Teoría de conjuntos/Versión para imprimir

Wikibooks.org

4 de noviembre de 2011

Índice general

0.1 TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS 1
0.2 GNU FREE DOCUMENTATION LICENSE 28

1 AUTORES **29**

ÍNDICE DE FIGURAS **31**

UNKNOWN TEMPLATE "GFDL"

0.1. Teoría intuitiva de conjuntos

En la introducción, o en algún lugar especial, de los libros de la teoría axiomática de conjuntos suele darse una explicación de por qué es necesario fundamentar la teoría de conjuntos y dejarla construida a partir de unos cuantos axiomas. Estos axiomas son, en su mayoría, principios evidentes de por sí una vez que se ha comprendido previamente como deben comportarse los conjuntos o, por lo menos, cuando ya se tiene una idea de esto. Por esa razón, es más que justificable la revisión de una exposición intuitiva de la teoría de conjuntos, como el que incluimos aquí, en donde se expongan unas cuantas cosas, de forma rápida e intuitiva, que familiaricen al lector con los conjuntos, sus relaciones y operaciones; de esta manera el lector no encontrará (esperamos) dificultades mayores a la hora de enfrentarse a la teoría axiomática de conjuntos, donde los principios de los que se parte son formalizaciones y restricciones *ad hoc* de las propiedades que uno ya le suponía a los conjuntos.

Capítulo siguiente: CONJUNTOS[1]

0.1.1. Conjuntos

Lo principal para nuestro desarrollo de la teoría (intuitiva) de conjuntos es aceptar que es posible 'comprimir' o 'substancializar' una colección o conjunto (que para este caso son lo mismo) de cualesquiera objetos y, así, poder considerarla como un todo o, mejor dicho, como una única cosa que tratar. Los objetos de un conjunto se llaman *elementos* de dicho conjunto.

1.1.1. Desde luego, la relación más básica de la teoría de conjuntos es la que existe entre los elementos y su conjunto: la relación de *pertenencia*. Como es la regla hoy en día, escribiremos

$$a \in x$$

1 Capítulo 0.1.1 página 1

para indicar que el objeto a es uno de los elementos del conjunto x. Es decir, el símbolo "$\in$", una versión de la letra griega ϵ (épsilon), lo usaremos para representar la relación de pertenencia[1]. Los argumentos de una relación son los objetos que acompañan a esa relación. En el ejemplo $a \in x$, los argumentos de la relación $\in$ son a (primer argumento) y x (segundo argumento). Así, puede decirse que los primeros argumentos de la relación $\in$ pertenecen al universo de los elementos, mientras que los segundos argumentos de esta misma relación pertenecen al universo de los conjuntos. Si aceptamos que todo es un conjunto (algo que, por ciertas razones que se verán en su momento, haremos cuando se desarrolle la teoría axiomática de conjuntos), entonces los primeros y segundos argumentos de $\in$ pertenecen al mismo universo.

La negación de $a \in x$ la escribiremos

$$a \notin x$$

.

Ejemplo: Consideremos el conjunto $x = \{1,2,3,4,5\}$. Con esto lo que estamos haciendo es denominar por x al conjunto $\{1,2,3,4,5\}$. Pues bien, podemos decir entonces que $1 \in x$ y que $7 \notin x$.

1.1.2. Diremos que dos conjuntos x e y son *iguales*, lo que se representa por $x = y$, si y solo si x e y consisten de los mismos elementos. Así pues, $x = y$ siempre que

$$a \in x$$

si y solo si

$$a \in y$$

para todo elemento a (i.e. si todo elemento de x es elemento de y y, recíprocamente, si todo elemento de y es elemento de x).

Ejemplo: Siguiendo con nuestro ejemplo, según nuestro criterio vemos que $\{1,2,3,4,5,\} = \{1,1,1,1,1,1,1,2,3,3,3,4,5,5,5,1\}$. En efecto, cada uno de los elementos del conjunto de la izquierda es un elemento del conjunto de la derecha, y viceversa. Podemos pues considerar que ambos conjuntos son iguales, y, como hicimos antes, podemos identificar entonces como x a cualquiera de ambos.

1.1.3. Por otra parte, como un hecho más general que la igualdad, un conjunto x es *subconjunto* de otro y, lo que se representa por

$$x \subseteq y$$

,

siempre que

$$a \in x$$

implica

$$a \in y$$

para cualquiera que sea el elemento a (i.e., si todo elemento de x es elemento de y). Claramente

$$x \subseteq x$$

para todo conjunto x, por lo que se dice que la relación $\subseteq$ es reflexiva. También tenemos que

$$x \subseteq y$$

y

$$y \subseteq x$$

si y solo si

$$x = y$$

,

y que

$$x \subseteq y$$

y

$$y \subseteq z$$

implica

$$x \subseteq z$$

para cualesquiera conjuntos x, y y z. Estos dos hechos muestran, respectivamente, que la relación $\subseteq$ es antisimétrica y transitiva (véase más adelante RELACIONES[2]).

1.1.4. Si $x \subseteq y$ y $x \neq y$ (i.e. si y tiene por lo menos un elemento más que x) se dice que x es subconjunto *propio* de y, lo cual se representa por

2 Capítulo 0.1.8 página 23

$$x \subset y$$

.

UNKNOWN TEMPLATE "nota"

1

Peano fue el primero en representar la relación de pertenencia por la letra ϵ en sus *Arithmetices Principia* (1889), por ser la primera letra de la palabra griega $\acute{\epsilon}\sigma\tau\grave{\iota}$, que significa "está".

Capítulo anterior: INTRODUCCIÓN[3] **Capítulo siguiente:** NOTACIÓN DE CONJUNTOS Y EL CONJUNTO VACÍO[4]

0.1.2. Notación de conjuntos y el conjunto vacío

1.2.1. Si x es un conjunto cuyos elementos son $a_1, a_2, \ldots a_n$ y solo ellos, es común representar a este conjunto x por

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

,

si n no es un número muy grande.

1.2.2. Nótese que, de acuerdo con esa notación,

$$a \in x$$

es equivalente a

$$\{a\} \subseteq x$$

.

1.2.3. Existe otra forma común de representar conjuntos. Si x es el conjunto de todos aquellos elementos a que verifican una propiedad ϕ, entonces x se representa también por

$$\{a \mid \phi(a)\}$$

.

1.2.4. Así, si $\phi(a)$ es la propiedad $a = a$, entonces el conjunto

3 Capítulo 0.1 página 1
4 Capítulo 0.1.2 página 4

$$\{a \mid a = a\}$$

claramente contiene cualquier cosa.

1.2.5. Mientras tanto, si $\phi(a)$ es la propiedad $a \neq a$, entonces el conjunto

$$\{a \mid a \neq a\}$$

no contiene nada. Este conjunto sin elementos lo llamaremos conjunto vacío, y lo representaremos por $\varnothing$. Tenemos que $\varnothing \subseteq x$ para cualquiera que sea el conjunto x (pues esto sería falso sólo si existiera algún elemento en $\varnothing$ que no estuviera en el conjunto x, lo cual es absurdo pues $\varnothing$ no contiene nada).

Por otro lado,

$$x \subseteq \varnothing$$

implica

$$x = \varnothing$$

para cualquier conjunto x. Efectivamente, pues si fuera $x \subseteq \varnothing$ y $x \neq \varnothing$, entonces $\varnothing$ tendría por lo menos un elemento que no está en x, lo que es imposible.

Capítulo anterior: CONJUNTOS[5] **Capítulo siguiente:** UNIÓN E INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS[6]

0.1.3. Unión e intersección de conjuntos

1.3.1. Las operaciones entre conjuntos consisten en tomar ciertos elementos de uno y ciertos de otro para formar con ellos nuevos conjuntos. Así, por ejemplo, si x e y son dos conjuntos, la *unión* de x e y es el conjunto

$$x \cup y = \{a \mid a \in x$$

o

$$a \in y\}$$

.

5 Capítulo 0.1.1 página 1
6 Capítulo 0.1.3 página 5

Esto es, $x \cup y$ consiste de todos los elementos que están ya sea en x, ya sea en y, ya sea en ambos x e y. La unión se representa por el área sombreada en el diagrama siguiente:

$x \cup y$

7

Sean x, y y z conjuntos cualesquiera. Se cumplen las propiedades siguientes:

(U-1) $x \cup x = x$ (idempotencia) **(U-2)** $x \cup \varnothing = x$ (identidad) **(U-3)** $x \cup y = y \cup x$ (conmutatividad) **(U-4)** $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$ (asociatividad) **(U-5)** $x \subseteq x \cup y$ **(U-6)** $x \subset y$ si y solo si $x \cup y = y$ </blockquote>

Estas propiedades son fácilmente demostrables. Veamos la demostración de **(U-2)** y **(U-6)**:

(U-2) Hay que demostrar que todo elemento de $x \cup \varnothing$ es elemento de x (demostrar que $x \cup \varnothing \subseteq x$) y que, recíprocamente, todo elemento de x es elemento de $x \cup \varnothing$ (demostrar que $x \subseteq x \cup \varnothing$). Si $a \in x \cup \varnothing$, entonces $a \in x$ o $a \in \varnothing$, de lo que solo puede ser $a \in x$. Recíprocamente, si $a \in x$, entonces $a \in x \cup \varnothing$. Por tanto $x \cup \varnothing = x$.

(U-6) Supóngase que $x \subseteq y$ pero que $x \cup y \neq y$. Entonces, en particular, existe $a \notin y$ tal que $a \in x \cup y$, pero si esto es cierto, $a \in x$, lo que contradice el hecho de que $x \subseteq y$. Recíprocamente, si $x \cup y = y$, entonces de **(U-5)** se sigue el resultado deseado.

1.3.2. La *intersección* de dos conjuntos x e y se define como el conjunto

$$x \cap y = \{a \mid a \in x \quad \text{y} \quad a \in y\}$$

.

Es decir, $x \cap y$ es el conjunto formado por todos los elementos que están tanto en x como en y. La intersección se representa por el área sombreada en el diagrama siguiente :

$x \cap y$

8

Sean x, y y z conjuntos cualesquiera

(I-1) $x \cap x = x$ (idempotencia) **(I-2)** $x \cap \varnothing = \varnothing$ **(I-3)** $x \cap y = y \cap x$ (conmutatividad) **(I-4)** $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$ (asociatividad) **(I-5)** $x \cap y \subseteq x$ **(I-6)** $x \subseteq y$ si y solo si $x \cap y = x$ </blockquote>

Además, se cumplen las siguientes leyes distributivas:

(UI-1) $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$ **(UI-2)** $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$

7 HTTP://ES.WIKIBOOKS.ORG/WIKI/IMAGEN%3ASETSUNION.PNG
8 HTTP://ES.WIKIBOOKS.ORG/WIKI/IMAGEN%3ASETSINTERSECTION.PNG

1.3.3. Si x e y son dos conjuntos tales que $x \cap y = \varnothing$ (i.e. si x e y no tienen elementos en común) se dice que x e y son *conjuntos disjuntos*.

1.3.4. Las operaciones de unión e intersección pueden generalizarse. Si C es una colección (conjunto) de conjuntos, la unión de los conjuntos de C puede definirse como el conjunto

$$\bigcup_{x \in C} x = \{a \mid \text{existe } x \in C \text{ tal que } a \in x\}$$

.

Así, $a \in \bigcup_{x \in C} x$ si y solo si existe por lo menos un conjunto x en C que contenga al elemento a. Como caso particular, tenemos

$$\bigcup \{x, y\} = x \cup y$$

.

1.3.5. De manera similar, la intersección de los conjuntos de una colección C se define por

$$\bigcap_{x \in C} x = \{a \mid \text{para todo } x \in C, \quad a \in x\}$$

.

Por tanto, $a \in \bigcap_{x \in C} x$ si $a \in x$ para todo conjunto x de C (i.e. $\bigcap_{x \in C} x$ consiste de los elementos que están en todo conjunto de C). Como caso particular, tenemos

$$\bigcap \{x, y\} = x \cap y$$

.

1.3.6. Nótese que, de acuerdo a la definición anterior, si $C = \varnothing$, entonces, puesto que en ese caso $x \in \varnothing$ implica $a \in x$ para cualquiera que sea el conjunto x y el elemento a, el conjunto $\bigcap C$ lo contiene todo.

---- **Capítulo anterior:** NOTACIÓN DE CONJUNTOS Y EL CONJUNTO VACÍO[9] **Capítulo siguiente:** DIFERENCIA DE CONJUNTOS Y CONJUNTOS COMPLEMENTARIOS[10]

0.1.4. Diferencia de conjuntos y conjuntos complementarios

1.4.1 Si x e y son dos conjuntos cualesquiera, la *diferencia* de x e y es el conjunto $x - y$ (también simbolizado por $x \setminus y$) definido por

9 Capítulo 0.1.2 página 4
10 Capítulo 0.1.4 página 7

$$x - y = \{a \mid a \in x$$

y

$$a \notin y\}$$

.

Es decir, $x - y$ consiste de todos los elementos que están en x pero no en y. Este conjunto se representa por el área sombreada en el siguiente diagrama:

DIFERENCIA DE

x

E

y

11

Ejercicio: Probar que x e y son conjuntos disjuntos si y solo si $x - y = x$.

Sean x, y y z conjuntos cualesquiera. Entonces

(**D-1**) $x - x = \varnothing$ (**D-2**) $x - \varnothing = x$ (**D-3**) $x - (x - y) = x \cap y$ (**D-4**) $x \cap (y - z) = (x \cap y) - (x \cap z)$ (**D-5**) $x - (y \cup z) = (x - y) \cap (x - z)$ VER DIAGRAMA[12] (**D-6**) $x - (y \cap z) = (x - y) \cup (x - z)$ (**D-7**) $x - y \subseteq x$ (**D-8**) $x \subseteq y$ si y solo si $x - y = \varnothing$ </blockquote>

1.4.2. Si x_1 es un subconjunto de x, entonces el subconjunto de x,

$$\mathscr{C}_x x_1 = x - x_1$$

,

se dice conjunto *complementario* de x_1 en x. En el siguiente diagrama se representa este conjunto como el area sombreada:

COMPLEMENTO DE

x_1

EN

x

11 HTTP://ES.WIKIBOOKS.ORG/WIKI/IMAGEN%3ASETSDIFFERENCE.PNG
12 HTTP://COMMONS.WIKIMEDIA.ORG/WIKI/FILE:INTERSECCIONRESTAS.PNG

13

Sean x e y subconjuntos de un conjunto u. Se cumplen

(**C-1**) $\mathscr{C}_u u = \varnothing$ (**C-2**) $\mathscr{C}_u \varnothing = u$ (**C-3**) $\mathscr{C}_\varnothing u = \varnothing$ (conmutatividad) (**C-4**) $\mathscr{C}_u \mathscr{C}_u x = x$ (**C-5**) $x \cup \mathscr{C}_u x = u$ (**C-6**) $x \cap \mathscr{C}_u x = \varnothing$ (**C-7**) $\mathscr{C}_u (x \cup y) = \mathscr{C}_u x \cap \mathscr{C}_u y$ (**C-8**) $\mathscr{C}_u (x \cap y) = \mathscr{C}_u x \cup \mathscr{C}_u y$ (**C-9**) $x - y = x \cap \mathscr{C}_u y$

Los enunciados **(C-7)** y **(C-8)** se conocen como *leyes de De Morgan.*

1.4.3. En ocasiones, para evitar complejidades notacionales, escribiremos $\mathscr{C} x$ en lugar de $\mathscr{C}_y x$ cuando del contexto se sobreentienda cual es el conjunto y.

---- **Capítulo anterior:** UNIÓN E INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS[14] **Capítulo siguiente:** CONJUNTOS POTENCIA[15]

0.1.5. Conjuntos potencia

1.5.1. Un conjunto muy importante en la teoría de conjuntos es aquel que, dado un conjunto x cualquiera, contiene todos los subconjuntos de este conjunto x. Un conjunto así se llama *conjunto potencia.* Más exactamente, si x es un conjunto, entonces el conjunto potencia de x es el conjunto $\mathscr{P}(x)$ dado por

$$\mathscr{P}(x) = \{y \mid y \subseteq x\}$$

.

1.5.2. Puesto que $\varnothing \subseteq \varnothing$, $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, y por tanto $\mathscr{P}(\varnothing)$ contiene un solo elemento, y por ello $\mathscr{P}(\varnothing) \neq \varnothing$. Sea x un conjunto con n elementos. Entonces, existen n subconjuntos de x con un solo elemento, $\binom{n}{2}$ subconjuntos de x con dos elementos, $\binom{n}{3}$ subconjuntos de x con 3 elementos, y así sucesivamente hasta llegar a los $\binom{n}{n}$ subconjuntos de x con n elementos. De este modo, $\mathscr{P}(x)$ tiene

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = (1+1)^n = 2^n$$

elementos, siendo esta última ecuación un caso particular del binomio de Newton. Como puede verse, el conjunto potencia $\mathscr{P}(x)$ de un conjunto x contiene en general muchos más elementos que el conjunto x, razón por la cual es difícil dar ejemplos de conjuntos potencia.

1.5.3. Nótese que $a \in x$ equivale a $\{a\} \in \mathscr{P}(x)$.

1.5.4. Algo más interesante y conveniente de notar es que

13 HTTP://ES.WIKIBOOKS.ORG/WIKI/IMAGEN%3ASESTSCOMPLEMENT.PNG
14 Capítulo 0.1.3 página 5
15 Capítulo 0.1.5 página 9

$$\bigcup_{x \in \mathscr{P}(X)} x = X$$

para cualquier conjunto X. En efecto, pues de $a \in \bigcup_{x \in (X)} x$, se sigue $a \in x$ para algún $x \in \mathscr{P}(X)$, es decir, para algún $x \subseteq X$, por lo que $a \in X$. Recíprocamente, si $a \in X$, entonces $a \in x$ para algún conjunto $x \in \mathscr{P}(X)$ (e.g. el conjunto $\{a\} \subseteq X$), luego $a \in \bigcup_{x \in \mathscr{P}(X)} x$.

1.5.5. Como hecho más general, si C es una colección de subconjuntos de un conjunto X, es decir si $C \subseteq \mathscr{P}(X)$, entonces $\bigcup_{x \in C} x \subseteq X$.

1.5.6. Ahora vamos a generalizar algunas leyes a cerca de la unión e intersección de conjuntos. Primero, considérese un conjunto dado u, y luego considérese una colección C de subconjuntos de u. Fórmese la unión

$$\bigcup_{x \in C} x$$

,

un subconjunto de u. El complemento

$$\mathscr{C}\left(\bigcup_{x \in C} x\right)$$

,

es un subconjunto de u. Si $a \in \mathscr{C}(\bigcup_{x \in C} x)$, entonces $a \notin \bigcup_{x \in C} x$, por lo que $a \notin x$ para todo $x \in C$, y puesto que $x \subseteq u$, el complemento $\mathscr{C}x$ existe y $a \in \mathscr{C}x$ para todo $x \in C$. Así, $a \in \bigcap_{x \in C} \mathscr{C}x$. El conjunto anterior es en efecto una intersección de los conjuntos de una colección, a saber

$$C' = \{y \mid y \subseteq v$$

y

$$\mathscr{C}y \in C\}$$

.

Sea u un conjunto y C una colección de subconjuntos de u. El resultado anterior, y otro cuya demostración se deja como un sencillo ejercicio al lector, se presentan a continuación:

- $\mathscr{C}(\bigcup_{x \in C} x) = \bigcap_{x \in C} \mathscr{C}x$
- $\mathscr{C}(\bigcap_{x \in C} x) = \bigcup_{x \in C} \mathscr{C}x$

Las proposiciones anteriores son una generalización de las leyes de De Morgan.

Capítulo anterior: DIFERENCIA DE CONJUNTOS Y CONJUNTOS COMPLEMENTARIOS[16] **Capítulo siguiente:** PRODUCTO CARTESIANO[17]

16 Capítulo 0.1.4 página 7
17 Capítulo 0.1.6 página 11

0.1.6. Producto cartesiano

1.6.1. En matemáticas, un par ordenado es un par (a, b) de objetos a y b tal que si (c, d) es otro par ordenado, (a, b) y (c, d) serán iguales si y solo si $a = c$ y $b = d$. La idea de esta descripción es garantizar que el orden de los componentes de un par ordenado importe. Sin embargo, no es sino en la teoría de conjuntos donde el concepto de par ordenado encuentra una definición al ser considerado como un tipo especial de conjunto que cumple lo que se acaba de describir del mismo. En realidad existen varias definiciones de par ordenado dentro de la teoría de conjuntos, aunque la más común, y la que usaremos aquí, es aquella donde el par ordenado (a, b) se define por

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

para todo x e y Para ver que esta definición de par ordenado es adecuada, hemos de mostrar que

$$(a, b) = (c, d)$$

$$\text{si y solo si}$$

$$a = c$$

$$\text{y}$$

$$b = d$$

$$.$$

para cualesquiera a, b, c, d. Sea pues $(a, b) = (c, d)$. Entonces

$$\{a\} = \{c\}$$

$$\text{y}$$

$$\{a, b\} = \{c, d\}$$

$$\text{o}$$

$$\{a\} = \{c, d\}$$

$$\text{y}$$

$$\{a, b\} = \{c\}$$

$$.$$

Si $a = b$, todo se reduce fácilmente a $a = b = c = d$ considerado que dos conjuntos son iguales si y solo si tienen los mismos elementos. Si $a \neq b$, entonces no puede ser $\{a\} = \{c, d\}$ y $\{a, b\} = \{c\}$, pues si $\{a, b\} = \{c\}$ resulta $a = b = c$ por definición de la igualdad de conjuntos, lo que contradice $a \neq b$, y por tanto ha de ser $\{a\} = \{c\}$ y $\{a, b\} = \{c, d\}$, con lo que claramente $a = c$, además de que $b = d$, pues suponer que $b = c$ nos lleva de nuevo a $a = b$ cuando la hipótesis dice lo contrario.

La definición de par ordenado anterior se debe a Kuratowski, quien la introdujo en 1921.

Ejercicio: Probar que es posible definir el par ordenado por

$$(x, y) = \{\{\{x\}, \emptyset\}, \{\{y\}\}\}$$

para todo x e y mostrando que en ese caso también se cumple

$$(a, b) = (c, d)$$

si y solo si

$$a = c$$

y

$$b = d$$

.

para cualesquiera a, b, c y d. Esta definición de par ordenado la dio Weiner en 1914.

Ejercicio: Considérese la definición de pares ordenados de Kuratowski. Probar que si $a \in x$ y $b \in x$, entonces $(a, b) \in \mathscr{P}\mathscr{P}(x)$. Probar que, más generalmente, si $a \in x$ y $b \in y$, entonces $(a, b) \in \mathscr{P}\mathscr{P}(x \cup y)$

1.6.2. La definición de par ordenado se puede generalizar inductivamente para cualquier número n de componentes, mediante la ecuación

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$$

.

1.6.3. Sean x e y dos conjuntos. El producto cartesiano de x e y es el conjunto $x \times y$ definido por

$$x \times y = \{(a, b) \mid a \in x$$

y

$$b \in y\}$$

.

Es decir, $x \times y$ es el conjunto de todos los pares ordenados cuyo primer componente es un elemento de x y segundo componente un elemento de y.

Dados cualesquiera dos conjuntos x, y, z, tenemos

(**P-1**) $x \times (y \cup z) = (x \times y) \cup (x \times z)$ (**P-2**) $x \times (y \cap z) = (x \times y) \cap (x \times z)$ (**P-3**) $x \times (y - z) = (x \times y) - (x \times z)$ (**P-4**) $x \times y = \varnothing$ si y solo si $x = \varnothing$ o $y = \varnothing$ (**P-5**) $x \subseteq v$ y $y \subseteq w$ si y solo si $x \times y \subseteq v \times w$

Capítulo anterior: CONJUNTOS POTENCIA[18] **Capítulo siguiente:** FUNCIONES[19]

0.1.7. Funciones

1.7.1. Sean x e y dos conjuntos cualesquiera. Cualquier subconjunto f del producto cartesiano $x \times y$ que cumpla

(F-1) para todo $a \in x$ existe $b \in y$ tal que $(a, b) \in f$ y **(F-2)** $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$ implica $b = c$,</p> </blockquote>

se dice *función* de x en y. Para indicar que f es una función de un conjunto x en otro y, es común escribir $f : x \longrightarrow y$.

1.7.2. Sean dos conjuntos x e y, y sea $f : x \longrightarrow y$ una función de x en y. Si $(a, b) \in f$ se dice que a es *antecedente* de b por medio de f, y que b es *imagen* de a por medio de f. Por definición, un elemento $a \in x$ no puede tener ni más ni menos que una sola imagen $b \in y$, que representaremos por $f(a)$ (de modo que $b = f(a)$ si y solo si $(a, b) \in f$). El conjunto x se dice *dominio* de la función f, y se representa comúnmente por $\mathrm{dom}(f)$, mientras que el subconjunto $y' \subseteq y$ tal que para todo $b \in y'$ existe $a \in x$ tal que $b = f(a)$ (i.e. el subconjunto de y que contiene solo las imágenes de los elementos de x por medio de f) se dice *rango* de la función f, y se representa por $\mathrm{ran}(f)$.

1.7.3. Claramente dos funciones $f : x \longrightarrow y$ y $g : x \longrightarrow y$ son iguales si y solo si

$$f(a) = g(a)$$

para todo $a \in x$.

1.7.4. Tenemos también que si x e y son dos conjuntos, y si $f : x \longrightarrow y$ es cualquier función de x en y, entonces $f \subseteq x \times y$, y así $f \in \mathscr{P}(x \times y)$. Luego, si F es el conjunto de todas las funciones $f : x \longrightarrow y$, $F \subseteq \mathscr{P}(x \times y)$, de modo que $F \in \mathscr{P}\mathscr{P}(x \times y)$.

1.7.5. Sea y un conjunto cualquiera, y sea $f : \varnothing \longrightarrow y$. Claramente $f = \varnothing$.

1.7.6. Sea x un conjunto. La función

$$\{x\}_{i \in I} : I \longrightarrow \mathscr{P}(x)$$

,

18 Capítulo 0.1.5 página 9
19 Capítulo 0.1.7 página 13

que envía un elemento i de I con un subconjunto de x, se denomina *familia* de subconjuntos de x indicada por I. El conjunto I se denomina en este caso conjunto de *índices* (por lo que cada $i \in I$ se dice un *índice*), y la imagen de cualquier $i \in I$ por medio de esta función se representa por x_i.

Por ejemplo, considérese el conjunto

$$x = \{a, b, c, d\}$$

,

y el conjunto de índices $I = \{m, n, o, p\}$. Existen varias familias de subconjuntos de x indicadas por I. Una de estas puede ser la función

$$\{x\}_{i \in I} : I \longrightarrow \mathscr{P}(x)$$

,

dada por

$$x_m = \{a\}, \quad x_n = \{a, b\}, \quad x_o = \{a, b, c\}, \quad x_p = \{a, b, c, d\}$$

.

Otra puede ser la que viene dada por

$$x_m\{a\}, \quad x_n = \{b\}, \quad x_o = \{c\}, \quad x_p = \{d\}$$

.

1.7.7. Sea la función $f : x \longrightarrow y$ de un conjunto x en otro y; Si

> **(F-3)** para cualesquiera $a \in x$ y $b \in x$, $\quad f(a) = f(b)$ implica $a = b$,

es decir, si cualesquiera distintos elementos de x tienen distintas imágenes en y, se dice que f es una función *inyectiva* o que es una *inyección.*

Si

> **(F-4)** para todo $b \in y$ existe $a \in x$ tal que $b = f(a)$,

es decir, si $\text{ran}(f) = y$ (i.e. si todo $b \in y$ es imagen), se dice que f es una función *sobreyectiva* (o *suprayectiva*), que es una función de x *sobre* y, o que es una *sobreyección.*

> **(F-5)** Una función que es a la vez inyectiva y sobreyectiva se dice función biyectiva o *biyección.*

1.7.8. Sea $f : x \longrightarrow y$, y sea x_1 un subconjunto de x (i.e. un elemento de $\mathscr{P}(x)$). El conjunto $f(x') \subseteq y$ dado por

$$f[x_1] = \{b \in y \mid$$

existe

$$a \in x_1$$

tal que

$$b = f(a)\}$$

,

se dice *imagen* del subconjunto x_1 por f. Es decir, $f[x_1]$ es el conjunto de todos los $b \in y$ que son imagen de algún elemento de x_1. Así pues,

$$f[x_1] \subseteq \operatorname{ran}(f)$$

y, en particular,

$$f[x] = \operatorname{ran}(f)$$

.

Nótese que, si $a \in x$, entonces

$$f[\{a\}] = \{f(a)\}$$

es un conjunto con un solo elemento, a saber, la imagen de a por f.

1.7.9. Por otra parte, si $y_1 \subseteq y$, entonces se define el conjunto $f^{-1}\left[y_1\right]$ por

$$f^{-1}\left[y_1\right] = \{a \in x \mid f(a) \in y_1\}$$

,

y se llama a este conjunto *imagen recíproca* de y_1 por f. Así pues,

$$f^{-1}\left[y_1\right] \subseteq x$$

.

Puesto que todo elemento de x tiene una imagen en y, tenemos que, como caso particular,

$$f^{-1}[y] = x$$

.

Sin embargo, debemos tener presente que, si bien $f[\{a\}]$, donde $a \in x$, siempre es un conjunto con un solo elemento, el conjunto $f^{-1}[\{b\}]$ con $b \in y$ puede ser vacío, ya que la definición de función no garantiza que todo elemento de y tenga un antecedente en x. Sin embargo esto si esta garantizado cuando f es sobreyectiva, de modo que, en ese caso, el conjunto

$$f^{-1}[\{b\}]$$

contiene cualquier elemento de x cuya imagen sea b. Si f es además inyectiva, entonces f es biyectiva, de modo que b es la imagen de solo un elemento a de x, y así $f^{-1}[\{b\}]$ contiene solo a tal elemento a.

1.7.10. Veamos ahora algunas propiedades generales de las funciones. Para esto definimos una función $f : x \longrightarrow y$ y dos familias $\{x\}_{i\in I}$ e $\{y\}_{j\in J}$ de subconjuntos de x e y respectivamente. Convenimos también en que x_1, x_2 e y_1, y_2 representan, respectivamente, subconjuntos de x y subconjuntos de y.

Tenemos que

(a) $x_1 \subseteq x_2$ implica $f[x_1] \subseteq f[x_2]$.

Demostración: Sea pues $x_1 \subseteq x_2$. Si $b \in f[x_1]$, entonces, por definición (véase ¿?), existe $a \in x_1$ tal que $b = f(a)$, pero en tal caso $a \in x_2$, pues $x_1 \subseteq x_2$, de modo que $b \in f[x_2]$. QED

(b) $y_1 \subseteq y_2$ implica $f^{-1}[y_1] \subseteq f^{-1}[y_2]$.

Demosracón: Si $a \in f^{-1}[y_1]$, entonces $f(a) \in y_1$, puesto que $y_1 \subseteq y_2$, se tiene $f(a) \in y_2$, luego $a \in f^{-1}[y_2]$, y así $f^{-1}[y_1] \subseteq f^{-1}[y_2]$. QED

(c) $x_1 \subseteq f^{-1}[f[x_1]]$.

Demostración: Sea $a \in x_1$. La imagen de a por f, $f(a)$, está en el conjunto $f[x_1]$, y así $a \in f^{-1}[f[x_1]]$. QED

Si, en particular, la función f es inyectiva, entonces

(d) $x_1 = f^{-1}[f[x_1]]$.

(e) $f[f^{-1}[y_1]] \subseteq y_1$.

Demostración: Si $b \in f[f^{-1}[y_1]]$, entonces b es la imagen de algún $a \in f^{-1}[y_1]$, y así $b \in y_1$. QED

Si, en particular, f es sobreyectiva, entonces

(f) $f[f^{-1}[y_1]] = y_1$.

(g) $y_1 \subseteq f[x_1]$ implica $f[f^{-1}[y_1]] = y_1$.

Demostración: En vista de (d), solo queda demostrar que, si $y_1 \subseteq f[x_1]$, entonces $y_1 \subseteq f\left[f^{-1}\left[y_1\right]\right]$. Esto es fácil considerando que $f[x_1]$ solo contiene elementos que son imágenes, y por tanto esto también es cierto para y_1, de modo que si $f(a) \in y_1$, $a \in f^{-1}\left[y_1\right]$, luego $f(a) \in f\left[f^{-1}\left[y_1\right]\right]$, con lo que la prueba termina. QED

(h)] $f^{-1}\left[\mathscr{C}_y y_1\right] = \mathscr{C}_x f^{-1}\left[y_1\right]$.

Demostración: Sea $a \in f^{-1}\left[\mathscr{C}_y y_1\right]$. Así, existe $b \in \mathscr{C}_y y_1$ tal que $b = f(a)$, pero en ese caso $b \notin y_1$, de modo que $a \notin f^{-1}\left[y_1\right]$, y con esto $a \in \mathscr{C}_x f^{-1}\left[y_1\right]$. Solo falta demostrar que $\mathscr{C}_x f^{-1}\left[y_1\right] \subseteq f^{-1}\left[\mathscr{C}_y y_1\right]$, lo que consiste de seguir los pasos anteriores en el sentido opuesto. QED

Si, en particular, f es inyectiva, se cumple

(i) $f[\mathscr{C}_x x_1] \subseteq \mathscr{C}_y f[x_1]$.

Demostración: Sea $b \in f[\mathscr{C}_x x_1]$. Entonces, puesto que f es inyectiva, existe un único $a \in \mathscr{C}_x x_1$ tal que $b = f(a)$. Luego, $a \notin x_1$, de modo que $b \notin f[x_1]$, y así $b \in \mathscr{C}_y f[x_1]$. QED

Debemos hacer énfasis en que el resultado anterior no se cumple para cualquier función f a menos que esta sea inyectiva. Por ejemplo, si f no es inyectiva, puede ser $a \notin x_1$, pero esto no es suficiente para garantizar que $f(a) \notin f[x_1]$, por que al no ser f inyectiva, podría existir un $c \in x_1$ tal que $f(a) = f(c)$, caso en el cual la imagen de a está en $f[x_1]$ por que es la misma imagen de un elemento que si esta en x_1.

Si, en particular, la función f es sobreyectiva, tenemos

(j) $\mathscr{C}_y f[x_1] \subseteq f[\mathscr{C}_x x_1]$.

Demostración: Si $b \in \mathscr{C}_y f[x_1]$, tenemos que $b \notin f[x_1]$, por lo que b no tiene ningún antecedente en x_1. Notemos que, por ser f una sobreyección, b tiene por lo menos un antecedente en x. Sea a cualquiera de estos antecedentes de b, es decir, sea $b = f(a)$. Tenemos que $a \in \mathscr{C}_x x_1$, por lo que $b \in f[\mathscr{C}_x x_1]$, lo que demuestra lo que se quería. QED

Si la función f es biyectiva (es decir, si es tanto inyectiva como sobreyectiva), se cumple, en vista de (h) e (i), lo siguiente

(k) $f[\mathscr{C}_x x_1] = \mathscr{C}_y f[x_1]$.

1.7.11. Sea $\{x\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de un conjunto x. Es común llamar simplemente *unión* de $\{x\}_{i \in I}$ a la unión de los conjuntos del rango de $\{x\}_{i \in I}$, que se representa por $\bigcup_{i \in I} x_i$ y que se define (véase 1.3.4) naturalmente por

$$\bigcup_{i \in I} x_i = \{a \mid \text{ existe } i \in I \text{ tal que } a \in x_i\}$$

.

1.7.12. Sea una función $f : x \longrightarrow y$. Se cumplen:

(a) $f[\bigcup_{i \in I} x_i] = \bigcup_{i \in I} f[x_i]$.

Demostración: Si $b \in f[\bigcup_{i \in I} x_i]$, entonces existe al menos un $a \in \bigcup_{i \in I} x_i$ tal que $f(a) = b$, y de esta manera $a \in x_i$, y con ello $b \in f[x_i]$, para almenos un $i \in I$. Así, $b \in \bigcup_{x \in I} f[x_i]$, lo que demuestra $f[\bigcup_{i \in I} x_i] \subseteq \bigcup_{i \in I} f[x_i]$. Invertir todos los pasos de esta prueba para demostrar que $\bigcup_{i \in I} f[x_i] \subseteq f[\bigcup_{i \in I} x_i]$ se deja como ejercicio para el lector. QED

(b) $f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} y_i\right] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[y_i]$.

La demostración se deja como ejercicio para el lector.

1.7.13. Por otra parte, la intersección de los conjuntos del rango de la familia $\{x\}_{i\in I}$, que se representa por $\bigcap_{i\in I} x_i$, se dice simplemente *intersección* de $\{x\}_{i\in I}$. Así pues (véase 1.3.5),

$$\bigcap_{i\in I} x_i = \{a \mid \text{para todo } i \in I, \quad a \in x_i\}$$

.

1.7.14. Sea una función $f : x \longrightarrow y$. Se cumplen

(a) $f\left[\bigcap_{i\in I} x_i\right] \subseteq \bigcap_{i\in I} f[x_i]$.

Demostración: Sea $b \in f\left[\bigcap_{i\in I} x_i\right]$. Entonces existe $a \in \bigcap_{i\in I} x_i$ tal que $f(a) = b$, con $a \in x_i$ para todo índice $i \in I$. Por esta razón, $b \in f[x_i]$ para todo $i \in I$, con lo que $b \in \bigcap_{i\in I} f[x_i]$. QED

(b) $f^{-1}\left[\bigcap_{i\in I} y_i\right] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}\left[y_i\right]$.

Demostración: Si $a \in f^{-1}\left[\bigcap_{i\in I} y_i\right]$, a es el antecedente de un único $b \in \bigcap_{i\in I} y_i$, es decir, $b = f(a)$. Pero si $b \in \bigcap_{i\in I} y_i$, entonces $b \in y_i$ para todo índice $i \in I$. Así $a \in f^{-1}\left[y_i\right]$ para todo $i \in I$, luego $a \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}\left[y_i\right]$. Esto demuestra que $f^{-1}\left[\bigcap_{i\in I} y_i\right] \subseteq \bigcap_{i\in I} f^{-1}\left[y_i\right]$. Demostrar que $\bigcap_{i\in I} f^{-1}\left[y_i\right] \subseteq f^{-1}\left[\bigcap_{i\in I} y_i\right]$ se deja como ejercicio al lector. QED

Si la función f es además inyectiva, se cumple

(c) $f\left[\bigcap_{i\in I} x_i\right] = \bigcap_{i\in I} f[x_i]$.

Demostración: En vista de (a), solo queda demostrar que, en caso de que f sea inyectiva, $\bigcap_{i\in I} f[x_i] \subseteq f\left[\bigcap_{i\in I} x_i\right]$. Para esto, sea $b \in \bigcap_{i\in I} f[x_i]$, de manera que $b \in f[x_i]$ para todo índice $i \in I$. Puesto que f es inyectiva, b no es imagen más que de un único elemento a, y que, al ser $b \in f[x_i]$ para todo índice $i \in I$, cumple con $a \in x_i$ para todo $i \in I$, con lo que $a \in \bigcap_{i\in I} x_i$. Así $b \in f\left[\bigcap_{i\in I} x_i\right]$, lo que demuestra lo que se quería. QED

Resaltamos que el enunciado (c) se cumple solo en caso de que la función f sea inyectiva. La razón es que un elemento a puede no estar en x_i para todo $i \in I$, y sin embargo, puede que su imagen $b = f(a)$ si esté en todos los conjuntos $f[x_i]$ debido a que es la imagen de algún otro elemento contenido en los conjuntos x_i que no tienen a a. Por ejemplo, supóngase a, cuya imagen es b, no está en x_i para algún $i \in I$, pero que este conjunto x_i contiene otro elemento c cuya imagen es también b, de tal manera que $b \in f[x_i]$ para cualquiera que sea el índice $i \in I$ sin necesidad de que $a \in x_i$ para todo $i \in I$. En ese caso (cuando f es no inyectiva) tenemos

$$f\left[\bigcap_{i\in I} x_i\right] \subset \bigcap_{i\in I} f[x_i]$$

.

1.7.15. La función $\mathrm{id}_x : x \longrightarrow x$ dada por

$$\mathrm{id}_x(a) = a$$

para todo $a \in x$, y que por tanto envía cada elemento de x consigo mismo, se llama función *identidad*.

Es claro que, siendo $f : x \longrightarrow y$,

$$\mathrm{id}_x \circ f = f$$

y

$$f \circ \mathrm{id}_y = f$$

.

Si $f : x \longrightarrow x$, esto se reduce a

$$f \circ \mathrm{id}_x = \mathrm{id}_x \circ f = f$$

.

1.7.16. Sean x e y dos conjuntos y considérese una función $f : x \longrightarrow y$. Sea x' un subconjunto de x. La función $f|_{x'} : x' \longrightarrow y$ dada por

$$f|_{x'}(a) = f(a)$$

,

se dice *restricción* de f a x'. Esto es,

$$f|_{x'} = f \cap (x' \times y)$$

,

por lo que la restricción de f a x' es una función que resulta de 'recortar' el dominio de f. Es claro que $f|_{x'} \subseteq f$.

1.7.17. Sea x un conjunto y x_1 un subconjunto de x. La aplicación

$$i : x_1 \longrightarrow x$$

dada por

$$i(a) = a$$

,

e.i. la restricción $\mathrm{id}_x|_{x_1}$, se llama *inyección canónica* de x_1 en x.

1.7.18. Sea $f : x \longrightarrow y$ una aplicación de un conjunto x en otro y, y sea $g : y \longrightarrow z$ una aplicación de y en un conjunto z. La aplicación

$$f \circ g : x \longrightarrow z$$

dada por

$$(f \circ g)(x) = g(f(x))$$

se dice *composición* de f y g. Esto es, $f \circ g$ resulta de aplicar f seguida de g, por lo que si f envía un elemento $a \in x$ con un elemento $b \in y$ y g envía a $b \in y$ con un elemento $c \in z$, entonces $f \circ g$ envía directamente el elemento $a \in x$ con el elemento $c \in z$ (Refiérase a la figura de abajo).

$f \circ g$

[20]

1.7.19. Sean las funciones $f : x \longrightarrow y$, $g : y \longrightarrow z$ y $h : z \longrightarrow v$. Tenemos que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. Para convencernos de ello es suficiente ver que

$$(f \circ (g \circ h))(a) = h(g(f(a)))$$

y que

$$((f \circ g) \circ h)(a) = h(g(f(a)))$$

.

1.7.20 Si $f : x \longrightarrow y$ es una función biyectiva, puede definirse la función f^{-1}, llamada *función inversa* de f, por

$$(b, a) \in f^{-1}$$

si y solo si

$$(a, b) \in f$$

.

20 HTTP://ES.WIKIBOOKS.ORG/WIKI/IMAGEN%3ACOMPOSITIONOFFUNCTIONS.PNG

Es decir,

$$f^{-1}(b) = a$$

si y solo si

$$f(a) = b$$

.

1.7.21 Es inmediato que

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

.

1.7.22. Además, se observa que

$$(f \circ f^{-1})(a) = f^{-1}(f(a)) = a$$

y

$$(f^{-1} \circ f)(b) = f(f^{-1}(b)) = b$$

,

por lo que

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_x$$

y

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_y$$

.

Si $f : x \longrightarrow x$, esto se simplifica a

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_x$$

.

1.7.23. Nótese también que, siendo $f : x \longrightarrow y$,

$$f^{-1} \circ \mathrm{id}_x = f^{-1} \quad \text{y} \quad \mathrm{id}_y \circ f^{-1}$$

.

1.7.24. Es claro que f^{-1} existe cuando f es biyectiva. Además la función inversa de una función es única. Para probar esto, supóngase que f_1^{-1} y f_2^{-1} son dos funciones inversas de una función $f : x \longrightarrow y$. Entonces

$$f_1^{-1} \circ (f \circ f_2^{-1}) = f_1^{-1} \circ \mathrm{id}_x = f_1^{-1}$$

,

y

$$(f_1^{-1} \circ f) \circ f_2^{-1} = \mathrm{id}_y \circ f_2^{-1} = f_2^{-1}$$

,

y por tanto $f_1^{-1} = f_2^{-1}$.

1.7.25. Sean las funciones $f : x \longrightarrow y$ y $g : y \longrightarrow z$. Entonces

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

.

En efecto, pues $(f \circ g)^{-1}$ es función inversa de $f \circ g$, y

$$g^{-1} \circ f^{-1} \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g$$

$= g^{-1} \circ \mathrm{id}_y \circ g = (g^{-1} \circ \mathrm{id}_y) \circ g = g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_y$,

con lo que $g^{-1} \circ f^{-1}$ es también función inversa de $f \circ g$, y así $g^{-1} \circ f^{-1}$ y $(f \circ g)^{-1}$ han de ser la misma función (pues la inversa de cualquier función es única). Otra forma de demostrar que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ es el argumento siguiente: Sea $(c, a) \in (f \circ g)^{-1}$. Se sigue que $(a, c) \in (f \circ g)$, y de esto que $c = g(b)$ para un $b \in y$ tal que $b = f(a)$, o sea que $(b, c) \in g$ y $(a, b) \in f$, de modo que $(c, b) \in g^{-1}$ y $(b, a) \in f^{-1}$, y por tanto $(c, a) \in g^{-1} \circ f^{-1}$. Esto prueba que $(f \circ g)^{-1} \subseteq g^{-1} \circ f^{-1}$, y probar que $g^{-1} \circ f^{-1} \subseteq (f \circ g)^{-1}$ resulta de recorrer todos los pasos anteriores de forma invertida.

---- **Capítulo anterior:** PRODUCTO CARTESIANO[21] **Capítulo siguiente:** RELACIONES[22]

21 Capítulo 0.1.6 página 11
22 Capítulo 0.1.8 página 23

0.1.8. Relaciones

1.8.1. Sean los conjuntos x e y. Cualquier subconjunto $\mathrm{R} \subseteq x \times y$ se dice *relación* de x sobre y. Por tanto, una relación es un conjunto de pares ordenados, de modo que toda función $f : x \longrightarrow y$ es una relación, si bien lo recíproco no es necesariamente cierto, pues puede una relación no cumplir **(f-1)** o **(f-2)** (o ambas) de **1.7.1** . De ésto, resulta conveniente adoptar una notación diferente a la que se usó con las funciones para expresar el hecho de que $(a, b) \in \mathrm{R}$. Así pues, escribiremos

$$a\mathrm{R}b \quad \text{siempre que} \quad (a, b) \in \mathrm{R}$$

,

y $a \not\mathrm{R} b$ cuando $(a, b) \notin \mathrm{R}$. Para el caso particular en que f es una relación que es a su vez es función, tenemos

$$f(a) = b \quad \text{equivale a} \quad afb$$

.

Sin embargo, emplearemos la notación $f(a) = b$ para representar $(a, b) \in f$ cuando sepamos que f es una función.

1.8.2. Las relaciones pueden definirse entre más de dos conjuntos. Así, una relación entre los conjuntos x, y y z, puede ser cualquier subconjunto del producto cartesiano $x \times y \times z$, y consistiría por tanto de ternas ordenadas. Una relación R así se dice *relación ternaria*, para distinguirse de las relaciones que se aplican solo entre dos conjuntos (que naturalmente se llaman *relaciones binarias*). En términos más generales, una función n- *aria* entre cuales quiera n conjuntos $x_1, \ldots, x_n$, es un conjunto cualquiera $\mathrm{R} \subseteq x_1 \times \cdots \times x_n$.

1.8.3. En este libro solo trataremos las relaciones binarias, por lo que cuando se hable de relación se entenderá que se trata de una de éstas.

1.8.4. En particular, una relación sobre un conjunto x es un subconjunto $\mathrm{R} \subseteq x \times x$. Al igual que las funciones, las relaciones sobre un conjunto x pueden tener, de forma particular, ciertas propiedades que permiten clasificarlas. Más exactamente: Sea R una relación sobre un conjunto x.

La relación R es *reflexiva* siempre que **(R-1)** $a\mathrm{R}a$ para toda $a \in x$. La relación R es *irreflexiva* si **(R-2)** $a\mathrm{R}a$ para ningún $a \in x$. La relación R es *simétrica* siempre que **(R-3)** $a\mathrm{R}b$ y $b\mathrm{R}$ a para cualesquiera $a, b \in x$. La relación R es *antisimétrica* siempre que **(R-4)** $a\mathrm{R}b$ y $b\mathrm{R}a$ implica $a = b$ para cualesquiera $a, b \in x$. La relación R es *asimétrica* siempre que **(R-5)** $a\mathrm{R}b$ implica que $b\mathrm{R}$ a es falso para cualesquiera $a, b \in x$. La relación R es *transitiva* siempre que **(R-6)** $a\mathrm{R}b$ y $b\mathrm{R}c$ implica $a\mathrm{R}c$ para cualesquiera $a, b, c \in x$. La relación R es *conexa* siempre que **(R-7)** $a\mathrm{R}b$ o $b\mathrm{R}a$ para cualesquiera $a, b \in x$. </blockquote>

1.8.5. Una relación R que es reflexiva, simétrica y transitiva se dice *relación de equivalencia*. Si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto x y si $a \in x$, entonces el conjunto $[a]_\mathrm{R}$ dado por

$$[a]_R = \{b \mid b \in x \quad \text{y} \quad bRa\}$$

se dice *clase de equivalencia* de a por R. Si se sabe cual es la relación R y si no se presta a confusión, es común escribir simplemente $[a]$ en lugar de $[a]_R$. Así pues

$$b \in [a]_R \quad \text{si y solo si} \quad bRa$$

.

1.8.6. La aplicación identidad en un conjunto x,

$$\mathrm{id}_x = \{(a, a) \mid a \in x\}$$

,

es claramente una relación de equivalencia sobre x, y dentro del contexto de la teoría de relaciones suele hacerse referencia a ella mediante el término *relación trivial.*

1.8.7. Otra relación de equivalencia sobre un conjunto x es el mismo producto cartesiano $x \times x$, que en este caso se llama comúnmente *relación grosera.*

1.8.8. Puesto que una relación de equivalencia R sobre un conjunto x es reflexiva, tenemos

$$a \in [a]_R$$

para todo $a \in x$. Además, R es simétrica, de donde

$$b \in [a]_R \quad \text{si y solo si} \quad a \in [b]_R$$

.

Se tiene también que

$$b, c \in [a]_R \quad \text{implica} \quad bRc$$

.

Efectivamente, pues si $b, c \in [a]_R$, entonces aRb y cRa, y por simetría, aRc, luego por transitividad bRc. Otra cosa más es que

$$[a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing \quad \text{implica} \quad [a]_R = [b]_R$$

.

La razón es que si $[a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing$, entonces existe un $c \in x$ tal que $c \in [a]_R$ y $c \in [b]_R$, o sea que $c\mathrm{R}a$ y $c\mathrm{R}b$, y con esto $a\mathrm{R}b$, que como ya vimos significa que $[a]_R = [b]_R$.

1.8.9. Otra forma de expresear este resultado es que

$$[a]_R \neq [b]_R \quad \text{implica} \quad [a]_R \cap [b]_R = \varnothing$$

.

1.8.10. Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto x. El *conjunto cociente* de x por la relación R, que se representa por x/R, se define por

$$x/\mathrm{R} = \{[a]_R \mid a \in x\}$$

.

Es decir, x/R contiene todas las clases de equivalencia por la relación R.

1.8.11. Puesto que cada uno de los elementos de x está en alguna clase de equivalencia (pues por ejemplo si $a \in x$ se tiene $a \in [a]_R$), resulta que

$$\bigcup_{[a]_{Rel} \in x/\mathrm{R}} [a]_R = x$$

,

o, para mayor claridad,

$$\bigcup_{a \in x} [a]_R = x$$

,

y como cualesquiera dos clases de equivalencia distintas de x/R son disjuntas (véase **1.8.9**), x/R es una partición de x (véase **1.5.6**).

1.8.12. Sea C una partición de un conjunto X. Luego defínase la relación R mediante

$$\text{para cualesquiera } a, b \in X, \quad a\mathrm{R}b \text{ si y solo si } a, b \in x$$

para algún $x \in C$. Puesto que

$$\bigcup_{x \in C} x = X$$

,

cada uno de los elementos de X está contenido en algún conjunto x de C, por lo que $a\mathrm{R}a$ para todo $a \in X$, y así R es reflexiva. Claramente $a\mathrm{R}b$ implica $b\mathrm{R}a$ para todo $a, b \in X$, por lo que R es simétrica. Además, si $a\mathrm{R}b$ y $b\mathrm{R}c$, existen $x_1, x_2 \in C$ tales que $a, b \in x_1$ y $b, c \in x_2$, y estos han de cumplir $x_1 = x_2$ (pues si $x_1 \neq x_2$, ha de ser $x_1 \cap x_2 = \varnothing$, lo que es contradictorio en vista de que $b \in x_1$ y $b \in x_2$), y entonces concluimos que $a\mathrm{R}c$. Esto hace que R sea también transitiva, y entonces termina siendo esta una relación de equivalencia sobre X inducida por la partición C.

1.8.13. El resultado de **1.8.11** y el resultado de **1.8.12** se resumen en el enunciado siguiente:

Si R *es una relación de equivalencia sobre un conjunto* x*, entonces el conjunto cociente* x/R *es una partición de* x *y, recíprocamente, si* P *es una partición del conjunto* x*, entonces existe una relación* R *tal que* $x/\mathrm{R} = P$.

1.8.14. Una relación R sobre un conjunto x reflexiva, antisimétrica y transitiva se dice *relación de orden parcial* (o simplemente un *orden*) sobre el conjunto x, y el par (x, R) se dice entonces un *conjunto parcialmente ordenado*, o simplemente que es un *conjunto ordenado*.

1.8.15. Aquí usaremos el símbolo

$$\leq$$

para representar un orden parcial cualquiera (diferente según el contexto) y no solo para el familiar orden sobre el conjunto de números reales.

En particular, la relación de inclusión $\subseteq$ sobre el conjunto potencia $\mathscr{P}(x)$ de un conjunto x es una relación de orden parcial.

1.8.16. Se dice que R es una *relación de orden (parcial) estricto*, o simplemente que es un *orden estricto*, sobre un conjunto x, si R es irreflexiva, antisimétrica y transitiva. Para representar ordenes estrictos, cualesquiera que sean estos, usaremos el símbolo

$$<$$

.

Un orden que no sea estricto será llamado simplemente *orden no estricto*.

1.8.17. Si $\leq$ es una relación de orden no estricto sobre un conjunto x, entonces la relación

$$<= \{(a, b) \mid (a, b) \in \leq \quad \text{y} \quad a \neq b\}$$

es claramente un orden estricto sobre x. Por otro lado, si $<$ es una relación de orden estricto sobre x, entonces

$$\leq = < \cup \{(a, a) \mid a \in x\}$$

es una relación de orden no estricto sobre x.

1.8.18. Sea $(x, \leq)$ un conjunto ordenado. Un elemento $a \in x$ tal que $a \leq b$ para todo $b \in x$ se dice *elemento mínimo* (o *primer elemento*) de x. El elemento mínimo de un conjunto, si existe, es único. En efecto, pues si a y a' fueran dos elementos mínimos de x, por definición

$$a \leq a' \quad \text{y} \quad a' \leq a$$

,

y por antisimetría, $a = a'$.

1.8.19. Sea $(x, \leq)$ un conjunto ordenado. Un elemento $a \in x$ tal que $b \leq a$ para todo $b \in x$ se dice *elemento máximo* (o *último elemento*) de x. También el elemento máximo de un conjunto, si existe, es único.

1.8.20. En un conjunto ordenado $(x, \leq)$ es posible que existan elementos que, pudiendo no ser un máximo o un mínimo de x, tienen cierta distinción sobre otros elementos de x por medio de el orden $\leq$. Nos referimos a los *minimales* y los *maximales.* Un elemento $a \in x$ es un *minimal* en x si no existe ningún elemento en x estrictamente menor que a. (por medio del orden estricto $<$ dado por $a < b$ si y solo si $a \leq b$ y $a \neq b$, por supuesto) ; un elemento $a \in x$ se dice *máximal* de x si no existe ningún elemento en x estrictamente mayor que a. Es posible que los minimales de un conjunto, si existen, sean más de uno. Lo mismo aplica para los maximales de un conjunto.

Notemos pues que un conjunto puede no contener ni mínimos (máximos) ni minimales (maximales), o bien, contener uno o más minimales (maximales) y ningún mínimo (máximo). Si un conjunto tiene mínimo (máximo), éste es a su vez el único minimal (maximal) del conjunto.

1.8.21. Sea $(x, \leq)$ un conjunto ordenado, y sea $x_1 \subseteq x$. Un elemento $a \in x$ tal que $a \leq b$ para todo $b \in x_1$ se dice *cota inferior* (o *minorante*) de x_1. Por otro lado, un elemento $a \in x$ tal que $b \leq a$ para todo $b \in x_1$ se dice *cota superior* (o *mayorante*) de x_1. Una cota inferior o superior de x_1 puede o no estar en x_1. Además, si C_i es el conjunto de cotas inferiores de x_1, entonces $C_i \cap x_1$ solo puede ser vacío o ser un conjunto con un solo elemento. Si $C_i \cap x_1 \neq \varnothing$, entonces el único elemento de $C_i \cap x_1$ es claramente un mínimo de x_1. Si C_i contiene un elemento máximo, entonces este se dice *ínfimo* de x_1, y lo representaremos por $\inf(x_1)$. Análogamente, si C_s es el conjunto de todas las cotas superiores de x_1, $C_s \cap x_1 = \varnothing$ o $C_s \cap x_1$ contiene a lo más un elemento, el cual sería entonces un máximo de x_1. Si C_s tiene un mínimo, entonces este se dice *supremo* de x_1, y lo representaremos por $\sup(x_1)$.

1.8.22. Un conjunto que tiene cotas inferiores se dice *inferiormente acotado*, mientras que un conjunto que tiene cotas superiores se dice *superiormente acotado.* Si un conjunto esta acotado inferior y superiormente, se dice simplemente que es *acotado.*

1.8.23. Sea $(x, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si todo subconjunto de x admite un minimal respecto de $\leq$, se dice que $\leq$ es una *relación de orden bien fundada* sobre x, o que es un orden bien fundado sobre x. Dado ese caso, se dice que el par $(x, \leq)$ es bien fundado.

1.8.24. Un hecho apreciable a cerca de órdenes bien fundados es el siguiente:

Si $(x, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, entonces $(x, \leq)$ es bien fundado si y solo si no existe una secuencia infinita $\{a\}_n^\infty$ tal que $a_{n+1} < a_n$.

En efecto, pues si $(x, \leq)$ no fuera un conjunto bien fundado, entonces, si $a_n \in x$, a_n no es un minimal, y por lo tanto existe otro elemento $a_{n+1} \in x$ tal que $a_{n+1} < a_n$. Este argumento es claramente válido para cualquiera que sea el número natural n, por lo que se concluye que si $(x, \leq)$ es no bien fundado, existe una secuencia infinita descendiente $\ldots < a_{n+1} < a_n < \ldots < a_0$. Recíprocamente, si $(a, \leq)$ es un conjunto ordenado tal que existe una secuencia descendiente infinita $\ldots < a_{n+1} < a_n < \ldots < a_0$, entonces, para cualquiera que sea el elemento $a_n \in x$, existe otro a_{n+1} tal que $\ldots < a_{n+1} < a_n$, de modo que a_n no es minimal de x, y con ello $(x, \leq)$ es no bien fundado.

1.8.25. Una relación de orden $\leq$ que es conexa en x, se dice *relación de orden total*, u *orden total*, sobre x, y se dice que el par $(x, \leq)$ es un conjunto *totalmente ordenado*.

1.8.25. Un conjunto totalmente ordenado y bien fundado se dice conjunto *bien ordenado*, y su relación de orden se dice por tanto un *buen orden*. Supóngase que $(x, \leq)$ es un conjunto bien ordenado. Entonces $(x, \leq)$ es, en particular, bien fundado, por lo que todo subconjunto $x_1 \subseteq x$ tiene por lo menos un minimal. Supóngase que a y a' son dos minimales de x_1. Puesto que $(x, \leq)$ es totalmente ordenado,

$$a \leq a' \quad \text{o} \quad a' \leq a$$

.

Cualquiera que sea el caso, debe de ser $a = a'$, pues si no, $a < a'$ o $a' < a$, lo que no puede ser por que un minimal no tiene un elemento estrictamente menor que él (ni siquiera siendo este otro minimal). Vemos entonces que el elemento minimal a es un mínimo de x_1. Por conclusión, un conjunto ordenado $(x, \leq)$ es bien ordenado si todo subconjunto x_1 de x tiene mínimo.

---- **Capítulo anterior:** FUNCIONES[23] **Capítulo siguiente:** EJERCICIOS[24]

0.1.9. Ejercicios

- **1.** Supóngase dado el conjunto de los números naturales, que representaremos por $\mathbb{N}$. Escribir el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ en notación de la forma $\{a \mid \phi(a)\}$.
- **2.** Probar que, siendo $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros, $\{a \mid a \in \mathbb{Z} \text{ y } 20a^2 - 23a + 6 = 0\} = \emptyset$.

0.2. GNU Free Documentation License

#redirect WIKILIBROS:GNU FREE DOCUMENTATION LICENSE[25]

23 Capítulo 0.1.7 página 13
24 Capítulo 0.1.9 página 28
25 HTTP://ES.WIKIBOOKS.ORG/WIKI/WIKILIBROS%3AGNU%20FREE%20DOCUMENTATION%20LICENSE

1 Autores

Edits	User
11	Akhram[1]
82	Alephcero[2]
4	Antonio lopez c[3]
1	Chlewbot[4]
8	Gimlinu[5]
1	Jarisleif[6]
1	ManuelGR[7]
1	Morza[8]
3	Ramonrt[9]
13	Wewe[10]
1	Wilfredor[11]

1 http://es.wikibooks.org/w/index.php?title=Usuario:Akhram
2 http://es.wikibooks.org/w/index.php?title=Usuario:Alephcero
3 http://es.wikibooks.org/w/index.php?title=Usuario:Antonio_lopez_c
4 http://es.wikibooks.org/w/index.php?title=Usuario:Chlewbot
5 http://es.wikibooks.org/w/index.php?title=Usuario:Gimlinu
6 http://es.wikibooks.org/w/index.php?title=Usuario:Jarisleif
7 http://es.wikibooks.org/w/index.php?title=Usuario:ManuelGR
8 http://es.wikibooks.org/w/index.php?title=Usuario:Morza
9 http://es.wikibooks.org/w/index.php?title=Usuario:Ramonrt
10 http://es.wikibooks.org/w/index.php?title=Usuario:Wewe
11 http://es.wikibooks.org/w/index.php?title=Usuario:Wilfredor

Índice de figuras

- GFDL: Gnu Free Documentation License. http://www.gnu.org/licenses/fdl.html
- cc-by-sa-3.0: Creative Commons Attribution ShareAlike 3.0 License. http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/
- cc-by-sa-2.5: Creative Commons Attribution ShareAlike 2.5 License. http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/
- cc-by-sa-2.0: Creative Commons Attribution ShareAlike 2.0 License. http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/
- cc-by-sa-1.0: Creative Commons Attribution ShareAlike 1.0 License. http://creativecommons.org/licenses/by-sa/1.0/
- cc-by-2.0: Creative Commons Attribution 2.0 License. http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/
- cc-by-2.0: Creative Commons Attribution 2.0 License. http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/deed.en
- cc-by-2.5: Creative Commons Attribution 2.5 License. http://creativecommons.org/licenses/by/2.5/deed.en
- cc-by-3.0: Creative Commons Attribution 3.0 License. http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/deed.en
- GPL: GNU General Public License. http://www.gnu.org/licenses/gpl-2.0.txt
- PD: This image is in the public domain.
- ATTR: The copyright holder of this file allows anyone to use it for any purpose, provided that the copyright holder is properly attributed. Redistribution, derivative work, commercial use, and all other use is permitted.
- EURO: This is the common (reverse) face of a euro coin. The copyright on the design of the common face of the euro coins belongs to the European Commission. Authorised is reproduction in a format without relief (drawings, paintings, films) provided they are not detrimental to the image of the euro.
- LFK: Lizenz Freie Kunst. http://artlibre.org/licence/lal/de
- CFR: Copyright free use.
- EPL: Eclipse Public License. http://www.eclipse.org/org/documents/epl-v10.php