Die weitere Aufgabe der im Vorstehenden entwickelten Theorie besteht nunmehr in der wirklichen Durchführung der den oben angedeuteten Anzahlbestimmungen zu Grunde liegenden algebraischen Processe.

Bemerkung zur Quaternionentheorie.

Von

O. Hölder.

Vorgelegt von H. A. Schwarz.

Für die Grundoperationen im Gebiete der reellen und der gewöhnlichen complexen, in der Form $x + yi$ enthaltenen Größen bestehen die Gesetze:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} a + b &= b + a \\ (a + b) + c &= a + (b + c) \\ a \,.\, b &= b \,.\, a \\ (ab) \,.\, c &= a(bc) \\ (a + b) \,.\, c &= ac + bc. \end{aligned}\right.$$

Die umgekehrten Operationen, Subtraction und Division können hier übergangen werden. Das angegebene System ist vollständig. Bedeuten nämlich $a_1, a_2, \ldots a_n$ ganz willkürlich veränderliche Größen, und bildet man aus diesen unter Hinzunahme von einigen bestimmt gegebenen reellen Größen durch mehrfache Anwendung der Addition und Multiplication neue Größen, welche also Functionen von $a_1, a_2, \ldots a_n$ sind, so ist die fundamentale Frage die: Unter welcher Bedingung stimmen zwei solcher Functionen, die verschieden gebildet sind, für alle Werthe der Größen $a_1, a_2, \ldots a_n$ überein? Diese Frage ist gleichwerthig mit der folgenden: Wann ist eine solche Größe für alle Werthe von $a_1, a_2, \ldots a_n$ gleich Null? Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn der fragliche Ausdruck vermöge der mit (1) bezeichneten Relationen identisch zu Null gemacht werden kann. Es ist wohl kaum hinzuzufügen, daß der Begriff „identisch" hier nicht in dem sonst in der Algebra üblichen Sinn, sondern nur seinem rein logischen Inhalt nach zu nehmen ist.

Der Beweis der aufgestellten Behauptung ergiebt sich daraus, daß jeder durch Addition und Multiplication gebildete Ausdruck mit Hilfe der Gleichungen (1) geordnet werden kann, und daß der geordnete Ausdruck nach dem Cartesischen Satz nicht für alle

Werthe der Veränderlichen gleich Null sein kann, ohne daß alle Coefficienten gleich Null sind.

In diesem Sinn besitzt also das System der Gleichungen (1) den Charakter der Vollständigkeit.

Betrachtet man jetzt die Hamilton'schen Quaternionen, so bleiben von den Gleichungen (1) nur die folgenden bestehen:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} a+b &= b+a \\ (a+b)+c &= a+(b+c) \\ (ab).c &= a.(bc) \\ (a+b).c &= ac+bc. \end{aligned} \right.$$

Dazu muß wegen des Wegfalls des commutativen Gesetzes bei der Multiplication noch die Gleichung

$$(2) \qquad c(a+b) = ca+cb$$

besonders hinzugefügt werden.

Es erhebt sich nun die Frage, ob dieses letzte Gleichungssystem für die Quaternionen in derselben Weise vollständig ist, wie das andere für die gewöhnlichen complexen Größen. Diese Frage ist zu verneinen.

Bedeuten $a_1, a_2, \ldots a_n$ Quaternionen, welche als willkürlich veränderlich gedacht werden, so mögen aus diesen wieder durch Addition und Multiplication zusammengesetzte Ausdrücke gebildet werden. Es ist vortheilhaft noch gewisse constante reelle Größen als Multiplicatoren mit hinzuzunehmen, man hat dann zugleich auch die Subtraction mit in den Kreis der Operationen eingeschlossen. Für die Multiplication der Quaternionen mit reellen Größen p, q, hat man dann noch die Gleichungen hinzuzunehmen

$$(3) \qquad \begin{aligned} p(a+b) &= pa+pb \\ (p+q)a &= pa+qa \\ (pa).(qb) &= pq(ab) \\ p.(qa) &= (pq).a. \end{aligned}$$

Will man nun eine in der angegebenen Weise zusammengesetzte, von $a_1, a_2, \ldots a_n$ abhängende Quaternion darauf untersuchen, ob dieselbe für alle Werthe dieser Veränderlichen gleich Null ist, so hat man nur in die vier Bestandtheile aufzulösen. Jede Quaternion a_k ist nichts anderes als ein Symbol

$$a_k = \alpha_k i_0 + \beta_k i_1 + \gamma_k i_2 + \delta_k i_3,$$

wo $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ reelle Größen sind, und wobei die Multiplication der Symbole durch die Multiplicationsformeln für die Einheiten

$$i_0^2 = i_0\,,\quad i_0 i_1 = i_1 i_0 = i_1\,,\quad i_0 i_2 = i_2 i_0 = i_2\,,\quad i_0 i_3 = i_3 i_0 = i_3,$$
$$i_1^2 = -i_0\,,\quad i_2^2 = -i_0\,,\quad i_3^2 = -i_0\,,$$
$$i_1 i_2 = i_3\,,\quad i_2 i_3 = i_1\,,\quad i_3 i_1 = i_2\,,$$
$$i_2 i_1 = -i_3\,,\quad i_3 i_2 = -i_1\,,\quad i_1 i_3 = -i_2$$

definirt ist. Löst man also die Quaternionen auf, so führen die Gleichungen (1) zum Ziel. Es ist aber nicht möglich, wie nachher gezeigt wird, die Untersuchung dadurch schon zu führen, daß man, ohne die Quaternionen in ihre Bestandtheile aufzulösen, den betreffenden Quaternionenausdruck mit Hilfe der Gleichungen (2) und (3) identisch zu Null zu machen sucht.

Man kann dagegen die Frage aufwerfen, ob man den Gleichungen (2) noch eine oder mehrere Gleichungen hinzufügen kann, so daß das System dadurch ein im angegebenen Sinne vollständiges ist.

Die zu untersuchenden Ausdrücke sind nichts Anderes als ganze Functionen von Quaternionen mit reellen Coefficienten. Man setze jetzt für $a_1, a_2, \dots a_n$ die Quaternionen

$$t_1 a_1\,,\quad t_2 a_2\,,\ \dots\ t_n a_n\,,$$

wo $t_1, t_2, \dots t_n$ beliebige reelle Größen sind, so kann man auch nach diesen letzteren ordnen. Wenn der Ausdruck für alle Werthe der $a_1 \dots a_n$, also auch der Größen t verschwindet, ergiebt eine nähere Ueberlegung, daß die Quaternion verschwinden muß, welche mit dem Product

$$t_1^{m_1} t_2^{m_2} \dots t_n^{m_n}$$

multiplicirt ist. Es muß also dann ein Ausdruck gleich Null sein in dessen sämmtlichen Gliedern a_1 genau m_1 Mal, a_2 genau m_2 Mal, $\dots a_n$ genau m_n Mal als Factor vorkommt. Es könnten also noch Gleichungen von folgender Form hinzukommen:

$$\Sigma C_{s_1 s_2 \dots s_\nu} a_{s_1} a_{s_2} \dots a_{s_\nu} = 0, \tag{4}$$

wo die Größen $C_{s_1 s_2 \dots s_\nu}$ reelle Coefficienten sind, und die Summe über gewisse Permutationen $s_1, s_2, \dots s_\nu$ bestimmter Zahlen $r_1, r_2, \dots r_\nu$ sich erstreckt. Die Zahlen r sind aus der Reihe $1, 2, \dots n$ entnommen, und es können auch gleiche unter denselben sein.

Hier möge nur der Fall betrachtet werden, in welchem die Größen $r_1, r_2, \dots r_\nu$ von einander verschieden sind; man könnte die andern Fälle auf diesen zurückführen, was hier nicht ausgeführt werden soll. Man denke sich jetzt

$$\alpha_{r_1} i_0 + \beta_{r_1} i_1 + \gamma_{r_1} i_2 + \delta_{r_1} i_3$$

für a_{r_1} eingesetzt und entsprechend mit den Quaternionen a_{r_2}, $a_{r_3}, \ldots a_{r_\nu}$ verfahren, dann kann man nach den Größen α, β, γ, δ ordnen. Mit dem Product

$$\alpha_{r_1} \beta_{r_2} \gamma_{r_3} \alpha_{r_4} \ldots \alpha_{r_\nu},$$

welches ich als Beispiel herausgreife, erscheint die Quaternion multiplicirt, welche aus dem Ausdruck (4) dadurch hervorgeht, daß die Einheiten

$$i_0,\ i_1,\ i_2,\ i_0,\ \ldots i_0$$

beziehungsweise für a_{r_1}, a_{r_2}, a_{r_3}, $a_{r_4}, \ldots a_{r_\nu}$ gesetzt werden.

Wenn die Gleichung (4)

$$\Sigma\, C_{s_1 s_2 \ldots s_\nu} a_{s_1} a_{s_2} \ldots a_{s_\nu} = 0$$

bestehen soll, so muß dieselbe auch erfüllt sein, wenn für die Größen $a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_\nu}$ irgend welche Einheiten aus der Reihe

$$i_0,\ i_1,\ i_2,\ i_3$$

gesetzt werden. Aus dem unmittelbar vorhergehenden folgt zugleich, daß es auch hinreicht, wenn die Gleichung bei jeder Wahl der Einheiten erfüllt ist.

In der That existiren solche Gleichungen. Es ist

$$\Sigma \pm a_{s_1} a_{s_2} a_{s_3} a_{s_4} = 0 \tag{5}$$

wenn die Summe über alle Permutationen s_1, s_2, s_3, s_4 der Zahlen 1, 2, 3, 4 erstreckt wird, und dabei das obere oder untere Vorzeichen genommen wird, je nachdem die Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix}$$

eine gerade oder eine ungerade ist. Setzt man auf der linken Seite der Gleichung (5) zwei der Quaternionen a_1, a_2, a_3, a_4 einander gleich, so heben sich je zwei Glieder gegeneinander auf, nämlich zwei solche, welche durch Vertauschung der beiden gleichgesetzten Größen aus einander hervorgehen. Um nun die Probe für die Richtigkeit der Gleichung (5) zu machen, setze man für a_1, a_2, a_3, a_4 irgend welche 4 aus den Einheiten i_0, i_1, i_2, i_3. Nimmt man dabei zwei oder mehr gleiche Einheiten, so verschwindet nach dem Vorhergehenden der Ausdruck. Man hat also nur noch a_1, a_2, a_3, a_4 gleich einer Permutation von i_0, i_1, i_2, i_3 zu setzen. Man setze zunächst $a_1 = i_0$. Faßt man dabei allemal solche Glieder zusammen, in welchen die Buchstaben a_2, a_3, a_4 dieselbe Stellung zu einander einnehmen, so erhält man 6 Aggregate von je 4 Gliedern, z. B.

$$a_1 a_2 a_3 a_4 - a_2 a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_1 a_4 - a_2 a_3 a_4 a_1.$$

Da nun $a_1 = i_0$ gesetzt ist, haben die 4 Glieder allemal denselben Werth, wenn man vom Vorzeichen absieht, und das Vorzeichen ist bei zwei Gliedern gleich und entgegengesetzt dem Vorzeichen der beiden andern. Es wird also der ganze Ausdruck gleich Null. Dasselbe geschieht auch, wenn a_2, a_3 oder a_4 gleich i_0 gesetzt wird.

Damit ist die Allgemeingiltigkeit der Gleichung (5) nachgewiesen. Entsprechend könnte man die entsprechende Gleichung

$$\Sigma \pm a_{s_1} a_{s_2} a_{s_3} a_{s_4} a_{s_5} = 0$$

beweisen. Diese läßt sich übrigens direct aus der andern ableiten, indem man in dem neuen Ausdruck jedesmal solche Glieder zusammenfaßt, welche denselben äußersten Factor links besitzen. Dasselbe gilt von den Ausdrücken, welche analog aus mehr als fünf Quaternionen gebildet werden können.

Die Frage, ob das System der Gleichungen (2) durch die Gleichung (5) vollständig gemacht wird, bleibt noch offen.

Ueber einen Mittelwerthssatz.

Von

O. Hölder.

Vorgelegt von H. A. Schwarz.

1.

Im Messenger of Mathematics vol. XVII no. 10 hat Herr L. J. Rogers gezeigt, wie aus der Thatsache, daß das geometrische Mittel aus beliebig vielen positiven Werthen stets kleiner ist als das arithmetische, eine Reihe von Ungleichungen abgeleitet werden kann. Diese Ungleichungen, welche bei Convergenzuntersuchungen Dienste leisten können, lassen sich aus einem allgemeinen Theorem unmittelbar ableiten, welches durch seinen Zusammenhang mit den Principien der Differentialrechnung ein besonderes Interesse beansprucht.

Bedeutet nämlich $\varphi(x)$ eine Function einer reellen Veränderlichen mit zunehmendem Differentialquotienten, so ist das arithmetische Mittel aus einer beliebigen Zahl von Functionswerthen stets größer als der Functionswerth, welcher dem in derselben Weise