Νικόλαος Μανωλόπουλος : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ

Πίνακας περιεχομένων

Παραμετρικό σύστημα συντεταγμένων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το παραμετρικό σύστημα συντεταγμένων αποτελεί μία γενίκευση η οποία εμπεριέχει το κλασικό Καρτεσιανό σύστημα.

Είναι δυνατόν να εφαρμοστεί σε αυτό ο απειροστικός λογισμός.

Επίσης είναι δυνατόν να υπολογιστεί το μήκος καμπυλόγραμμου τμήματος στόν τρισδιάστατο χώρο , το εμβαδό κλπ.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

Ορίζουμε το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με άξονες Χ(τ),Υ(τ).

Κάθε σημείο Μ στο επίπεδο,ορίζεται απο το ζεύγος (Χ(τ),Υ(τ)) γιά την ίδια τιμή της μεταβλητής τ.

Ετσι έχουμε το σημείο Μ(Χ(τ),Υ(τ)). Το τ είναι πραγματικός αριθμός.

Πρόκειται γιά γεωμετρική απεικόνιση της αντιστοιχίας του πεδίου των τιμών της συνάρτησης Υ(τ) ως προς το πεδίο των τιμών της συνάρτησης Χ(τ).

Αν Χ(τ)= τ τότε συμπίπτει με το κλασικό ζεύγος (Υ=φ(χ)).

Γενικότερα αν Υ(τ)=φ(τ) καί Υ(τ)=Υ(φ(τ)) καί πάλι συμπίπτει με το κλασικό σύστημα

Αν στο ζεύγος (Χ(τ),Υ(τ)) κάνουμε εναλλαγή θέτοντας στον άξονα Χ(τ) το Υ(τ) και στον άξονα Υ(τ) το Χ(τ)

τότε προκύπτει η ίδια συνάρτηση περιστραμένη κατά 90 μοίρες.

Στο ορθοκανονικό σύστημα X(t),Y(t) ορίζονται οι συναρτήσεις

1) Ευθεία

Χ(τ)=α φ(τ)+β

Υ(τ)=γ φ(τ)+δ

α,β,γ,δ=σταθερές φ(τ)=συνάρτηση

2) Κύκλος

Χ(τ)=ρ συν(τ)

Υ(τ)=ρ ημ(τ)

ρ=ακτίνα ,, τ =πραγματικός αριθμός ,, κέντρο Ο(0,0)

3) Έλλειψη

$X(\tau)=\alpha$ συν(τ)

$Y(\tau)=\beta$ ημ(τ)

α,β=ημιάξονες

4. Τρίγωνο

$X(\tau)=2\alpha\tau+\alpha|\beta\tau+\gamma|+\alpha|\beta\tau-\gamma|$

$Y(\tau)=\delta[\alpha|\beta\tau+\gamma|+\alpha|\beta\tau-\gamma|-2\alpha\gamma]$

$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ σταθερές . Πρέπει $\beta>1$
$-\gamma \le \tau \le \gamma$
Βάση = $2\alpha\gamma$
Αν δ=sqrt(3)/2 τότε είναι ισόπλευρο με πλευρά $\alpha\gamma$.

Απλοποιημένο:

$X(\tau)=\kappa^*$ (2*t-abs(2*t+1)+abs(2*t-1))
$Y(\tau)=\lambda^*$((abs(2*t-1))+(abs(2*t+1)))-sqrt(3)

κ,λ σταθεροί αριθμοί
Αν λ=(sqrt(3)/2)*κ τότε είναι ισόπλευρο.
Αν στην συνάρτηση αντικαταστήσουμε την μεταβλητή τ με ημ(τ) τότε παράγεται κλειστό σχήμα στο διάστημα $(-\pi/2),(\pi/2)$

5. Τετράπλευρα (Τετράγωνο-παραλληλόγραμμο)

α)

$X(\tau)=\alpha$ τοξημ(ημ$(\tau+\gamma)$)

$Y(\tau)=\beta$ τοξσυν(συν$(\tau+\delta)$)

Αν $\alpha=\beta$ καί $\gamma=\delta$ τότε είναι τετράγωνο .

Αν $\alpha\neq\beta$ καί $\gamma=\delta$ τότε είναι ρόμβος .

Αν $\alpha=\beta$ καί $\gamma\neq\delta$ τότε είναι ορθογώνιο παραλληλογραμμο.

Αν $\alpha\neq\beta$ καί $\gamma\neq\delta$ τότε είναι παραλληλόγραμμο.

περιστραμένο κατά 45 μοίρες:

$X(\tau)=\gamma$ (τοξημ(ημ(τ)) + α τοξσυν(συν(τ)))

$Y(\tau)=\delta$ (-τοξημ(ημ(τ)) + β τοξσυν(συν(τ)))

α,β σταθερές

Αν $\alpha=\beta$ καί $\gamma=\delta=1$ τότε είναι τετράγωνο μέ πλευρά $\alpha\pi$. Γιά ακέραιο μήκος $(\alpha=\kappa/\pi)$ κ=1,2,3,......

Αν $\alpha=\beta$ καί $\gamma=\delta>1$ τότε είναι ορθογώνιο παραλληλογραμμο.

Αν $\alpha\neq\beta$ καί $\gamma\neq\delta$ τότε είναι παραλληλόγραμμο.

β)

$X(\tau)=\alpha\beta\tau+\alpha|\beta\tau-\alpha\beta|-\alpha|\beta\tau+\alpha\beta|$
$Y(\tau)=\gamma|-\delta\tau-\varepsilon|+\gamma|\delta\tau+\varepsilon|$

Πρέπει $\beta>1$ καί $\delta>\beta$

Αν $X(\tau)=\lambda\tau+\alpha|\beta\tau-\alpha\beta|-\alpha|\beta\tau+\alpha\beta|$ καί $\lambda<\alpha\beta$ τότε ανοίγει ως τετράπλευρο.
Αν $\lambda>\alpha\beta$ τότε κλείνει ως τετράπλευρο.

Αν:
$X(\tau)=\alpha\beta\tau+\alpha|\beta\tau-\kappa|-\alpha|\beta\tau+\kappa|$
$Y(\tau)=((\alpha\beta)/\lambda)\ |-(\lambda/2)\tau|+((\alpha\beta)/\lambda)\ |(\lambda/2)\tau|$
τότε είναι τετράγωνο ($\alpha,\beta,\kappa,\lambda$ σταθερές)
$-\kappa \le \boldsymbol{\tau} \le \kappa$
διαγώνιος=$2\alpha\kappa$
πλευρά=sqrt(2)$\alpha\kappa$

Αν:
$X(\tau)=\alpha\beta\tau+\alpha|\beta\tau-\kappa|-\alpha|\beta\tau+\kappa|$
$Y(\tau)=((\alpha\beta)/\lambda)\ |-\mu\tau|+((\alpha\beta)/\lambda)\ |\mu\tau|$
καί $\mu\neq(\lambda/2)$,τότε είναι ρόμβος

Απλοποιημένο :
X(τ)=κ*(2t+(abs(2t-1))-abs(2t+1))
Y(τ)=λ*(abs(-t)+abs(t))

Αν κ=λ τότε είναι τετράγωνο
Αν κ≠λ τότε είναι ρόμβος

περιστραμένο κατά 45 μοίρες:
X(τ)=κ*(2t+abs(2t-1)-abs(2t+1)-abs(-t)-abs(t))
Y(τ)=λ*(2t+abs(2t-1)-abs(2t+1)+abs(-t)+abs(t))

Οι συντελεστές κ,λ το μεγενθύνουν.
Αν στην συνάρτηση αντικαταστήσουμε την μεταβλητή τ με ημ(τ) τότε παράγεται κλειστό σχήμα στο διάστημα (-π/2),(π/2)

6) Εξάπλευρο

X(τ) =2 τοξημ(ημ(τ))

Y(t) =(π/2) (τοξσυν(συν(τ-(π/4)))+τοξημ(ημ(τ-(π/4))))

7) Σπείρα του Αρχιμήδη (ισοαπέχουσα)

X(τ)=α ημ(β τ) τ

Y(τ)=α συν(β τ) τ

α,β σταθερές

8) Παραμετρική τροχιά(ομοεπίπεδες τροχιές)

Δύο σώματα Α καί Β κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές με κοινή εστία Ο.

τροχιά (Ο,α1,β1):

X(τ)=α1 ημ(τ)

Y(τ)=β1 συν(τ)

α1,β1 οι ημιάξονες της τροχιάς του Α

τροχιά (Ο,α2,β2):

X(τ)=α2 ημ[(κ/λ)τ]

Y(τ)=β2 συν[(κ/λ)τ]

α2,β2 οι ημιάξονες της τροχιάς του Β

κ η περίοδος της πρώτης τροχιάς (Ο,α1,β1)

λ η περίοδος της δεύτερης τροχιάς (Ο,α2,β2)

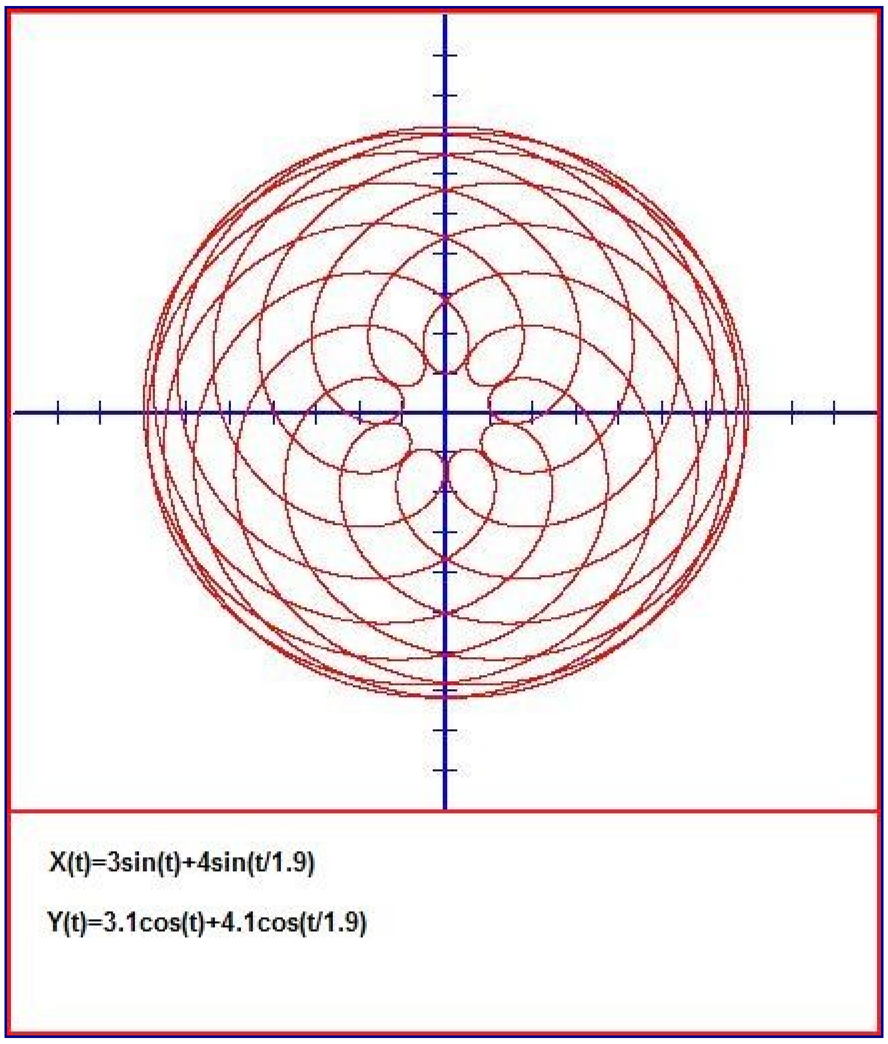
Η τροχιά της κίνησης του Α ως πρός το Β δίνεται από την παραμετρική δυάδα:

X(τ)=α1 ημ(τ) + α2 ημ[(κ/λ)τ]

Y(τ)=β1 συν(τ) + β2 συν[(κ/λ)τ]

δηλαδή το άθροισμα των δύο τροχιών.

Ακολουθεί η τροχιά της κίνησης του πλανήτη άρη ως πρός τον πλανήτη γή.(Επίκυκλοι του Πτολεμαίου)



Συνάρτηση εφαπτομένης ευθείας

Εστω η συνάρτηση (Χ(τ),Υ(τ)).

Η εφαπτομένη ευθεία στο σημείο $τ_0$ έχει εξίσωση:

$X_0(τ)=X'(τ_0)\ τ + X(τ_0)$

$Y_0(τ)=Y'(τ_0)\ τ + Y(τ_0)$

$X'(τ_0)$, $Y'(τ_0)$ οι πρώτες παράγωγοι στο σημείο $τ_0$

Επίσης η ευθεία:

$X(τ)=X'(τ_0)\ τ$

$Y(τ)=Y'(τ_0)\ τ$

είναι παράλληλη καί διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μήκος καμπυλόγραμμου τμήματος

Εστω η παραμετρική $(X(t),Y(t))$

$$(ds)^2=(dX)^2+(dY)^2 \Leftrightarrow (ds)^2=(dX/dt)^2(dt)^2+(dY/dt)^2(dt)^2 \Leftrightarrow$$

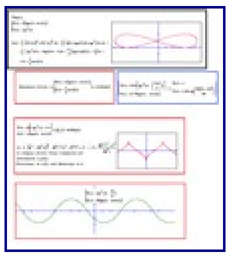
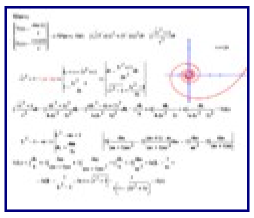
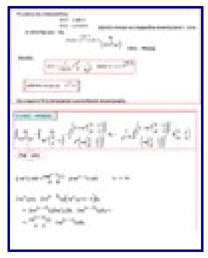
$$\Leftrightarrow (ds)^2=((X'(t))^2+(Y'(t))^2)(dt)^2 \Leftrightarrow\ ds=\sqrt{((X'(t))^2+(Y'(t))^2)}\ d(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S(t)=\int\sqrt{((X'(t))^2+(Y'(t))^2)}\ d(t)$$

$(X'(t)),\ (Y'(t))$ οι πρώτες παράγωγοι ως προς t

$S(t)$ η συνάρτηση του επικαμπύλιου μήκους

Παραδείγματα επιλύσιμου μήκους

-   

  Παραμετρικό κύμα ,Σπείρα ,,,,,,,,,,,,,,Σπείρα του Αρχιμήδη

ΕΜΒΑΔΟ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

Εστω η παραμετρική δυάδα (X(τ)),(Y(τ))

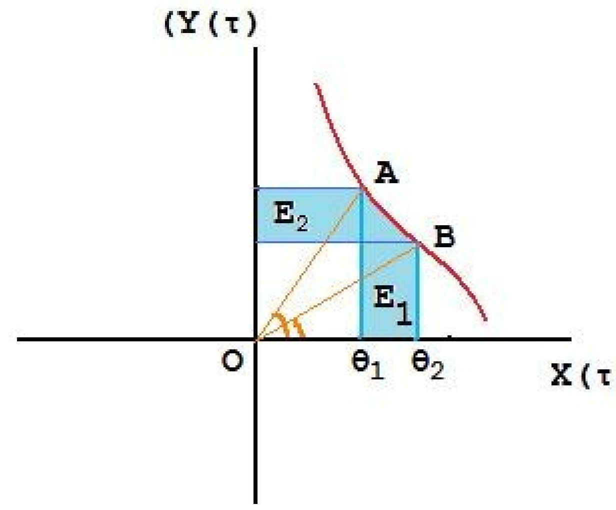
Το εμβαδό της επιφάνειας μεταξύ του γραφήματος και του άξονα X(τ) είναι :

$$E_1 = \int_{\tau 1}^{\tau 2} Y(\tau)\,.d(X(\tau)) = \int_{\tau 1}^{\tau 2} Y(\tau)\,.\,\frac{d(X(\tau))}{d\tau}\,d\tau = \int_{\tau 1}^{\tau 2} Y(\tau)\,.\,(X'(\tau))\,.d\tau$$

(X′(τ)) = Πρώτη παράγωγος ως πρός τ

$$X(\tau_1) = \theta_1 \Leftrightarrow \tau_1 = X(\theta_1)$$

$$X(\tau_2) = \theta_2 \Leftrightarrow \tau_2 = X(\theta_2)$$



Το εμβαδό της επιφάνειας μεταξύ του γραφήματος και του άξονα Y(τ) είναι :

$$E_2 = \int_{\tau 1}^{\tau 2} X(\tau)\,.d(Y(\tau)) = \int_{\tau 1}^{\tau 2} X(\tau)\,.\,\frac{d(Y(\tau))}{d\tau}\,d\tau = \int_{\tau 1}^{\tau 2} X(\tau)\,.\,(Y'(\tau))\,.d\tau$$

ΕΜΒΑΔΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Εμβαδό τρισδιάστατης επιφάνειας που προκύπτει από περιστροφή δισδιάστατου γραφήματος παραμετρικής συνάρτησης $Y(\tau), X(\tau)$

α) $\chi\chi'$ ο άξονας περιστροφής

$2\pi Y(\tau)$ η περιφέρεια κύκλου με ακτίνα $Y(\tau)$

Μήκος καμπυλόγραμμου τμήματος $ds = \sqrt{((Y(\tau))')^2 + ((X(\tau))')^2}\ d\tau$

Εμβαδό $E = \int 2\pi Y(\tau) ds = 2\pi \int Y(\tau) \sqrt{((Y(\tau))')^2 + ((X(\tau))')^2}\ d\tau$

$X'(\tau)$ η πρώτη παράγωγος της $X(\tau)$ ως πρός τ.

$Y'(\tau)$ η πρώτη παράγωγος της $Y(\tau)$ ως πρός τ.

β) yy' ο άξονας περιστροφής

$2\pi X(\tau)$ η περιφέρεια κύκλου με ακτίνα $X(\tau)$

Μήκος καμπυλόγραμμου τμήματος $ds = \sqrt{((Y(\tau))')^2 + ((X(\tau))')^2}\ d\tau$

Εμβαδό $E = \int 2\pi X(\tau) ds = 2\pi \int X(\tau) \sqrt{((Y(\tau))')^2 + ((X(\tau))')^2}\ d\tau$

Παραδείγματα επιλύσιμα

1) $X(\tau)=\tau \quad Y(\tau)=\alpha\tau^2+\beta\tau+\gamma$

2) $X(\tau)=\tau \quad Y(\tau)=\alpha\tau^3+\beta\tau$ (α,β σταθερές)

3) $X(\tau)=\tau \quad Y(\tau)=\eta\mu(\tau)$ ($\chi\chi'$ ο άξονας περιστροφής)

4) $X(\tau)=\tau \quad Y(\tau)=\sigma\upsilon\nu(\tau)$ ($\chi\chi'$ ο άξονας περιστροφής)

5) $X(\tau)=\tau \quad Y(\tau)=\ln(\tau)$ (yy' ο άξονας περιστραφής)

6) $X(\tau)=\tau \quad Y(\tau)=\varepsilon\varphi(\tau)$ ($\chi\chi'$ ο άξονας περιστρο φής)

7) $X(\tau)=\tau \quad Y(\tau) = \alpha + \sqrt{\rho^2 - \tau^2}$ (α ,ρ σταθερές)

(Αν $\alpha = 0$ τότε έχουμε σφαίρα εκ περιστροφής κύκλου ακτίνας ρ)

(Αν $\alpha \neq 0$ καί $\chi\chi'$ ο άξονας περιστροφής τότε έχουμε σωληνωειδή στεφάνη)

η: $\begin{cases} X(\tau) = \alpha.\sigma\upsilon\nu(\tau) \\ Y(\tau) = \alpha.\eta\mu(\tau) \end{cases}$ σφαίρα

8) $X(\tau)=\tau \quad Y(\tau) = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - \tau^2}$ (α ,β σταθερές)

(Στερεό εκ περιστροφής έλλειψης- γεωειδές)

η: $\begin{cases} X(\tau) = \alpha\ \sigma\upsilon\nu(\tau) \\ Y(\tau) = \beta\,\eta\mu(\tau) \end{cases}$ γεωειδές

9) $\begin{cases} X(\tau) = \alpha\ \sigma\upsilon\nu^3(\tau) \\ Y(\tau) = \alpha\,\eta\mu^3(\tau) \end{cases}$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

1) Παραμετρικές μίας μεταβλητής

Ορίζουμε το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με άξονες Χ(τ),Υ(τ),Ζ(τ).

Κάθε σημείο Μ στο χώρο ορίζεται απο την τριάδα (Χ(τ),Υ(τ),Ζ(τ)) γιά την ίδια τιμή της μεταβλητής τ. Ετσι έχουμε το σημείο Μ (Χ(τ),Υ(τ),Ζ(τ)) .

Το τ είναι πραγματικός αριθμός.

Πρόκειται γιά γεωμετρική απεικόνιση της αντιστοιχίας του πεδίου των τιμών της συνάρτησης Ζ(τ) ως προς το πεδίο των τιμών της συνάρτησης Υ(τ) και ως προς το πεδίο των τιμών της συνάρτησης Χ(τ).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ευθεία στο χώρο

$X(\tau) = \alpha_1\ \tau + \beta_1$

$Y(\tau) = \alpha_2\ \tau + \beta_2$

$Z(\tau) = \alpha_3\ \tau + \beta_3$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ σταθερές

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Σπειροειδής σφαίρα

Χ(t) = ημ(α t) $\sqrt{R^2 - t^2}$

Υ(t) = συν(α t) $\sqrt{R^2 - t^2}$

Z(t) = t

α=Σταθερός αριθμός

R=ακτίνα της σφαίρας

Συνολικός αριθμός σπειρών { κ=(R α)/π} -R≤ t ≤R

Αν Z(t)=συν(t) τότε παίρνει πιατοειδές σχήμα .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Σπειροειδής κύλινδρος (άπειρος)

Χ(τ)=ρ ημ(ατ)

Υ(τ)=ρ συν(ατ)

Ζ(τ)=βτ

ρ=Ακτίνα του κυλίνδρου

α,β=σταθερές

-Αν β=ρ(α/(2π)) τότε οι σπείρες ισαπέχουν μεταξύ τους καθώς καί με τον κυλινδρικό άξονα .

-Ο αριθμός σπειρών ανά μονάδα ύψους του Ζ(τ) είναι κ=α/(2πβ).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Σπειροειδής παλινδρόμιση(Πλανήτης ερμής)

Χ(τ)=α ημ(τ)

Υ(τ)=β συν(τ)

Ζ(τ)=γ ημ(τ/2)

α,β,γ σταθερές

Συνάρτηση εφαπτομένης ευθείας

Εστω η συνάρτηση (X(τ),Y(τ),Z(τ)).

Η εφαπτομένη ευθεία στο σημείο $τ_0$ έχει εξίσωση:

$X_0(τ)=X'(τ_0)\ τ + X(τ_0)$

$Y_0(τ)=Y'(τ_0)\ τ + Y(τ_0)$

$Z_0(τ)=Z'(τ_0)\ τ + Z(τ_0)$

$X'(τ_0)$, $Y'(τ_0)$,$Z'(τ_0)$ οι πρώτες παράγωγοι στο σημείο $τ_0$

Επίσης η ευθεία:

$X(τ)=X'(τ_0)\ τ$

$Y(τ)=Y'(τ_0)\ τ$

$Z(τ)=Z'(τ_0)\ τ$

είναι παράλληλη καί διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μήκος καμπυλόγραμμου τμήματος στον τρισδιάστατο χώρο

Εστω η παραμετρική $(X(t), Y(t), Z(t))$

$$(ds)^2 = (dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2 \Leftrightarrow (ds)^2 = (dX/dt)^2(dt)^2 + (dY/dt)^2(dt)^2 + (dZ/dt)^2(dt)^2 \Leftrightarrow$$

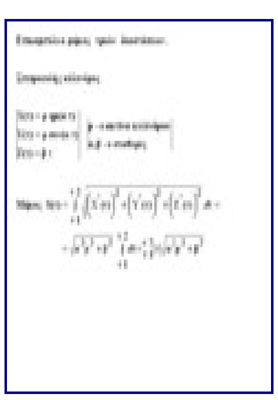
$$\Leftrightarrow (ds)^2 = ((X'(t))^2 + (Y'(t))^2 + (Z'(t))^2)(dt)^2 \Leftrightarrow\ ds = \sqrt{((X'(t))^2 + (Y'(t))^2 + (Z'(t))^2)}\ d(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S(t) = \int \sqrt{((X'(t))^2 + (Y'(t))^2 + (Z'(t))^2)}\ d(t)$$

$(X'(t)),\ (Y'(t),\ (Z'(t))$ οι πρώτες παράγωγοι ως προς t

$S(t)$ η συνάρτηση του επικαμπύλιου μήκους

Παράδειγμα επιλύσιμου μήκους

- 
- Σπειροειδής κύλινδρος

2) Παραμετρικές δύο μεταβλητών

Ορίζουμε το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με άξονες X(θ,ω),Y(θ,ω),Z(θ,ω).

Κάθε σημείο M στο χώρο ορίζεται απο την τριάδα (X(θ,ω),Y(θ,ω),Z(θ,ω)) γιά την ίδια τιμή των μεταβλητών θ,ω .

Ετσι έχουμε το σημείο M (X(θ,ω),Y(θ,ω),Z(θ,ω)).

Οι αριθμοί θ,ω είναι πραγματικοί .

θ=u ,ω=v

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Επίπεδο

$X(u,v)=\alpha_1 u +\beta_1 v +\gamma_1$

$Y(u,v)=\alpha_2 u +\beta_2 v +\gamma_2$

$Z(u,v)=\alpha_3 u +\beta_3 v +\gamma_3$

$\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$=σταθερές

Πρέπει ένα εκ των $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ να είνα διάφορο των υπολοίπων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Διπλός έλικας

X(u,v)=ρ ημ(α v) συν(u)

Y(u,v)=ρ συν(α v) συν(u)

Z(u,v)=β v

η

X(u,v)=ρ ημ(α v) ημ(u)

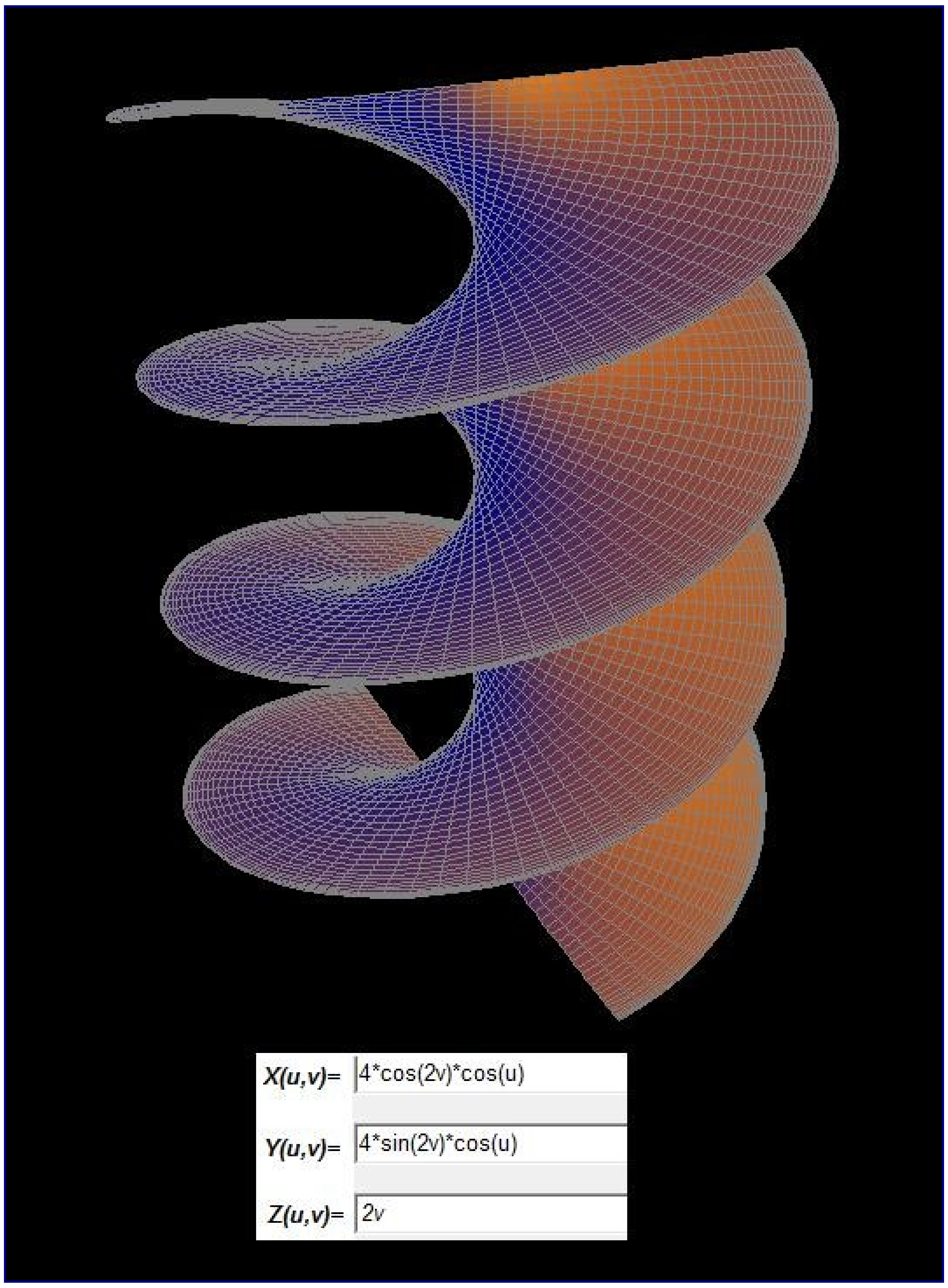
Y(u,v)=ρ συν(α v) ημ(u)

Z(u,v)=β v

α,β σταθερές

ρ η ακτίνα

u,v μεταβλητές



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο-Κύβος

X(u,v)=α (τοξημ(ημ(v))+τοξσυν(συν(v)))

Y(u,v)=β (-τοξημ(ημ(v))+τοξσυν(συν(v))) (τοξημ(ημ(u))+τοξσυν(συν(u)))

Z(u,v)=γ (-τοξημ(ημ(u))+τοξσυν(συν(u)))

0≤u≤2π

0≤v≤2π

α,β,γ σταθερές

ακμή $χ=π^2$

Αν για κάθε u=v το x(u,v)=Y(u,v)=Z(u,v) τότε έχουμε κύβο. (α=γ=kπ/2),(β=k(1/2))

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Κύλινδρος

$$X(u,v) = a\ sin(v)\ (arcsin(sin(u)) + arcsin(cos(u)))$$
$$Y(u,v) = a\ cos(v)\ (arcsin(sin(u)) + arcsin(cos(u)))$$
$$Z(u,v) = b\ (arcsin(sin(u)) + arccos(cos(u)))$$

0≤u≤2π

0≤v≤π

a,b,c σταθερές

Η ακτίνα του κυλίνδρου είναι R=a(π/2)

Το ύψος του κυλίνδρου είναι h=bπ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Κώνος

α)

$$X(u,v) = sin(u)\ arcsin(sin(v))$$
$$Y(u,v) = cos(u)\ arcsin(sin(v))$$
$$Z(u,v) = arccos(cos(v)) - arcsin(sin(v))$$

$0 \leq u \leq 2\pi$

$0 \leq v \leq \pi$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Σφαίρα

$$X(u,v) = R\ cos(u)\ cos(v)$$
$$Y(u,v) = R\ sin(u)\ cos(v)$$
$$Z(u,v) = R\ sin(v)$$

R--Ακτίνα σφαίρας (u,v--πολικές γωνίες)

$(-\pi/2) \leq u \leq (\pi/2)$

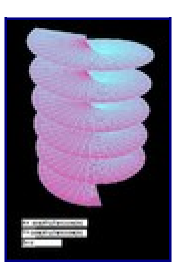
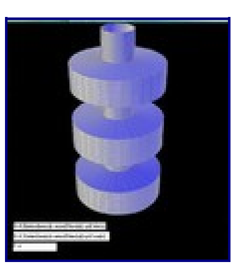
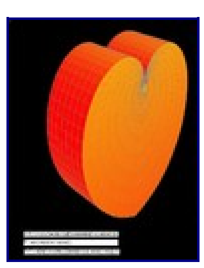
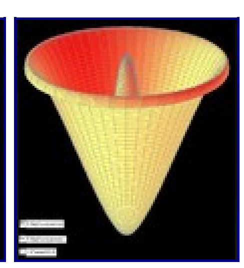
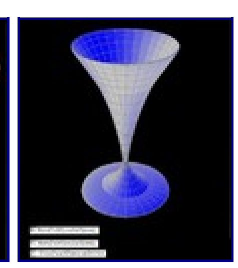
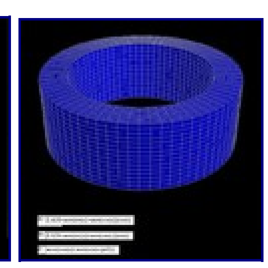
$-\pi \leq v \leq \pi$

Αν Z (u,v)=R cos(v) τότε έχουμε δύο αντίστροφους κώνους.

Αν Z (u,v)=c (σταθερό) τότε έχουμε κυκλικό δίσκο.

Αν Z (u,v)=R tan(v) τότε έχουμε δύο αντίστροφες χοάνες.

Ακολουθούν παραδείγματα γραφημάτων

-      

- Έλικας μονός ,Στρόφαλος,,,,,,,,,,,,, Καρδιά,,,,,,,,,,,,,,,,, Άνθος, ,,,,,,,,,,,,,,,,,ποτήρι ,,,,,,,,,,,,,,δακτύλιος

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ

$\boxed{\text{Π Α Ρ Α Μ Ε Τ Ρ Ι Κ Η   Τ Ρ Ι Ω Ν   Δ Ι Α Σ Τ Α Σ Ε Ω Ν}}$

Εστω η παραμετρική τριάδα :

$(X(\theta,\omega)\ ,\ Y(\theta,\omega)\ ,\ Z(\theta,\omega))$

$\frac{\partial X}{\partial \theta} = X_\theta$ η μερική παράγωγος της $X(\theta,\omega)$ ως προς θ. (ω σταθερό)

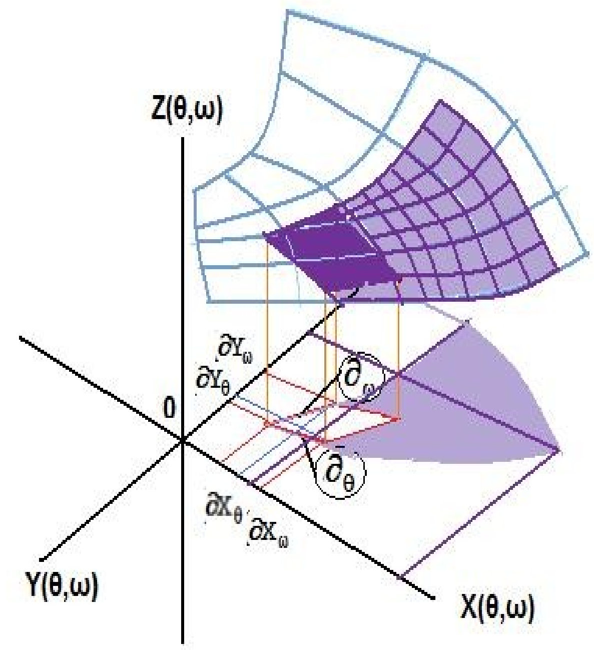
$\frac{\partial Y}{\partial \theta} = Y_\theta$ η μερική παράγωγος της $Y(\theta,\omega)$ ως προς θ. (ω σταθερό)

$\frac{\partial Z}{\partial \theta} = Z_\theta$ η μερική παράγωγος της $Z(\theta,\omega)$ ως προς θ. (ω σταθερό)

$\frac{\partial X}{\partial \omega} = X_\omega$ η μερική παράγωγος της $X(\theta,\omega)$ ως προς ω. (θ σταθερό)

$\frac{\partial Y}{\partial \omega} = X_\omega$ η μερική παράγωγος της $Y(\theta,\omega)$ ως προς ω. (θ σταθερό)

$\frac{\partial Z}{\partial \omega} = X_\omega$ η μερική παράγωγος της $Z(\theta,\omega)$ ως προς ω. (θ σταθερό)



$\partial S_\theta = \sqrt{(\partial X_\theta)^2 + (\partial Y_\theta)^2 + (\partial Z_\theta)^2}$ (Διαφορικό τμήματος με σταθερό ω)

$\partial S_\omega = \sqrt{(\partial X_\omega)^2 + (\partial Y_\omega)^2 + (\partial Z_\omega)^2}$ (Διαφορικό τμήματος με σταθερό θ)

$\vec{\alpha} = (\partial X_\theta, \partial Y_\theta, \partial Z_\theta)$ (Διάνυσμα τμήματος ∂S_θ)

$\vec{\beta} = (\partial X_\omega, \partial Y_\omega, \partial Z_\omega)$ (Διάνυσμα τμήματος ∂S_ω)

$\sigma\upsilon\nu(\varphi) = \frac{\vec{\alpha}.\vec{\beta}}{\|\vec{\alpha}\|.\|\vec{\beta}\|} = \frac{\vec{\alpha}.\vec{\beta}}{\partial S_\theta.\partial S_\omega}$ (Η γωνία των δυο τμημάτων)

$\eta\mu(\varphi) = \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2(\varphi)} = \frac{\sqrt{(\partial S_\theta.\partial S_\omega)^2 - (\vec{\alpha}.\vec{\beta})^2}}{\partial S_\theta.\partial S_\omega}$

Εμβαδό $\partial E = \partial S_\theta.\partial S_\omega.\eta\mu(\varphi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E = \iint \sqrt{(\partial S_\theta.\partial S_\omega)^2 - (\vec{\alpha}.\vec{\beta})^2} =$

$$= \iint \sqrt{(\partial X_\theta.\partial Y_\omega)^2 + (\partial X_\theta.\partial Z_\omega)^2 + (\partial Y_\theta.\partial X_\omega)^2 + (\partial Y_\theta.\partial Z_\omega)^2 + (\partial Z_\theta.\partial X_\omega)^2 + (\partial Z_\theta.\partial Y_\omega)^2 - 2\partial Y_\theta \partial Y_\omega \partial Z_\theta \partial Z_\omega - 2\partial X_\theta \partial X_\omega Y_\theta \partial Y_\omega - 2\partial X_\theta \partial X_\omega \partial Z_\theta \partial Z_\omega} =$$

$$= \iint \sqrt{(X_\theta Y_\omega)^2 + (X_\theta Z_\omega)^2 + (Y_\theta X_\omega)^2 + (Y_\theta Z_\omega)^2 + (Z_\theta X_\omega)^2 + (Z_\theta Y_\omega)^2 - 2X_\theta X_\omega Y_\theta Y_\omega - 2X_\theta X_\omega Z_\theta Z_\omega - 2Y_\theta Y_\omega Z_\theta Z_\omega}.\partial\theta\partial\omega$$

$$\boxed{= \iint \sqrt{(X_\theta.Y_\omega - Y_\theta.X_\omega)^2 + (X_\theta.Z_\omega - Z_\theta.X_\omega)^2 + (Y_\theta.Z_\omega - Y_\omega.Z_\theta)^2}\ .\partial\theta.\partial\omega}$$

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ

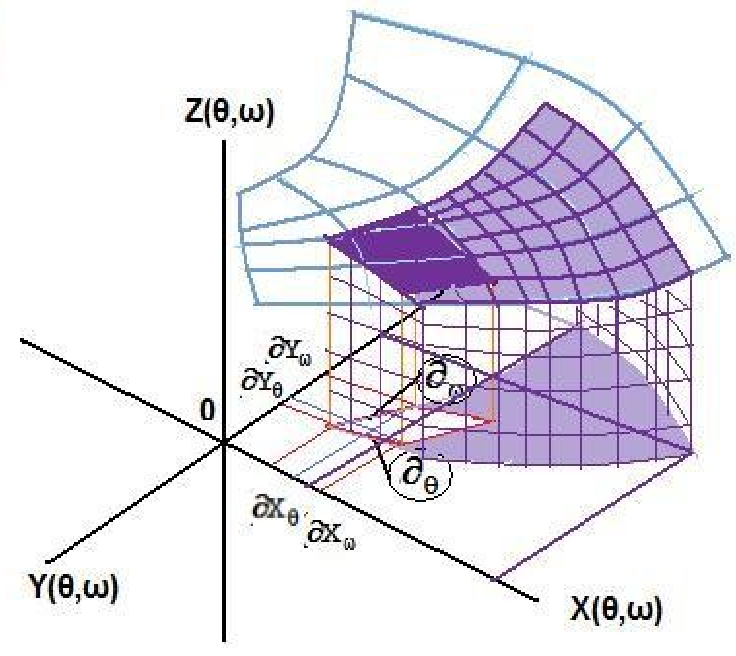
$$\iint Z(\theta,\omega)\,.dX(\theta,\omega)\,.dY(\theta,\omega) \qquad (\text{Όγκος})$$

Εστω η παραμετρική τριάδα : $(X(\theta,\omega), Y(\theta,\omega), Z(\theta,\omega))$

Στο επίπεδο XY έχουμε τα δύο διαφορικά τμήματα :

$$\partial(SX_\theta Y_\theta) = \sqrt{(\partial SX_\theta)^2 + ((\partial SY_\theta)^2} \qquad (\omega \;\; \text{σταθερό})$$

$$\partial(SX_\omega Y_\omega) = \sqrt{(\partial SX_\omega)^2 + ((\partial SY_\omega)^2} \qquad (\theta \;\; \text{σταθερό})$$



Τα διανύσματα των δύο τμημάτων είναι :

$$\left(\partial(S\vec{X_\theta} Y_\theta)\right) = ((\partial SX_\theta), (\partial SY_\theta))$$

$$\left(\partial(S\vec{X_\omega} Y_\omega)\right) = ((\partial SX_\omega), (\partial SY_\omega))$$

Η γωνία των δύο διανυσμάτων είναι :

$$\sigma\upsilon\nu(\varphi) = \frac{\left((\partial(S\vec{X_\theta} Y_\theta))\right).\left((\partial(S\vec{X_\omega} Y_\omega))\right)}{\left\|(\partial(S\vec{X_\theta} Y_\theta))\right\|.\left\|((\partial S\vec{X_\omega} Y_\omega))\right\|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu(\varphi) = \frac{\sqrt{\left(\left\|(\partial(S\vec{X_\theta} Y_\theta))\right\|.\left\|(\partial(S\vec{X_\omega} Y_\omega))\right\|\right)^2 - \left((\partial(S\vec{X_\theta} Y_\theta)).(\partial S\vec{X_\omega} Y_\omega)\right)^2}}{\left\|(\partial(S\vec{X_\theta} Y_\theta))\right\|.\left\|(\partial(S\vec{X_\omega} Y_\omega))\right\|}$$

Στο επίπεδο XY το εμβαδό της βάσης είναι :

$$E_\beta = \left\|\partial(S\vec{X_\theta} Y_\theta)\right\|.\left\|\partial(S\vec{X_\omega} Y_\omega)\right\|.\eta\mu(\varphi) = (\partial(SX_\theta)).(\partial(SY_\omega)) - (\partial(SX_\omega)).(\partial(SY_\theta))$$

Ο όγκος V είναι:

$$V = \iint Z(\theta,\omega)\,.dX(\theta,\omega)\,.dY(\theta,\omega) = \iint E_\beta . Z(\theta,\omega) =$$

$$= \iint \left[(\partial(SX_\theta)).(\partial(SY_\omega)) - (\partial(SX_\omega)).(\partial(SY_\theta))\right].Z(\theta,\omega) =$$

$$= \iint \frac{\left[(\partial(SX_\theta)).(\partial(SY_\omega)) - (\partial(SX_\omega)).(\partial(SY_\theta))\right]}{\partial\theta.\partial\omega}.Z(\theta,\omega).\partial\theta.\partial\omega =$$

$$= \iint (X_\theta Y_\omega - X_\omega Y_\theta).Z(\theta,\omega).\partial\theta.\partial\omega$$

X_θ η μερική παράγωγος της $X(\theta,\omega)$ ως προς θ
X_ω η μερική παράγωγος της $X(\theta,\omega)$ ως προς ω
Y_θ η μερική παράγωγος της $Y(\theta,\omega)$ ως προς θ
Y_ω η μερική παράγωγος της $Y(\theta,\omega)$ ως προς ω

Αυτή είναι η γεωμετρική ερμηνεία της Ιακωβιανής ορίζουσας

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω η παραμετρική τριάδα X(τ),Y(τ),Z(τ)

Περιστροφή στο επίπεδο XY (Γωνία φ1)
X'(τ)=X(τ)συν(φ1)-Y(τ)ημ(φ1)
Y'(τ)=X(τ)ημ(φ1)+Y(τ)συν(φ1)
Z'(τ)=Z(τ)

Περιστροφή στο επίπεδο XZ (Γωνία φ2)
X*(τ)=X'(τ)συν(φ2)-Z'(τ)ημ(φ2)*
Y*(τ)=Y'(τ)*
Z*(τ)=X'(τ)ημ(φ2)+Z'(τ)συν(φ2)*

Άρα:
Αν την περιστρέψουμε κατά γωνία φ1 και γωνία φ2
τότε η νέα τριάδα θα έχει συντεταγμένες:

X*(τ)= [(X(τ)συν(φ1))-(Y(τ)ημ(φ1))]συν(φ2)-Z(τ)ημ(φ2)*
Y*(τ)= X(τ)ημ(φ1)+Y(τ)συν(φ1)*
Z*(τ)= [(X(τ)συν(φ1))-(Y(τ)ημ(φ1))] ημ(φ2)+Z(τ)συν(φ2)*

Το ίδιο ισχύει και γιά την τριάδα X(θ,ω),Y(θ,ω),Z(θ,ω).
Δηλαδή αν θέσουμε όπου X(τ) το X(θ,ω) όπου Y(τ) το Y(θ,ω) καί όπου Z(τ) το Z(θ,ω).

ΣΤΕΡΕΑ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΑ ΑΠΟ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

Έστω η δισδιάστατη παραμετρική [X(τ),Y(τ)].
Στο τρισδιάστατο [X(θ,ω),Y(θ,ω),Z(θ,ω)] τοποθετούμε:θ=τ

X(θ,ω)=X(θ)
Y(θ,ω)=0
Z(θ,ω)=Y(θ)

Αν θέλουμε να περιστρέψουμε τον άξονα Z τότε:
φ1=0
φ2=ω

Αρα η συνάρτηση του στερεού εκ περιστροφής είναι:
X1(θ,ω)=X(θ)συν(ω)
Y1(θ,ω)=-X(θ)ημ(ω)
Z1(θ,ω)=Y(θ)
Με παρόμοιο τρόπο παράγονται συναρτήσεις στερεών
από περιστροφή άλλων αξόνων η υπό γωνία.

ΣΤΕΡΕΑ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΑ ΑΠΟ ΠΡΙΣΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ

Έστω η δισδιάστατη παραμετρική [X(τ),Y(τ)].
Στο τρισδιάστατο [X(θ,ω),Y(θ,ω),Z(θ,ω)] τοποθετούμε:θ=τ

X(θ,ω)=X(θ)
Y(θ,ω)=Y(θ)
Z(θ,ω)=0

Η συνάρτηση του πρισματοποιημένου στερεού είναι:
X1(θ,ω)=X(θ) (τοξσυν(συν(ω))+τοξημ(ημ(ω)))
Y1(θ,ω)=Y(θ) (τοξσυν(συν(ω))+τοξημ(ημ(ω)))
Z1(θ,ω)= τοξσυν(συν(ω))-τοξημ(ημ(ω))

ΣΤΕΡΕΑ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΑ ΑΠΟ ΠΥΡΑΜΙΔΟΠΟΙΗΣΗ

Έστω η δισδιάστατη παραμετρική [X(τ),Y(τ)].
Στο τρισδιάστατο [X(θ,ω),Y(θ,ω),Z(θ,ω)] τοποθετούμε:θ=τ

X(θ,ω)=X(θ)
Y(θ,ω)=Y(θ)
Z(θ,ω)=0

Η συνάρτηση του πυραμιδοποιημένου στερεού είναι:

X1(θ,ω)=X(θ)τοξημ(ημ(ω))
Y1(θ,ω)=Y(θ)τοξημ(ημ(ω))
Z1(θ,ω)=τοξσυν(συν(ω))-τοξημ(ημ(ω))

0<ω<π

3)Παραμετρικές τριών μεταβλητών (Συμπαγή στερεά)

Ορίζουμε το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με άξονες X(u,v,w),Y(u,v,w),Z(u,v,w).
Κάθε σημείο Μ στο χώρο ορίζεται απο την τριάδα (X(u,v,w),Y(u,v,w),Z(u,v,w)) γιά την ίδια τιμή των μεταβλητών u,v,w .
Ετσι έχουμε το σημείο Μ (X(u,v,w),Y(u,v,w),Z(u,v,w)).
Οι αριθμοί u,v,w είναι πραγματικοί .
Οι συναρτήσεις τριών μεταβλητών παράγουν συμπαγή στερεά.