ; positisque  $z \dot{z}$  &  $z$  pro  $x \dot{x}$  &  $\sqrt{xx + aa}$ , fluxio à Surdis liberata erit  $z^2 \dot{z}$ , quam si ad originem suam  $\frac{2}{3} z^3$  revocaverimus, repositoque  $\sqrt{xx + aa}$  pro  $z$ , habebitur  $\frac{2}{3} xx + aa \sqrt{xx + aa}$  pro Area quaesita.

Sed quo magis constet quam facili negotio conficiantur huiusmodi quadraturae, unum amplius exemplum proferre visum est; aequatio Curvae talis sit  $\frac{x^2}{x+a} = y^2$ , igitur  $y = \sqrt{\frac{x}{x+a}}$

ideoque  $\frac{x \dot{x}}{\sqrt{x+a}}$  est fluxio Areae: supponatur  $\sqrt{x+a} = z$ ,

hinc  $x = zz - a$ , &  $\dot{x} = 2z \dot{z}$ , Itaque  $\frac{x \dot{x}}{\sqrt{x+a}} = 2z^2 \dot{z} - 2a \dot{z}$ ,

ac proinde  $\frac{2}{3} z^3 - 2a z$  seu  $\frac{2}{3} x - \frac{4}{3} a \sqrt{x+a}$  erit Area quaesita.

Verum saepe accidit ut quaedam Curvae, quales Circulus & Hyperbola, ejus naturae sint, ut frustra tentaveris earum fluxiones Surdis immunes facere; tunc valore ordinatae in seriem infinitam coniecto, singulisque hujus seriei terminis per fluxionem abscissae, ut supra, multiplicatis, reperiatur singulorum terminorum quantitas fluens, oriatur nova series quae quadraturam Curvae exhibebit.

Methodus haec eadem facilitate ad dimensionem Solidorum à plani circumvolutione genitorum accomodatur, nempe assumendo pro eorum fluxione productum ex fluxione abscissae per circumulum basis; Ratio quadrati ad circumulum sibi inscriptum vocetur  $\frac{n}{I}$ , aequatio circulo competens est  $yy = dx - xx$ ,

igitur  $4 \frac{\sqrt{dxx - x^2}}{n}$  est fluxio portionis Sphæræ, igitur

$4 \frac{\sqrt{\frac{1}{2}dxx - \frac{1}{8}x^3}}{n}$  est portio ipsa, huic circumscriptus cylindrus est

$4 \frac{\sqrt{dxx - x^3}}{n}$ , ideoque ratio portionis Sphæræ ad circumscriptum cylindrum est ut  $\frac{1}{2}d - \frac{1}{8}x$  ad  $d - x$ .

Rectificatio curvarum obtinebitur, si Hypothenusa Trianguli rectanguli cujus latera sunt fluxiones abscissæ & ordinatæ, tanquam Curvæ fluxio consideretur, sed curandum est ut, in expressione istius hypothenusæ, alterutra fluxionum solummodo superfit, ac una tantum indeterminatarum, illa scilicet cujus fluxio retinetur. Res Exemplis clarior fiet.

Ex dato sinu recto, CB arcum A C invenire, positis  $AB = x$ ,  $CB = y$ ,  $OA = r$ ; sit CE fluxio abscissæ, ED fluxio ordinatæ applicatæ, CD fluxio arcus CA; Ex Circuli proprietate  $2rx - xx = yy$ , unde  $2rx - 2xx = 2yy$ , ideoque

Fig. prima.  $\dot{x} = \frac{yy}{r-x}$ , sed  $CD q = \ddot{y}y + \dot{x}x = \ddot{y}y + \frac{y^2 \ddot{y}}{rr - 2rx + xx}$   
 $= \ddot{y}y + \frac{y^2 \ddot{y}}{rr - yy} = \frac{rr \ddot{y}y}{rr - yy}$  igitur  $CD = \frac{ry}{\sqrt{rr - yy}}$ , sed  
 $\frac{ry}{\sqrt{rr - yy}}$  factum est ex  $\frac{1}{\sqrt{rr - yy}}$  seu  $(rr - yy)^{-\frac{1}{2}}$  in  $ry$

proindeque si  $(rr - yy)^{-\frac{1}{2}}$  conjiciatur in seriem infinitam cujus singula membra per  $ry$  multiplicentur, & ex unoquoque producto ad quantitatem fluentem fiat retrogressus, habebitur longitudo arcus A C.

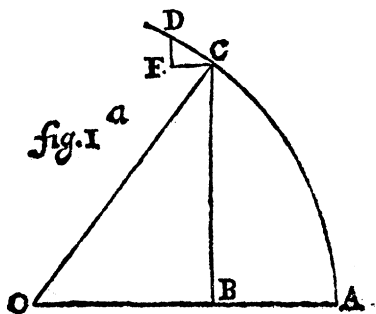
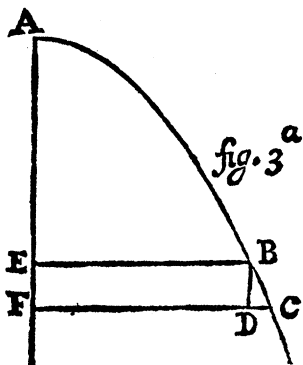
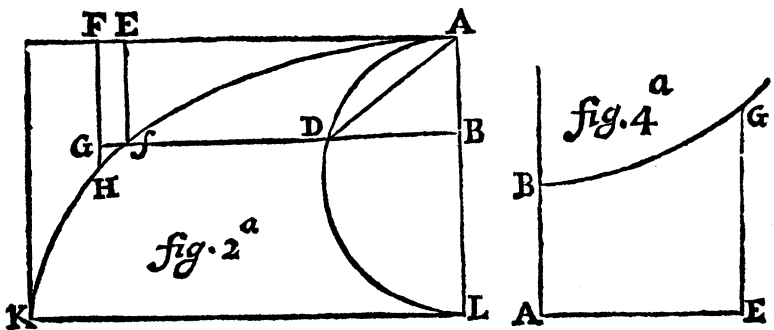
Non absimili modo ex dato sinu verso reperietur idem arcus; Resumaturn æquatio supra inventa  $2rx - 2xx = 2yy$ ,

fit  $y = \frac{rx - xx}{2y}$ , sed  $CD q = \dot{x}x + \dot{y}y =$

$$\dot{x}x + \frac{rr \dot{x}x - 2rx \dot{x}x + x^2 \dot{x}x}{yy} = \dot{x}x + \frac{rr \dot{x}x - 2rx \dot{x}x + x^2 \dot{x}x}{2rx - xx}$$

seu (omnibus sub eodem denominatore reductis, expunctisque iis quæ sub diversis signis continentur)  $= \frac{rx \dot{x}x}{2rx - xx}$

unde  $CD = \frac{rx \dot{x}}{\sqrt{2rx - xx}}$ , ideoque longitudo arcus A C per ea quæ jam dicta sunt facile obtinebitur. Fluxio



See Page 54.

Fluxio curvæ facilius interdum reperitur per comparationem inter Triangula similia CED, CBO, institui enim potest hæc proportio, CB, CO :: CE, CD, hoc est, pro

$$\text{circulo, } \sqrt{2rx - xx}, r :: x, \frac{rx}{\sqrt{2rx - xx}}$$

Curva Cycloidis eadem opera cognosci poterit. Sit ALK femicyclois cujus circulus genitor ADL. Assumpto in diametro AL quovis puncto B, ducatur Bj parallela basi LK, peripheriæ circuli in puncto D occurrens; compleatur rectangulum AEjB ducaturque FH rectæ Ej parallela, eidemque infinite vicina, Bj productam secans in G, curvamque AK in H; ponatur AL = d, AB = Ej = x, GH = x; Notum est rectam BG esse ubique aggregatum arcus AD & sinus recti BD, hinc manifestum est fluxionem jG esse aggregatum fluxionum arcus AD & sinus recti BD. Porro fluxio arcus AD

reperita est =  $\frac{\frac{1}{2} d \dot{x}}{\sqrt{dx - xx}}$ , fluxio autem sinus recti BD re- Fig. secund.  
da.

perietur =  $\frac{dx - 2x\dot{x}}{2\sqrt{dx - xx}}$ , igitur jG =  $\frac{dx - x\dot{x}}{\sqrt{dx - xx}}$ , ideoque

jHq = jGq + GHq =  $\frac{dd\ddot{x}x - dx\dot{x}\dot{x}}{dx - xx}$ , Quamobrem jH =

$$\frac{x\sqrt{dd - dx}}{\sqrt{dx - xx}} = \frac{x\sqrt{d}}{\sqrt{x}} = d^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \dot{x}, \text{ proindeque } Aj = 2d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \\ = 2\sqrt{dx} = 2AD.$$

Hæc conclusio minimo cum labore deduci potest ex nota proprietate Tangentis, cum enim illius portiuncula jH semper sit parallela chordæ AD, sit ut Triangula jGH, ABD sint similia, unde AB, AD :: GH, jH, hoc est x,  $\sqrt{dx} :: x,$

$$\frac{x\sqrt{dx}}{x}, \text{ igitur } jH = \frac{x\sqrt{dx}}{x} = d^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \dot{x}.$$

Sed nihil vetat quominus adhibito fluxionis jH auxilio, ipsam Cycloidis aream investigemus. Fluxio Areæ AEj est

rectangulum E j G =  $\frac{dx\dot{x} - x^2\dot{x}}{\sqrt{dx - xx}} = x\sqrt{dx - xx},$  sed flu-

xio portionis ABD non alia est ab illa: Itaque Area AEj, correspondensque circuli portio ABD semper sunt æquales.

Esto AB curva Parabolæ cujus Axis AF, parameter a; ponatur AE = x, EB = y, AB = z, BD = x, DC = y; Fig. ter.

BC = x, assumptâ æquatione Parabolæ naturam constituyente,

videlicet  $ax = yy$ , fit  $ax = 2yy$ , unde  $x = \frac{2yy}{a}$ , sed

$BCq = BDq + CDq$ , hoc est  $\ddot{x}x = \dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} = \frac{4y^2\ddot{y}}{aa} +$   
 $+ \dot{y}\dot{y} = \frac{4y^2\ddot{y} + aa\dot{y}\dot{y}}{aa}$ , ideoq;  $\dot{x} = y \frac{\sqrt{4\dot{y}^2 + aa}}{a}$  vel, quod

idem est,  $\dot{x} = y \frac{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}aa}}{\frac{1}{2}a}$ : si ergo  $y \frac{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}aa}}{\frac{1}{2}a}$  in feriem  
 infinitam transformetur, Curva AB haud difficulter inno-  
 tescet.

Insuper, statim apparet, dato Hyperbolico spatio curvam  
 hanc dari, & vicissim. Nam  $\frac{1}{2}a\dot{x} = y \frac{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}aa}}{\frac{1}{2}a}$ , ac pro-  
 inde  $\frac{1}{2}a\dot{x} =$  spatio cujus fluxio est  $y \frac{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}aa}}{\frac{1}{2}a}$ , sed hujus-  
 modi spatium nihil aliud est quam hyperbola æquilatera ex-  
 terior ABEG, cujus semiaxis AB =  $\frac{1}{2}a$ , abscissa AE =  $y$ ,  
 ordinatim applicata EG =  $x$ .

Ad dimetiendam superficiem conversione curvæ circa  
 suam Axem descriptam, assumi debet pro ejus fluxione Cy-  
 lindrica superficies cujus altitudo est ipsa curvæ fluxio, cujusque  
 distantia ab Axe est ordinatim applicata huic fluxioni con-  
 veniens.

Sit Ex. gr. AC circuli arcus qui circa Axem AD revolen-  
 do superficiem Sphæricam generet, quamque dimetiri statua-  
 mus; DC arcus fluxio jam reperta est  $\frac{r\dot{x}}{\sqrt{2rx - xx}}$  hanc si  
 multiplicemus per circumferentiam ad radium BC pertinen-  
 tem, hoc est per  $\frac{c}{r} \sqrt{2rx - xx}$  (posita ratione circumfe-  
 rentiæ ad radium =  $\frac{c}{r}$ ) habebimus fluxionem superficiæ  
 Sphæricæ =  $c\dot{x}$ ; adeoque superficies ipsa est  $c x$ .

Ad centra gravitatis quod attinet, repertâ superficiæ soli-  
 dæ fluxione, hacque ducta in suam à Vertice distantiam, ad  
 quantitatem fluentem recurrendum est: qua divisa per Super-  
 ficem ipsam Solidumve ipsam, prodibit distantia centri Gra-  
 vitatis à Vertice.

Inveniendum

Inveniendum fit centrum gravitatis omnium Paraboloidum horum fluxio sic generaliter exprimitur  $x^{\frac{m}{n}} x$ , hanc multiplicata per  $x$ , fit  $x^{\frac{m}{n} + 1} x$ ; cujus quantitatem fluentem  $\frac{n}{m+2n} x^{\frac{m}{n} + 2}$  divide per Paraboloidos aream puta  $\frac{n}{m+n} x^{\frac{m}{n} + 1}$ ; prodibit  $\frac{m+n}{m+2n} x$ , distantia centri gravitatis à Vertice.

Centrum gravitatis in portione Sphæræ eodem modo colligitur, namque illius fluxione  $4 \frac{dx x - x^2 x}{n}$  in  $x$  ductâ fit  $4 \frac{dx^2 x - x^3 x}{n}$ , cujus quantitas fluens  $4 \frac{\frac{1}{2} dx^3 - \frac{1}{4} x^4}{n}$  per Portionis soliditatem divisa, puta  $4 \frac{\frac{1}{2} dx x - \frac{1}{4} x^3}{n}$  exhibet  $\frac{\frac{1}{2} d - \frac{1}{4} x}{\frac{1}{2} d - \frac{1}{4} x} x$ , seu  $\frac{4d - 3x}{6d - 4x} x$  distantiam centri gravitatis à Vertice.

Non statutum habui omnes difficultates quibus calculus iste obnoxius est hic prosequi, mihi sufficiat ad majora viam aperuisse, Tu interim, Vir Clarissime, Vale & me ama.