

**Apuntes: Estructuras aeroespaciales.**



# **Apuntes: Estructuras aeroespaciales.**

Alejandro Roger Ull

Ingeniería Aeronáutica

Segunda edición – Septiembre de 2011

### Acerca de estos apuntes

Estos apuntes se han realizado para cubrir el temario de la asignatura “Estructuras aeroespaciales”, que se imparte en el cuarto curso de Ingeniería Aeronáutica en la Escola Tècnica Superior d’Enginyeries Industrial i Aeronàutica de Terrassa, de la Universitat Politècnica de Catalunya (ETSEIAT – UPC).

### Licencia

Esta obra está bajo una licencia Attribution-ShareAlike 3.0 Unported (CC BY-SA 3.0) de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite:

[http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es\\_ES](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es_ES)

En líneas generales:

Es libre de:

- Compartir – Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.
- Transformar la obra y crear obras derivadas.
- Hacer un uso comercial de esta obra.

Bajo las condiciones siguientes:

- **Reconocimiento** — Debe reconocer al autor de la obra original (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoya el uso que hace de su obra).
- **Compartir bajo la Misma Licencia** — Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.



## 0. Contenidos

0. Contenidos .....	5
1. Leyes constitutivas	
1.1. Ecuaciones constitutivas del problema elástico .....	8
1.2. Modelo reológico friccional de plasticidad perfecta.....	8
1.3. Espacio de tensiones .....	9
1.4. Flujo plástico .....	9
1.5. Regla de flujo.....	10
1.6. Carga y descarga. Condiciones de Kuhn – Tucker y de consistencia.....	10
1.7. Resumen hasta este punto.....	11
1.8. Cálculo del multiplicador plástico .....	12
1.9. Ecuación constitutiva para el modelo de plasticidad perfecta .....	12
1.10. Modelo de endurecimiento isótropo.....	13
1.11. Cálculo del multiplicador plástico .....	14
1.12. Modelo de endurecimiento cinemático.....	15
1.13. Cálculo del multiplicador plástico .....	15
1.14. Modelo poliaxial.....	16
2. Plasticidad de vigas	
2.1. Plasticidad en barras .....	17
2.2. Ejemplo – Plasticidad en barras .....	17
2.3. Flexión en el campo elastoplástico .....	20
2.4. Secciones compuestas .....	21
3. Cálculo plástico de estructuras	
3.1. Ideas generales.....	22
3.2. Teoremas fundamentales .....	22
3.3. Método de cálculo.....	22
3.4. Ejemplo isostático – Viga biapoyada con carga puntual.....	23
3.5. Ejemplo isostático – Viga biapoyada con carga distribuida .....	27
3.6. Ejemplo hiperestático – Viga biempotrada con carga puntual.....	28

4. Introducción a la inestabilidad estructural	
4.1. Generalidades acerca de la inestabilidad.....	31
4.2. Conceptos energéticos.....	31
4.3. Grados de libertad.....	32
4.4. Estabilidad .....	32
4.5. Introducción al pandeo .....	33
5. Inestabilidad estructural de columnas	
5.1. Introducción .....	35
5.2. Carga crítica de Euler – Viga biapoyada .....	35
5.3. Carga crítica de Euler – Viga biapoyada – Planteamiento en fuerzas.....	36
5.4. Carga crítica de Euler – Viga biapoyada – Planteamiento energético .....	37
5.5. Carga crítica de Euler – Viga biempotrada – Planteamiento en fuerzas.....	38
5.6. Carga crítica de Euler – Viga en voladizo – Planteamiento en fuerzas .....	40
5.7. Expresión general de la carga crítica de Euler.....	41
5.8. Excentricidad y defectos iniciales.....	41
5.9. Inestabilidad en cargas columna.....	42
5.10. Método energético de Rayleigh – Ritz .....	43
5.11. Método energético – Viga biapoyada .....	43
5.12. Método energético – Viga en voladizo .....	44
6. Cálculo matricial de la estabilidad de estructuras	
6.1. Formulación de la matriz de rigidez .....	47
6.2. Formulación de la matriz de rigidez aproximada.....	49
6.3. Cálculo matricial de estabilidad – Viga biapoyada.....	51
6.4. Cálculo matricial de estabilidad – Viga en voladizo .....	52
6.5. Cálculo matricial de estabilidad – Viga empotrada y apoyada .....	53
6.6. Discretización y ensamblado.....	54
6.7. Transformación de coordenadas locales a globales .....	55
6.8. Esfuerzos normales dependientes del elemento.....	56

7. Estructuras aeroespaciales	
7.1. Introducción a las estructuras aeroespaciales .....	57
7.2. Factor de carga .....	57
7.3. Comportamiento frente a ráfaga .....	58
7.4. Teorema de Castigliano .....	58
7.5. Energía de deformación .....	59
7.6. Método de la carga unitaria .....	61
7.7. Cargas sobre una viga .....	62
7.8. Cargas sobre una placa .....	64
7.9. Centro de cortadura .....	66
7.10. Secciones reforzadas .....	66
7.11. Torsión y giro .....	70
7.12. Equilibrado .....	72
7.13. Secciones multicelulares .....	73
7.14. Secciones variables .....	76
7.15. Tensión diagonal .....	78

## 1. Leyes constitutivas

### 1.1. Ecuaciones constitutivas del problema elástico

Las ecuaciones constitutivas son las ecuaciones que relacionan las tensiones en un cuerpo con sus deformaciones. La más sencilla es la ley de Hooke, para un material lineal. En el caso uniaxial se podía expresar como  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ . Más en general, en caso poliaxial, la ley de Hooke se expresa como

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{I}}$$

Esta ecuación puede escribirse de forma más reducida como

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}_4 : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Donde  $\underline{\underline{C}}_4$  es el tensor de rigidez (de cuarto orden). Otra forma de escribir esta expresión sería

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

En tres dimensiones, puesto que cada uno de los índices  $i$ ,  $j$ ,  $k$  y  $l$  puede tener tres componentes  $x$ ,  $y$  o  $z$ , existen  $3^4 = 81$  componentes del tensor de rigidez. Sin embargo, de la simetría de las componentes de tensión y deformación deben cumplirse las siguientes relaciones entre componentes:

- $C_{ijkl} = C_{jikl}$  debido a la simetría del tensor tensión.
- $C_{ijkl} = C_{ijlk}$  debido a la simetría del tensor deformación.
- $C_{ijkl} = C_{klij}$  debido a que la energía elástica viene dada por una forma cuadrática.

Esto deja al tensor de rigidez con 21 componentes independientes. Estas componentes se pueden calcular como

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Donde  $\lambda$  y  $\mu$  son respectivamente el primer y el segundo coeficiente de Lamé.

La ley de Hooke sólo es válida en el tramo de comportamiento lineal de un material. A partir del límite elástico se producen deformaciones permanentes que no están gobernadas por esta ley. Éstas serán objeto de estudio durante este curso, en el que se trabajara principalmente el caso uniaxial y se hará una pequeña introducción al poliaxial.

### 1.2. Modelo reológico friccional de plasticidad perfecta

Supóngase un material para el que una vez superado el límite de fluencia  $\sigma_y$  ya no aumenta la tensión con la deformación. Este modelo se llama de plasticidad perfecta y su curva  $\sigma \leftrightarrow \varepsilon$  es la representada en la figura 1.1, a la izquierda. A la derecha se representa un posible mecanismo con esta característica.



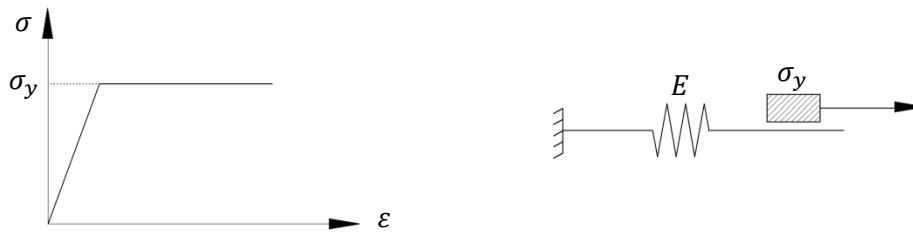


Figura 1.1. Modelo de plasticidad perfecta.

El elemento friccional está fijo hasta que se aplica  $\sigma_y$  y representa la deformación plástica. Las hipótesis del modelo son las siguientes:

- La deformación total se supone como la suma de las deformaciones elásticas y las plásticas  $\varepsilon_T = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ . Esto es cierto para pequeñas deformaciones elásticas.
- Las tensiones se conocen a partir de las deformaciones elásticas a través de la ley de Hooke  $\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon_T - \varepsilon^p)$ .
- El espacio de tensiones admisibles es  $|\sigma| \leq \sigma_y$ , es decir,  $\sigma \in [-\sigma_y, \sigma_y]$ .

### 1.3. Espacio de tensiones

Se define el espacio de tensiones como un conjunto

$$\mathbb{E} := \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0\}$$

Donde  $f$  es la superficie de fluencia. El interior de este conjunto se puede definir como

$$\text{in } \mathbb{E} := \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y < 0\}$$

Es decir  $\sigma \in (-\sigma_y, \sigma_y)$ . El interior de  $\mathbb{E}$  representa la zona elástica de trabajo, donde el elemento friccional no trabaja. En esta zona se ha definido la tensión como  $\sigma = E(\varepsilon_T - \varepsilon^p)$ . Si se deriva respecto al tiempo esta expresión se obtiene  $\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}_T$  (puesto que  $\varepsilon^p = 0$ , se trabajará mucho con las derivadas temporales). Por lo que en la zona elástica la velocidad de las tensiones es proporcional a la de las deformaciones, pero esto no tiene por qué ser así en la zona plástica.

La frontera del espacio de tensiones se define como

$$\partial\mathbb{E} := \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y = 0\}$$

Obsérvese que el caso  $f(\sigma) > 0$  es inadmisibles y que  $\mathbb{E} = \text{in } \mathbb{E} \cup \partial\mathbb{E}$  y  $\text{in } \mathbb{E} \cap \partial\mathbb{E} = \emptyset$ .

### 1.4. Flujo plástico

Supóngase que se tiene una situación en que  $f(\sigma) < 0$ . Entonces ya se sabe que  $\dot{\varepsilon}^p = 0$ . Sin embargo en otro caso en que  $f(\sigma) = 0$ . Entonces se tiene que

$$f(\sigma) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} & \sigma = \sigma_y > 0 \\ \dot{\varepsilon}^p = -\dot{\lambda} & \sigma = -\sigma_y < 0 \end{cases}$$

Donde  $\lambda$  es una variable irreversible llamada multiplicador plástico. Esta variable se define para evitar que tras un caso dos cargas consecutivas de igual valor y signo diferente, como el de la figura 1.2, el material se quede como estaba inicialmente, como si no se hubiese cargado.

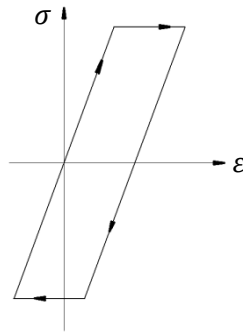


Figura 1.2

### 1.5. Regla de flujo

La regla de flujo dice que

$$\dot{\varepsilon}^p = \text{sign}(\sigma) \cdot \dot{\lambda} \Rightarrow f(\sigma) = 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0$$

Donde la función  $\text{sign}(\sigma)$  es el signo de  $\sigma$ . Esta expresión, recordando que  $f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y$ , también puede escribirse como

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \cdot \frac{df(\sigma)}{d\sigma}$$

Puesto que la derivada de un valor absoluto es el signo del argumento.

### 1.6. Carga y descarga. Condiciones de Kuhn – Tucker y de consistencia

Las tres condiciones que se han de cumplir para que se cumpla la regla de flujo son

- $\dot{\lambda} \geq 0$
- $f(\sigma) \leq 0$
- $\dot{\lambda} \cdot f(\sigma) = 0$

Supóngase una evolución reversible (elástica). Entonces

$$\sigma \in \text{in } \mathbb{E} \Rightarrow f(\sigma) < 0 \Rightarrow \dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}^p = 0$$

En una evolución irreversible (plástica)

$$\dot{\varepsilon}^p \neq 0 \Rightarrow \dot{\lambda} > 0 \Rightarrow f(\sigma) = 0 \Rightarrow \sigma \in \partial \mathbb{E}$$

Sin embargo, si se considera que  $f(\sigma) = 0$  el estado de carga corresponde al punto señalado en la figura 1.3, y a partir de aquí existen las opciones de descargar (recorrido (1)) o seguir cargando (recorrido (2)). Para tomar esto en consideración se utiliza la llamada condición de consistencia  $\dot{\lambda} \cdot \dot{f}(\sigma) = 0$ .

Si se quiere seguir el recorrido (1) desde ese punto entonces  $f(\sigma) = 0$ , y como se quiere reducir la tensión  $\dot{f} < 0$ . A partir de aquí, de la condición de consistencia se obtiene  $\dot{\lambda} = 0$  y de la regla de flujo finalmente se sabe que la deformación plástica se mantiene ( $\dot{\varepsilon}^p = 0$ ).

Si se quiere seguir el recorrido (2) desde ese punto entonces  $f(\sigma) = 0$ , pero en esta ocasión no se intenta modificar el valor de la tensión, por lo tanto  $\dot{f} = 0$ . Ahora utilizando la condición de consistencia  $\dot{\lambda}$  no queda determinado. Puede suceder que  $\dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}^p = 0$  (que quiere decir que se ha detenido la carga en ese punto y no se deforma más el cuerpo, figura 1.4), pero también puede ser que  $\dot{\lambda} > 0$  y por tanto  $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$  (es decir, se sigue deformando el cuerpo).

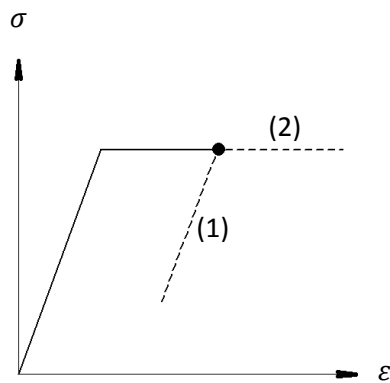


Figura 1.3.

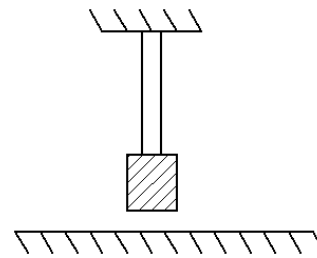


Figura 1.4. Cuando el bloque alcance el suelo la barra dejará de deformarse, pero seguirá cargada con  $\sigma_y$ .

### 1.7. Resumen hasta este punto

En resumen, hasta este punto las leyes constitutivas del modelo de plasticidad perfecta son

- 1) Descomposición aditiva  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$
- 2) Ecuación constitutiva  $\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon_T + \varepsilon^p)$
- 3) Espacio de tensiones
  - a) Espacio de tensiones  $\mathbb{E} := \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0\}$
  - b) Zona elástica  $\text{in } \mathbb{E} := \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y < 0\}$
  - c) Zona plástica  $\partial\mathbb{E} := \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y = 0\}$
- 4) Regla de flujo

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

- 5) Kuhn – Tucker

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad f(\sigma) \leq 0 \quad \dot{\lambda} \cdot f(\sigma) = 0$$

- 6) Condición de consistencia

$$\dot{\lambda} \cdot \dot{f}(\sigma) = 0$$

Las situaciones posibles en las que se encontrará la estructura serán

- 1)  $\sigma \in \text{in } \mathbb{E} \quad (f(\sigma) < 0) \quad \dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}^p = 0$  (carga elástica)
- 2)  $\sigma \in \partial \mathbb{E} \quad (f(\sigma) = 0)$ 
  - 2.1)  $\dot{f} < 0 \Rightarrow \dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}^p = 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon}$  (descarga)
  - 2.2)  $\dot{f} = 0$ 
    - 2.2.1)  $\dot{\lambda} > 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}^p \neq 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon}_T - \dot{\varepsilon}^p)$  (carga plástica)
    - 2.2.2)  $\dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}^p = 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon}_T$  (carga neutra)

### 1.8. Cálculo del multiplicador plástico

Para determinar  $\dot{\lambda}$  se imponen dos condiciones, puesto que de no cumplirse entonces el multiplicador ya estará determinado y será  $\dot{\lambda} = 0$ . Por lo tanto

$$f(\sigma) = 0 \quad \dot{f}(\sigma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda} \neq 0$$

Considérese entonces  $\dot{f}$  aplicando la regla de la cadena, y recordando el valor de  $df/d\sigma$  se obtiene

$$\dot{f}(\sigma) = 0 \Rightarrow \frac{df}{d\sigma} \dot{\sigma} \Rightarrow \text{sign } \sigma \cdot \dot{\sigma} = 0$$

La tensión se tomaba como

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \Rightarrow \dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p)$$

Entonces

$$\text{sign } \sigma \cdot E \dot{\varepsilon} - \text{sign } \sigma \cdot E \dot{\varepsilon}^p = 0$$

Y la deformación plástica es

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \text{sign } \sigma$$

Sustituyendo y considerando que  $\text{sign}^2 \sigma = 1$

$$\text{sign } \sigma \cdot E \dot{\varepsilon} - E \dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \dot{\lambda} = E^{-1} \cdot \text{sign } \sigma \cdot E \cdot \dot{\varepsilon}$$

Para poderlo extender a un caso poliaxial donde aparecen tensores de cuarto orden no se simplifican los módulos de Young, aunque para el caso uniaxial  $\dot{\lambda} = \text{sign } \sigma \cdot \dot{\varepsilon}$ .

### 1.9. Ecuación constitutiva para el modelo de plasticidad perfecta

Según si el cuerpo está plastificando o no, las ecuaciones que determinan la evolución de la tensión en el cuerpo son diferentes. Considérese conocida una deformación total  $\dot{\varepsilon}$ . Entonces se puede suponer una tensión de tanteo (tensión *trial*, del inglés) de valor  $\dot{\sigma}^{TR} = E \dot{\varepsilon}$ . La tensión de tanteo es la tensión que tendría el cuerpo si se estuviese deformando de forma elástica, incluso más allá de la superficie de fluencia.

Para calcular  $\dot{\sigma}$  (que es real y por lo tanto  $\sigma \in \mathbb{E}$ ) a partir de la tensión de tanteo se tendrá

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - E\dot{\varepsilon}^P = \dot{\sigma}^{TR} - E\dot{\varepsilon}^P$$

Mientras no haya deformación plástica entonces efectivamente la tensión de tanteo coincidirá con la tensión real  $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^{TR}$ . En caso contrario se puede calcular la tensión real como

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^{TR} - E\dot{\lambda} \text{sign } \sigma$$

Efectivamente, si hay deformación plástica la tensión no puede variar, es decir  $\dot{\sigma} = 0$ . Por lo tanto, de forma general puede escribirse

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^{TR} - E\dot{\lambda} \text{sign } \sigma \quad \dot{\lambda} = \begin{cases} 0 & \dot{\varepsilon}^P = 0 \\ E^{-1} \text{sign } \sigma E\dot{\varepsilon} & \dot{\varepsilon}^P \neq 0 \end{cases}$$

### 1.10. Modelo de endurecimiento isótropo

El modelo de endurecimiento isótropo es un modelo bilineal como el mostrado en la figura 1.5 que considera otra zona lineal adicional.

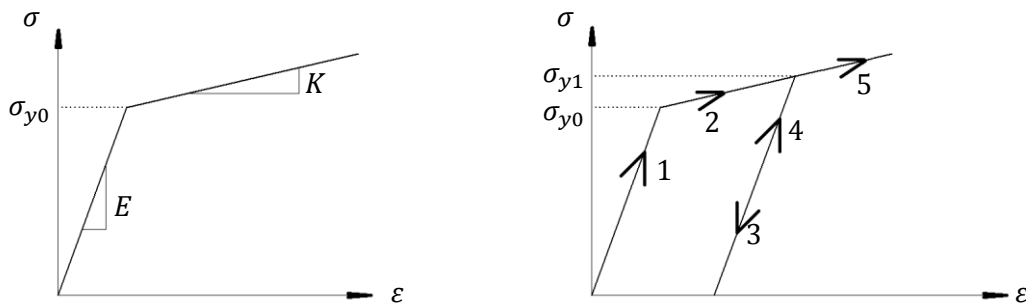


Figura 1.5. Modelo de plasticidad bilineal. Carga y descarga.

El modelo friccional se define de forma muy similar al anterior, pero ahora el elemento friccional es de valor variable

$$\sigma_y = \sigma_{y0} - q$$

Donde  $q$  es una variable de endurecimiento irreversible. Al deformar el material plásticamente, éste se endurece. Si después de descargar se volviese a cargar como se indica en la figura 1.5 a la derecha, el valor de la tensión de fluencia  $\sigma_y$  se habrá visto modificado por este endurecimiento, modelado mediante esta variable.

Las ecuaciones constitutivas para este modelo son

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad q = -K\xi$$

El espacio de estados quedará

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &:= \{\sigma, q \in \mathbb{R} \mid f(\sigma, q) = |\sigma| - (\sigma_{y0} - q) \leq 0\} \\ \text{in } \mathbb{E} &:= \{\sigma, q \in \mathbb{R} \mid f(\sigma, q) = |\sigma| - (\sigma_{y0} - q) < 0\} \\ \partial\mathbb{E} &:= \{\sigma, q \in \mathbb{R} \mid f(\sigma, q) = |\sigma| - (\sigma_{y0} - q) = 0\} \end{aligned}$$

Y a la regla de flujo ahora es

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\dot{\lambda} \partial f}{\partial \sigma} \quad \dot{\xi} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial q}$$

Las condiciones de Kuhn – Tucker son equivalentes, pero ahora  $f = f(\sigma, q)$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad f(\sigma, q) \leq 0 \quad \dot{\lambda} \cdot f(\sigma, q) = 0$$

### 1.11. Cálculo del multiplicador plástico

Igual que en el caso de plasticidad perfecta, de nuevo se toman las condiciones  $f(\sigma, q) = 0$  y  $\dot{f}(\sigma, q) = 0$  para determinar el multiplicador plástico. Aplicando la regla de la cadena a la segunda condición

$$\dot{f}(\sigma, q) = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} = 0$$

A partir de las ecuaciones constitutivas y las reglas de flujo

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \quad ; \quad \dot{q} = -K\dot{\xi} \quad ; \quad \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad ; \quad \dot{\xi} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial q}$$

Se puede desarrollar la expresión anterior

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma} E \dot{\varepsilon} - \frac{\partial f}{\partial \sigma} E \dot{\varepsilon}^p - \frac{\partial f}{\partial q} K \dot{\xi} &= 0 \\ \text{sign } \sigma E \dot{\varepsilon} - \frac{\partial f}{\partial \sigma} E \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial q} K \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial q} &= 0 \end{aligned}$$

Y despejando  $\dot{\lambda}$  se obtiene

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} E \dot{\varepsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} E \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} K \frac{\partial f}{\partial q}}$$

Se supone que el denominador será siempre positivo. Lo contrario sería considerar que se produce ablandamiento con la deformación plástica, en lugar de endurecimiento. Sustituyendo los valores para las derivadas parciales de  $f(\sigma, q)$ , que son

$$f(\sigma, q) = |\sigma| - (\sigma_{y0} - q) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \text{sign } \sigma \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial q} = 1$$

Entonces el multiplicador plástico  $\dot{\lambda}$  queda finalmente

$$\dot{\lambda} = \frac{\text{sign } \sigma \cdot E}{E + K} \dot{\varepsilon}$$

### 1.12. Modelo de endurecimiento cinemático

El modelo cinemático trata de tener en cuenta el efecto Bauschinger esquematizado en la figura 1.6, que reduce el límite elástico a compresión. Esto supone un desplazamiento del dominio elástico, mientras que el isótropo suponía un aumento del dominio elástico.

Se añade entonces otra ecuación constitutiva y en conjunto quedan

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad ; \quad q = -k\xi \quad ; \quad \bar{q} = -H\bar{\xi}$$

Las reglas de flujo quedan

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad ; \quad \dot{\xi} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial q} \quad ; \quad \dot{\bar{\xi}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \bar{q}}$$

Y el espacio de tensiones será

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &:= \{ \sigma, q, \bar{q} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(\sigma, q, \bar{q}) = |\sigma - \bar{q}| - (\sigma_{y0} - q) \leq 0 \} \\ \text{in } \mathbb{E} &:= \{ \sigma, q, \bar{q} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(\sigma, q, \bar{q}) = |\sigma - \bar{q}| - (\sigma_{y0} - q) < 0 \} \\ \partial \mathbb{E} &:= \{ \sigma, q, \bar{q} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(\sigma, q, \bar{q}) = |\sigma - \bar{q}| - (\sigma_{y0} - q) = 0 \} \end{aligned}$$

Las condiciones de Kuhn – Tucker son equivalentes, pero ahora  $f = f(\sigma, q, \bar{q})$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad f(\sigma, q, \bar{q}) \leq 0 \quad \dot{\lambda} \cdot f(\sigma, q, \bar{q}) = 0$$

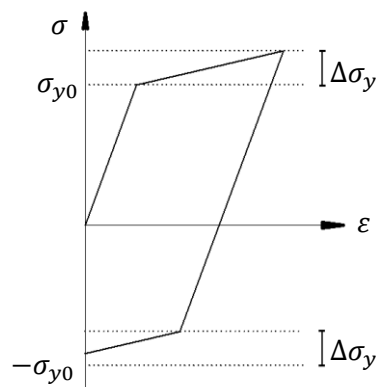


Figura 1.6. Modelo de endurecimiento cinemático.

Tras deformar plásticamente se ha reducido la tensión de fluencia a compresión.

### 1.13. Cálculo del multiplicador plástico

Se procede igual que en el caso anterior, obteniendo finalmente

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} E \dot{\varepsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} E \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} K \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} H \frac{\partial f}{\partial \bar{q}}} \quad \dot{\lambda} = \frac{\text{sign } \sigma \cdot E}{E + K + H} \dot{\varepsilon}$$

De nuevo se considera que el denominador es positivo.

### 1.14. Modelo poliaxial

El modelo poliaxial es una extensión de todo lo anterior. Las ecuaciones son de carácter similar, pero ahora están expresadas en forma tensorial. Se expone aquí a modo de resumen, pero no se desarrollará.

- 1) Descomposición aditiva

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p$$

- 2) Ecuaciones constitutivas

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}}_4 : \underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\mathbb{C}}}_4 (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p) ; \quad q = -K\xi ; \quad \underline{\underline{\bar{q}}} = -\underline{\underline{H}}_4 \underline{\underline{\xi}} = -H \underline{\underline{\xi}}$$

- 3) Espacio de tensiones

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &:= \{ \underline{\underline{\sigma}}, q, \underline{\underline{\bar{q}}} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mid f(\underline{\underline{\sigma}}, q, \underline{\underline{\bar{q}}}) = \sigma_{eq} - (\sigma_{y0} - q) \leq 0 \} \\ \text{in } \mathbb{E} &:= \{ \underline{\underline{\sigma}}, q, \underline{\underline{\bar{q}}} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mid f(\underline{\underline{\sigma}}, q, \underline{\underline{\bar{q}}}) = \sigma_{eq} - (\sigma_{y0} - q) < 0 \} \\ \partial \mathbb{E} &:= \{ \underline{\underline{\sigma}}, q, \underline{\underline{\bar{q}}} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mid f(\underline{\underline{\sigma}}, q, \underline{\underline{\bar{q}}}) = \sigma_{eq} - (\sigma_{y0} - q) = 0 \} \end{aligned}$$

- 4) Regla de flujo

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} ; \quad \dot{\xi} = \lambda \frac{\partial f}{\partial q} ; \quad \underline{\underline{\dot{\bar{q}}}} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\bar{q}}}}$$

- 5) Kuhn – Tucker

$$\lambda \geq 0 \quad f(\underline{\underline{\sigma}}, q, \underline{\underline{\bar{q}}}) \leq 0 \quad \lambda \cdot f(\underline{\underline{\sigma}}, q, \underline{\underline{\bar{q}}}) = 0$$

- 6) Condición de consistencia

$$\lambda \cdot \dot{f}(\underline{\underline{\sigma}}, q, \underline{\underline{\bar{q}}}) = 0$$

- 7) Multiplicador plástico

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbb{C}}}_4 : \underline{\underline{\varepsilon}}^e}{\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\mathbb{C}}}_4 : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial f}{\partial q} K \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\bar{q}}}} H \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\bar{q}}}}}$$



## 2. Plasticidad de vigas

### 2.1. Plasticidad en barras

El margen de seguridad MS es un índice que indica cómo está trabajando la estructura.

$$MS = \frac{P_u}{\gamma \cdot P_l} - 1$$

Donde  $P_u$  es la última carga admisible,  $P_l$  es la máxima carga que se espera que se aplique sobre la estructura, y  $\gamma$  es el factor de seguridad. Para que la estructura trabaje adecuadamente el margen de seguridad deberá ser mayor que 0, pero si es muy grande la estructura estará sobredimensionada.

En la asignatura “Teoría de estructuras” la carga permisible estaba determinada por el límite elástico, y a partir de este punto se consideraba que la estructura fallaba. Sin embargo este es un criterio muy conservador, pues la estructura habrá entrado en plasticidad pero no tiene por qué romperse. Considerando un modelo de plasticidad perfecta, se puede suponer que la zona de la estructura que ha entrado en plasticidad no se continuará cargando más allá de  $\sigma_y$ , pero el resto de componentes que aún no hayan alcanzado este punto sí pueden seguir siendo cargados.

Cada vez que en algún punto se llega a la plasticidad, se reduce el grado de hiperestaticidad del sistema en uno, de forma que la estructura colapsa en el momento que se convierte en un mecanismo (grado de hiperestaticidad negativo). De este modo, una mayor parte de la estructura estará trabajando a la tensión límite.

### 2.2. Ejemplo – Plasticidad en barras

Es posible que el lector recuerde, de “Teoría de estructuras”, la estructura hiperestática esquematizada en la figura 2.1 a la izquierda.

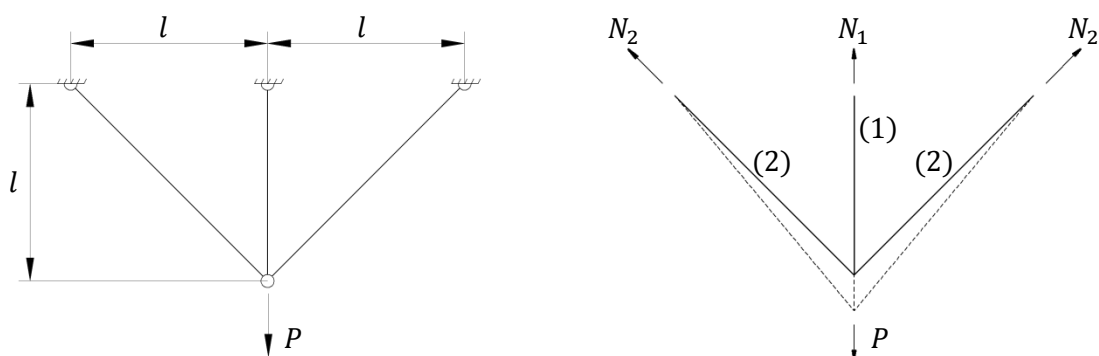
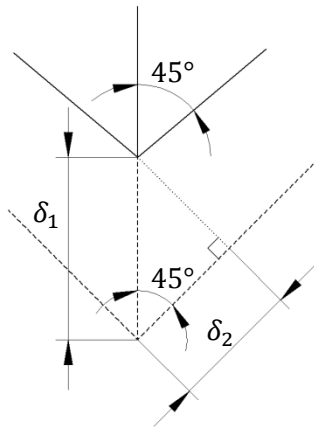


Figura 2.1. Esquema de la estructura del problema.

Al cargarla con la fuerza  $P$ , la estructura se deformará como indica la figura 2.1 a la derecha. La única ecuación de equilibrio que se puede obtener es

$$2 \cdot N_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + N_1 = P$$

Cabe recordar que una barra biarticulada no puede soportar momentos. Al haber dos incógnitas hará falta una ecuación adicional. Ésta se obtiene de la compatibilidad de desplazamientos en la deformada. La figura 2.2 muestra una ampliación de la deformada. La hipótesis de pequeñas deformaciones permite suponer que los ángulos son invariables. De esta figura puede deducirse que



$$\delta_1 = \delta_2 \sqrt{2}$$

Para relacionar desplazamientos y fuerzas se utilizan las ecuaciones constitutivas

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 \Rightarrow \frac{N_1}{A} = E \frac{\delta_1}{l} \quad \sigma_2 = E \varepsilon_2 \Rightarrow \frac{N_2}{A} = E \frac{\delta_2}{l\sqrt{2}}$$

Se tiene entonces un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $\delta_1$  y  $\delta_2$ . Resolviendo se obtiene

$$N_1 = \frac{2P}{2 + \sqrt{2}} \quad N_2 = \frac{P}{2 + \sqrt{2}}$$

Figura 2.2. Ampliación de la deformada

En "Teoría de estructuras" se calculaba la carga máxima que podrá soportar dada por el límite elástico  $\sigma_y$  y se producirá en la barra (1) ( $\sigma_1 > \sigma_2$ )

$$P_{max}^{EL} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} A \cdot \sigma_y$$

Mientras no se supera esta carga las barras trabajan en la zona elástica. Una vez se alcanza, la barra (1) comienza a plastificar, y las tensiones en las barras se encuentran en los puntos indicados en la figura 2.3.

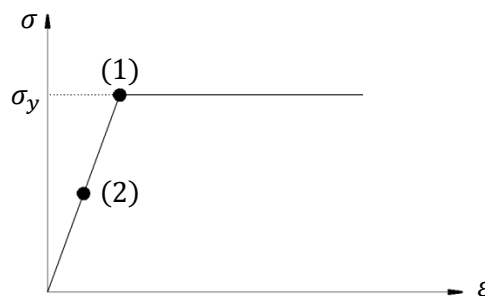


Figura 2.3. Estado de carga de las barras.

Al considerar el modelo de plasticidad perfecta, si se aumenta la carga, la barra (1) se seguirá deformando, pero su tensión no seguirá aumentando. Las barras (2) aún trabajan en la zona elástica. Entonces se aplicará el principio de superposición que se muestra en la figura 2.4. La parte izquierda representa el estado de carga hasta la plastificación de la barra (1), y la derecha la carga aplicada adicional después de este momento.

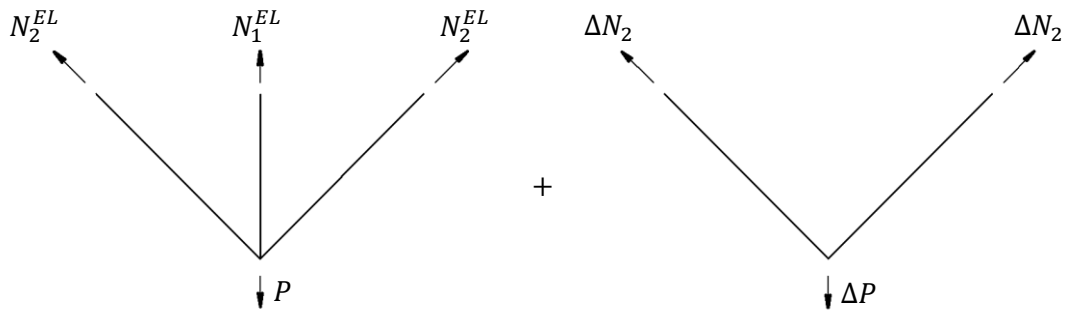


Figura 2.4. Principio de superposición.

Las soluciones del primer sistema son las que ya se han calculado

$$N_1^{EL} = \frac{2P_{max}^{EL}}{2 + \sqrt{2}} \quad N_2^{EL} = \frac{P_{max}^{EL}}{2 + \sqrt{2}}$$

El segundo sistema tiene como solución

$$\Delta N_2 = \frac{\Delta P}{\sqrt{2}}$$

Sumando ambas soluciones, la carga en las barras será

$$N_1 = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} P_{max}^{EL} \quad N_2 = \frac{\Delta P}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} P_{max}^{EL}$$

La carga en la barra (1) no aumentará, pero sí lo hará la carga en las barras (2). Cuando estas dos barras también plastifiquen ( $\sigma_2 = \sigma_y$ ) se habrá llegado a la máxima carga plástica de la estructura completa, y será

$$P_{max}^{PL} = \sqrt{2} \cdot A\sigma_y + \frac{2}{2 + \sqrt{2}} P_{max}^{EL} = (1 + \sqrt{2})A\sigma_y$$

La diferencia en el margen de seguridad será de un 41%, aunque al estar más cerca del colapso posiblemente se deba usar un factor de seguridad mayor. Las tensiones en las barras se encuentran en los puntos indicados en la figura 2.5.

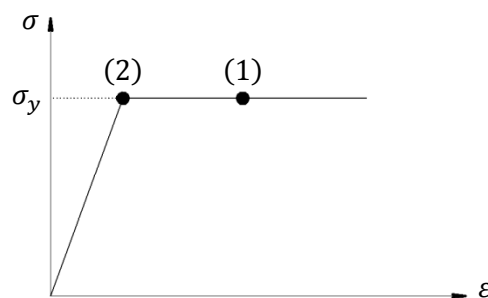


Figura 2.5. Estado de carga de las barras.

Durante la deformación plástica de la barra (1), la ecuación de compatibilidad de deformaciones continúa siendo la misma, pero ahora  $\delta_1$  ya no es la deformación elástica

$$\delta_1 = \delta_1^E + \delta_1^P \neq \frac{l\sigma_y}{E}$$

Sin embargo sí que se cumple que  $\delta_2 = \sqrt{2}l\sigma_y/E$ . Si una vez se ha llegado a  $P_{max}^{PL}$  se descargase la estructura, las barras (2) deberían llegar a la situación inicial, pero no pasa así con la barra (1), lo que provoca unas tensiones residuales, de compresión en la barra (1) y de tracción en las barras(2).

Como la estructura era originalmente hiperestática con grado de hiperestaticidad 1, al plastificar la barra (1) se convierte en una estructura isostática. Cuando plastifican las barras (2) la estructura ya se convierte en un mecanismo y colapsa.

### 2.3. Flexión en el campo elastoplástico

El equivalente en flexión de una barra que alcanza la plasticidad es el concepto de rótula plástica. Se sigue considerando el modelo de plasticidad perfecta (es decir, se desprecia el aumento de rigidez de la zona plástica). De forma habitual se despreciarán las tensiones tangenciales  $\tau$ . Si se carga gradualmente la viga de la figura 2.6, de sección rectangular, llega un momento que se alcanza el límite elástico en los extremos superior e inferior de la viga. Si se sigue cargando el sistema entonces algunas fibras empezarán a deformarse plásticamente, y la distribución de tensiones evolucionará como indica la figura 2.7.

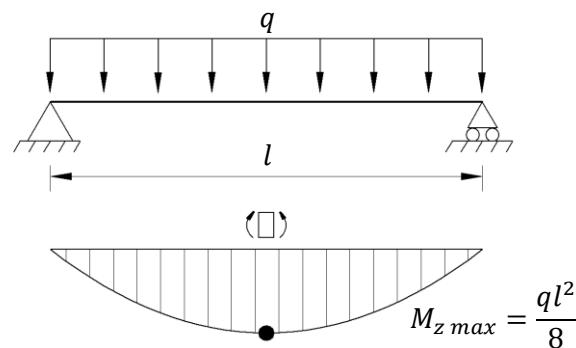


Figura 2.6. Esquema de la estructura del problema.

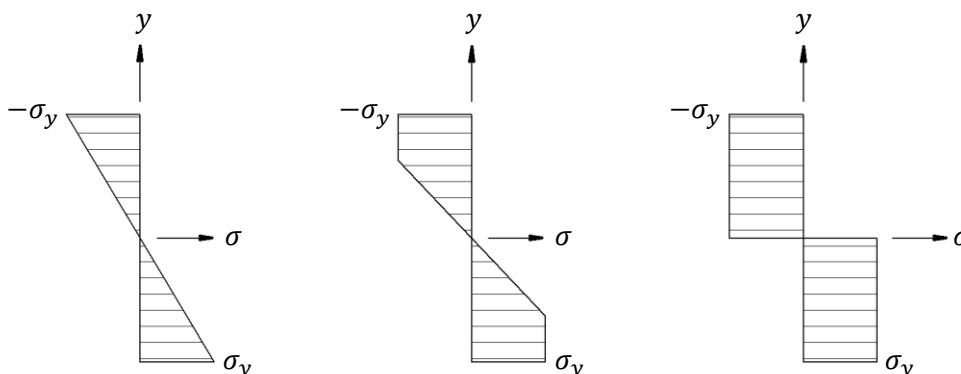


Figura 2.7. De izquierda a derecha, la fibra superior y la inferior alcanzan el límite elástico, al seguir cargando la viga plastifican el resto de fibras, finalmente la sección entera plastifica.

El momento que soporta la sección al plastificar las fibras de los extremos es  $M_E$ , y cuando plastifica completamente es  $M_p$ . Estos momentos pueden calcularse mediante integración de la distribución de tensiones.

$$M = \int \sigma(y) \cdot y \cdot b(y) dy \quad \Rightarrow \quad M_p = \sigma_y \int y \cdot b(y) dy$$

A partir del momento en que la sección plastifica, ésta ya no puede soportar ningún momento adicional, y se convierte en una rótula con un momento  $M_p$  aplicado en los extremos. Esto no es así realmente, pero es una buena aproximación. Este efecto reduce en uno el grado de hiperestaticidad, y se produce el colapso cuando la estructura se convierte en un mecanismo.

#### 2.4. Secciones compuestas

La figura 2.8 muestra un ejemplo clásico en que una viga de un material 1 ha sido reforzada con un material 2 de propiedades superiores. Para trabajar con secciones compuestas se obtendrán unas propiedades que corresponderían con las de una sección equivalente que estuviese formada por un único material.

Para ello se empieza definiendo el módulo elástico de la sección equivalente  $E^*$ , por lo general se elige  $E^* = E_1$ .

Después se puede encontrar el área equivalente de cada componente de la sección, y el área equivalente total como

$$A_i^* = \frac{E_i}{E^*} A_i \quad A^* = \sum_{i=1}^n A_i^*$$

Posteriormente se debe encontrar el centro de área de la sección equivalente. Para ello se debe establecer un origen de coordenadas arbitrario  $y = 0$ , encontrar los centros de área  $\bar{y}_i$  de cada elemento  $i$  de la sección respecto a este origen, y posteriormente encontrar el centro de área de la sección equivalente como

$$\bar{y}^* = \frac{1}{A^*} \sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i^*$$

Nótese que si se refuerza una viga de forma simétrica su centro de área no variará. Definiendo el centro de área de esta forma los momentos de inercia equivalentes serán

$$I_i^* = \frac{E_i}{E^*} I_i \quad I^* = \sum_{i=1}^n I_i^*$$

Donde  $I_i$  es el momento de inercia de cada elemento de la sección, pero respecto al centro de área equivalente  $\bar{y}^*$ , y no respecto al centro de área de ese elemento.

El momento plástico de la sección compuesta  $M_p$  se calcula de la misma forma que para una sección simple, pero integrando por tramos, ya que  $\sigma_y$  será diferente para cada elemento.

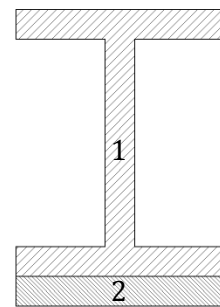


Figura 2.8. Sección compuesta por dos materiales diferentes.

### 3. Cálculo plástico de estructuras

#### 3.1. Ideas generales

Ya se ha visto en el apartado “2.2. Ejemplo – Plasticidad en barras” que el límite plástico de una estructura de barras es mayor que el límite elástico. Esto es mayor cuanto más hiperestática es la estructura.

La plastificación de alguna zona modificará el modo que se distribuye la carga en el resto de la estructura, y reduce en uno el grado de hiperestaticidad de la misma. Cuando la estructura se convierta en un mecanismo entonces colapsará. En general las estructuras no colapsan completamente de una sola vez, sino que lo hacen parcialmente.

La carga límite o permisible será la que convierta la estructura en un mecanismo. Por lo general, se desprecia el efecto del esfuerzo cortante. Si se descarga una estructura que haya llegado a un punto de carga muy próximo al límite aparecerán unos momentos residuales, que se equilibrarían en el interior de la estructura.

#### 3.2. Teoremas fundamentales

Los teoremas fundamentales son dos, el estático y el cinemático. Estos teoremas establecen una cota inferior y una cota superior, respectivamente, a la carga máxima.

El teorema estático dice:

- *Cualquier distribución de momentos flectores compatibles con la condición de equilibrio en la que ninguna sección supera el momento plástico  $M_p$  está originada por una carga igual o inferior a la carga crítica.*

El teorema estático indica que carga crítica es mayor que cualquier carga que no haga plastificar alguna sección de la estructura.

El teorema cinemático dice:

- *La verdadera carga límite es siempre menor que cualquier otra carga límite obtenida al disponer de rotulas plásticas en secciones arbitrarias del sistema.*

El teorema cinemático indica que de todos los posibles mecanismos que hacen que la estructura colapse, el mecanismo real será el que requiera una menor carga.

#### 3.3. Método de cálculo

Si para calcular el mecanismo de colapso, por ejemplo de una estructura de grado de hiperestaticidad 2, se procediese como en el punto “2.2. Ejemplo – Plasticidad en barras” haría falta resolver tres estructuras diferentes, lo que no resulta práctico.

En el método estático se plantean las ecuaciones de equilibrio a un posible mecanismo de colapso. En el cinemático se aplica al posible mecanismo un desplazamiento virtual y se calcula la energía.

Supóngase una estructura sobre la que se aumentan las cargas y van apareciendo rótulas plásticas. Cuando la estructura se convierta en un mecanismo, el movimiento se producirá principalmente en las rótulas, y los desplazamientos en las barras o vigas serán despreciables.

Si a los dos mecanismos propuestos en la figura 3.1 se les examinan sus diagramas de momentos flectores, se comprobará que para el de arriba ninguna sección supera el momento plástico (en las rotulas el momento será el plástico). Sin embargo para el de abajo sí que se supera y por lo tanto el mecanismo no es el correcto, será necesario buscar otro. Esta comprobación es simple, pero de cara al examen es obligatoria.

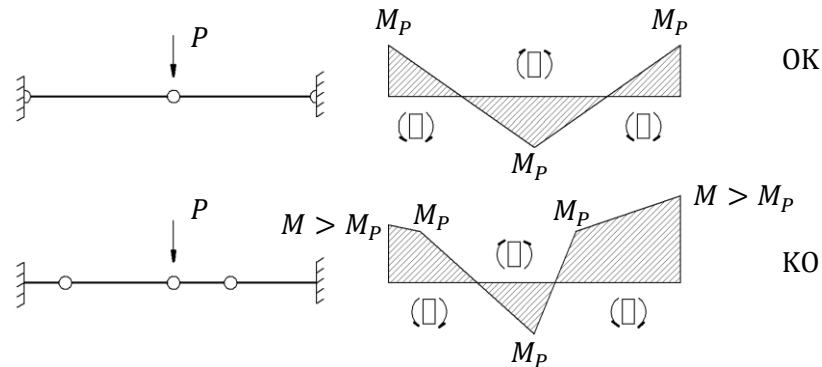


Figura 3.1. Comprobación del mecanismo de colapso.

En un examen, no comprobar el mecanismo de colapso, aunque sea evidente que es el correcto y el resto del problema esté completamente bien, supone suspender dicho problema.

Por lo general, el mecanismo es tal que las rótulas se situarán en los puntos de apoyo o en los puntos de aplicación de las cargas.

### 3.4. Ejemplo isostático – Viga biapoyada con carga puntual

Considérese la viga biapoyada de la figura 3.2 con una carga puntual aplicada.

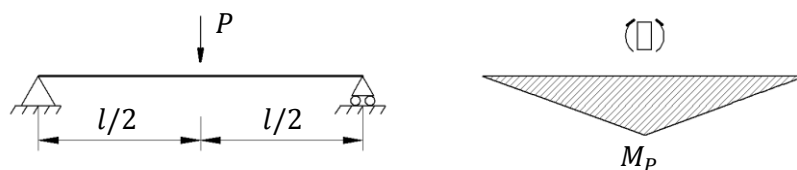


Figura 3.2. Viga biapoyada con una carga puntual y solución analítica.

Calculado por el método tradicional, el momento máximo en la sección central, y la carga máxima vienen dado por

$$M_{max} = \frac{Pl}{4} \quad \Rightarrow \quad P_{max} = \frac{4M_P}{l}$$

En este caso, dado que se trata de una estructura isostática, al cálculo de la carga máxima a partir del momento plástico es inmediato, pero se expondrán, a modo ilustrativo, el método estático y el cinemático.

El método estático está particularmente indicado para estructuras en las que se produce un colapso total, porque no habrá que resolver ninguna estructura hiperestática. El procedimiento a seguir en el método estático es el siguiente

1. Se propone un mecanismo de colapso de la estructura.
2. Se dibuja el diagrama de sólido libre de cada tramo de la estructura.
3. Se calcula mediante equilibrio el valor de la carga crítica.
4. Se comprueba que  $M \leq M_p$  en todas las secciones.

Para este caso se considerarán los mecanismos mostrados en la figura 3.3.



Figura 3.3. Dos posibles mecanismos de colapso.

Se calculará primero el mecanismo de la derecha, que es clamorosamente incorrecto, y posteriormente el mecanismo de la izquierda, que es el mecanismo correcto. Los diagramas de sólido libre para cada tramo del mecanismo de la derecha quedan como indica la figura 3.4.

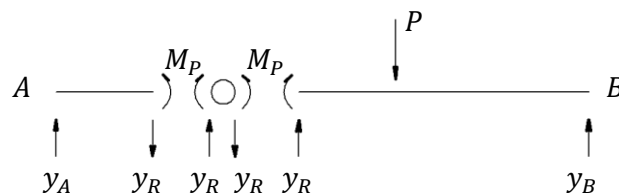


Figura 3.4. Diagrama del sólido libre para el mecanismo incorrecto.

Imponer el equilibrio en el tramo de la izquierda resulta en las siguientes ecuaciones

$$\sum M_R = 0 \Rightarrow y_A \frac{l}{4} - M_p = 0 \quad \sum F_v = 0 \Rightarrow y_A = y_R$$

Y para el de la derecha quedará

$$\sum M_R = 0 \Rightarrow y_B \frac{3l}{4} - P \frac{l}{4} - M_p = 0 \quad \sum F_v = 0 \Rightarrow y_B + y_R - P = 0$$

Se supone que  $M_p$  es conocido pues es el momento plástico para la sección de la viga, que se calcula por separado. Resolviendo se obtiene la carga máxima

$$P_{max} = \frac{8M_p}{l}$$

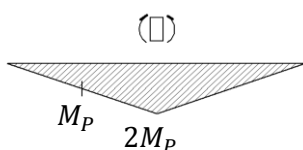


Figura 3.5.

Si se dibujan los diagramas de momentos flectores  $M$  como se ilustra en la figura 3.5 se encontrarán secciones con  $M > M_p$ . Por lo tanto el mecanismo supuesto no es el mecanismo de colapso correcto. También se sabe que la carga máxima será inferior a la que se ha calculado.



Tomando ahora el otro mecanismo que se supuso en la figura 3.3 se puede repetir el proceso. Los diagramas de sólido libre para cada tramo de la viga se muestran en la figura 3.6.

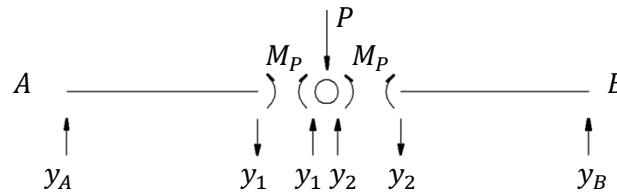


Figura 3.6. Diagrama del sólido libre para el mecanismo correcto.

Las ecuaciones de equilibrio en este segundo caso son para el tramo izquierdo

$$\sum M_R = 0 \Rightarrow y_A \frac{l}{2} - M_P = 0 \quad \sum F_v = 0 \Rightarrow y_A - y_1 = 0$$

Para el tramo derecho

$$\sum M_R = 0 \Rightarrow y_B \frac{l}{2} - M_P = 0 \quad \sum F_v = 0 \Rightarrow y_B - y_2 = 0$$

Y finalmente en la rótula

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 - P = 0$$

De este sistema de ecuaciones se encuentra que la carga máxima viene dada por

$$P_{max} = \frac{4M_P}{l}$$

Y, dado que es obligatorio hacerlo en el examen, se insistirá una vez más, y el diagrama de momentos para comprobar que en ninguna sección se supera el momento plástico es el mostrado en la figura 3.7.

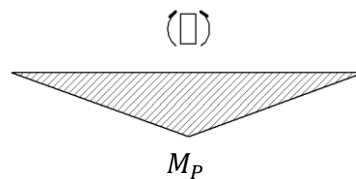


Figura 3.7. Diagrama de momentos del mecanismo correcto.

Llegado este punto se calculará la misma estructura, esta vez a partir del método cinemático. Para ello se aplicará el Principio de los trabajos virtuales, que dice así

Principio de los trabajos virtuales

- Si a una estructura en equilibrio sobre la que se aplican cargas externas se le aplica un desplazamiento virtual compatible con los enlaces de la estructura entonces el trabajo realizado por las fuerzas externas es igual al realizado por las fuerzas internas.

El único trabajo interno que se tendrá en cuenta es el realizado por las rotulas plásticas, no el de las barras, puesto que se desprecia su desplazamiento frente al de las rótulas.

El procedimiento a seguir en el método cinemático es el siguiente

1. Se propone un mecanismo de colapso de un grado de libertad.
2. Se propone un desplazamiento virtual para ese grado de libertad.
3. Se calculan los trabajos internos y los externos, igualándolos.
4. Se comprueba que  $M \leq M_P$  en todas las secciones.

A modo ilustrativo, de nuevo se suponen los mecanismos de colapso de la figura 3.3, y de nuevo se comenzará por calcular el incorrecto. Se le asigna un desplazamiento virtual  $\delta_R$  como el que se muestra en la figura 3.8.

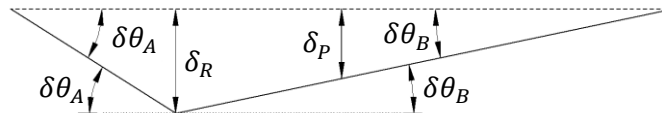


Figura 3.8. Desplazamientos virtuales del mecanismo incorrecto.

De esta forma el resto de desplazamientos virtuales en función del grado de libertad  $\delta_R$  valen

$$\delta\theta_A \approx \tan \delta\theta_A = 4 \frac{\delta_R}{l} \quad \delta\theta_B \approx \tan \delta\theta_B = \frac{4}{3} \frac{\delta_R}{l} \quad \delta_P = \frac{2}{3} \delta_R$$

Los trabajos de las fuerzas externas igualados a los de las fuerzas internas quedan.

$$P \delta_P = M_P \delta\theta_A + M_P \delta\theta_B \quad \Rightarrow \quad P \cdot \frac{2}{3} \delta_R = M_P \frac{4\delta_R}{l} + M_P \frac{4}{3} \frac{\delta_R}{l}$$

De aquí se pueden eliminar los desplazamientos virtuales y queda de nuevo

$$P = \frac{8M_P}{l}$$

Realizando otra vez el diagrama de momentos flectores como el de la figura 3.5 se obtendrá que el mecanismo supuesto es un mecanismo de colapso incorrecto. Procediendo de la misma manera para el mecanismo correcto los desplazamientos virtuales son los mostrados en la figura 3.9.

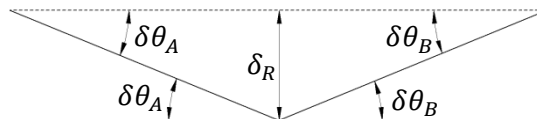


Figura 3.9. Desplazamientos virtuales del mecanismo correcto.

Los desplazamientos virtuales en función del grado de libertad  $\delta_R$ , y los trabajos resultan en

$$\delta\theta_A \approx \tan \delta\theta_A = 2 \frac{\delta_R}{l} ; \quad \delta\theta_B \approx \tan \delta\theta_B = 2 \frac{\delta_R}{l} \quad P \cdot \delta_R = M_P \delta\theta_A + M_P \delta\theta_B \Rightarrow P = \frac{4M_P}{l}$$

Y realizando de nuevo el diagrama de momentos, que será como el de la figura 3.7, se comprueba que el mecanismo es el correcto.

### 3.5. Ejemplo isostático – Viga biapoyada con carga distribuida

Considérese la viga biapoyada de la figura 3.10 con una carga distribuida aplicada.

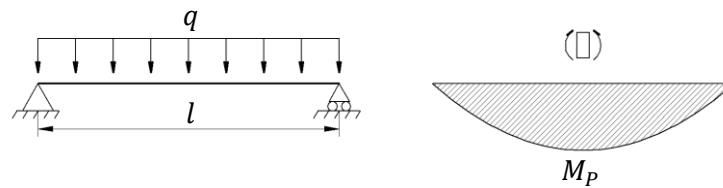


Figura 3.10. Viga biapoyada con carga distribuida y solución analítica.

Calculado por el método tradicional, el momento máximo en la sección central, y la carga máxima vienen dado por

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} \Rightarrow q_{max} = \frac{8M_p}{l^2}$$

En este caso, dado que se trata de una estructura isostática, al cálculo de la carga máxima a partir del momento plástico es inmediato, pero de nuevo se expondrán, a modo ilustrativo, el método estático y el cinemático.

Para este caso se considerará únicamente el mecanismo mostrado en la figura 3.11.

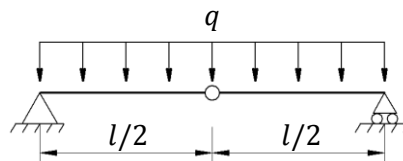


Figura 3.11. Mecanismo de colapso propuesto.

Se calculará primero mediante el método estático. Los diagramas de sólido libre del mecanismo son los que se muestran en la figura 3.12.

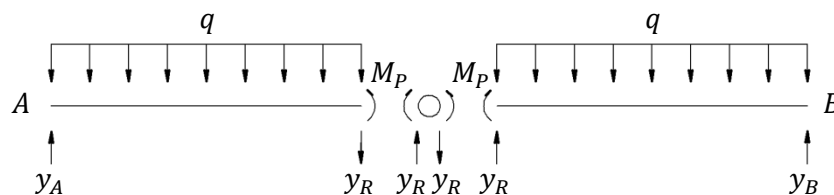


Figura 3.12. Diagramas de sólido libre del mecanismo propuesto.

Las ecuaciones de momentos para los puntos A y B son

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{ql}{2} \frac{l}{4} + y_R \frac{l}{2} - M_p = 0 \quad \sum M_B = 0 \Rightarrow -\frac{ql}{2} \frac{l}{4} + y_R \frac{l}{2} + M_p = 0$$

Y resolviendo el sistema para  $y_R$  y  $q$  se llega al siguiente resultado

$$q = \frac{8M_p}{l^2}$$

Que es el resultado esperado. Se debe comprobar el resultado con el diagrama de momentos.

Calculando ahora el mismo problema mediante el método cinemático se aplican los desplazamientos virtuales mostrados en la figura 3.13.

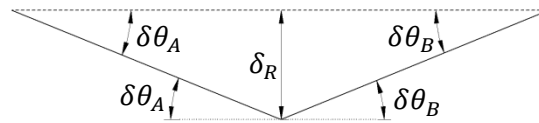


Figura 3.13. Desplazamientos virtuales del mecanismo propuesto.

Los giros en función del grado de libertad  $\delta_R$  son

$$\delta\theta_A \approx \tan \delta\theta_A = 2 \frac{\delta_R}{l} \quad \delta\theta_B \approx \tan \delta\theta_B = 2 \frac{\delta_R}{l}$$

Además habrá que considerar el desplazamiento vertical a lo largo de la estructura

$$\delta_x = \begin{cases} x \cdot \delta\theta_A & 0 < x < l/2 \\ (l-x) \cdot \delta\theta_B & l/2 < x < l \end{cases}$$

Igualando los trabajos de las fuerzas internas y de las externas queda de nuevo el resultado

$$M_P \delta\theta_A + M_P \delta\theta_B = 2 \int_0^{l/2} q \delta_x dx \Rightarrow q = \frac{8M_P}{l^2}$$

Y una vez más hay que comprobar mediante el diagrama de momentos que ninguna sección supere el momento plástico. El diagrama en este caso será el mismo que el de la figura 3.10.

### 3.6. Ejemplo hiperestático – Viga biempotrada con carga puntual

Considérese la viga biempotrada de la figura 3.14 con una carga puntual aplicada.

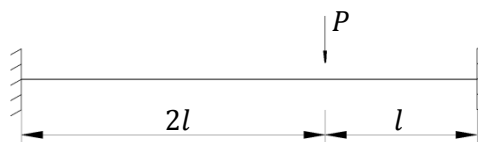


Figura 3.14. Viga biempotrada con carga puntual.

El método tradicional para este caso se aplicaría de forma similar al caso presentado en el apartado “2.2. Ejemplo – Plasticidad en barras”. Sin embargo aquella estructura era de grado de hiperestaticidad 1 mientras que la que ahora se tiene entre manos es de grado de hiperestaticidad 3.

Es por esto que el procedimiento tradicional se vuelve muy largo y tedioso, pues hará falta obtener tres ecuaciones adicionales, mediante un sistema isostático asociado y trabajos virtuales, los Teoremas de Mohr, etc. No se desarrolla a continuación, pero la solución de la estructura para la carga crítica es

$$P_{max} = \frac{3M_P}{l}$$

Si se aplica el método estático o el cinemático resulta mucho más sencillo llegar a este resultado. Lo primero que debe hacerse es proponer un mecanismo de colapso para la estructura. Para este caso se propone el de la figura 3.15.

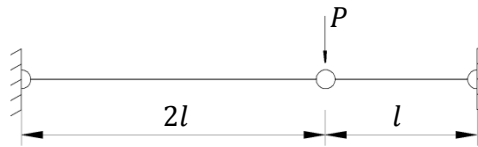


Figura 3.15. Mecanismo de colapso propuesto.

Resolviendo por el método estático hay que imponer el equilibrio en el diagrama de sólido libre de la figura 3.17.

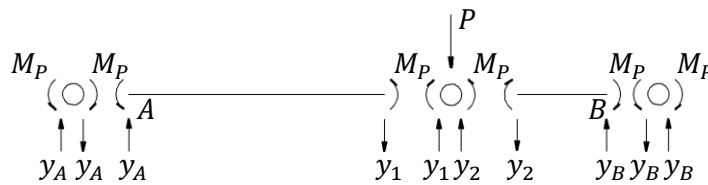


Figura 3.17. Diagrama del sólido libre del mecanismo propuesto.

Mediante el equilibrio de momentos en las vigas en los puntos A y B se obtiene

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_P + M_P - y_1 \cdot 2l = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{M_P}{l}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_P + M_P - y_2 \cdot l = 0 \Rightarrow y_2 = \frac{2M_P}{l}$$

Y finalmente con el equilibrio de fuerzas verticales en la rótula

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow P = y_1 + y_2 \Rightarrow P_{max} = \frac{3M_P}{l}$$

Si en vez del método estático se aplica el método cinemático el procedimiento no es mucho más complicado. Los desplazamientos virtuales que se consideran ahora para la estructura son los que se ilustran en la figura 3.18.



Figura 3.18. Desplazamientos virtuales para el mecanismo propuesto.

$$\delta\theta_A = \tan \frac{\delta_P}{2l} \approx \frac{\delta_P}{2l} \quad \delta\theta_B = \tan \frac{\delta_P}{l} \approx \frac{\delta_P}{l}$$

Igualando los trabajos de las fuerzas externas y las fuerzas internas

$$P \cdot \delta_P = M_P \cdot \delta\theta_A + M_P \cdot \delta\theta_A + M_P \cdot \delta\theta_B + M_P \cdot \delta\theta_B \Rightarrow P_{max} = \frac{3M_P}{l}$$

Tanto con el método estático como con el cinemático los resultados deben comprobarse mediante el diagrama de momentos como el representado en la figura 3.19.

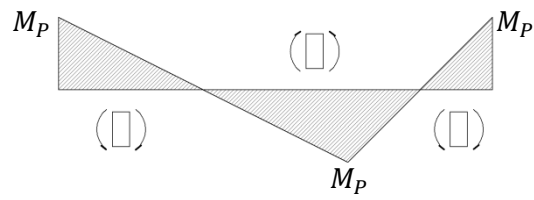


Figura 3.19. Diagrama de momentos para comprobar que  $M \leq M_p \forall x \in [0, 3l]$ .

## 4. Introducción a la inestabilidad estructural

### 4.1. Generalidades acerca de la inestabilidad

La no linealidad del comportamiento de una estructura se produce no sólo debido a la no linealidad del material, sino también a la no linealidad geométrica. La deformación de una estructura por pandeo como sugiere la figura 4.1 no se produciría en un caso de linealidad perfecta de la geometría de la estructura, sin desviaciones ni perturbaciones.



Figura 4.1. Pandeo debido a la no linealidad geométrica de la estructura.

En la estructura de la figura 4.1 el equilibrio no se puede imponer en la estructura original, y es necesario recurrir a la deformada. Aunque el equilibrio se imponga en la deformada, las deformaciones se considerarán pequeñas, y las tensiones se determinarán como si el caso fuese lineal, es decir, sobre la estructura original.

### 4.2. Conceptos energéticos

La energía interna es la energía de deformación que queda almacenada en el cuerpo después de deformarlo, similar a un muelle. Supóngase una barra de longitud  $l$  que se estira una cantidad  $\delta$  mediante la aplicación de una carga  $P$ . Entonces la energía interna, calculada a partir del Teorema de Clapeyron, es

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\delta} P \, d\delta = \frac{1}{2} P\delta$$

El Teorema de Clapeyron dice

- *La energía interna de un cuerpo, que se encuentra en equilibrio bajo la aplicación de una carga dada, es igual a la mitad del trabajo realizado por las fuerzas externas.*

En su forma general, la ecuación de Clapeyron es

$$U = \frac{1}{2} \int_{\delta V} \underline{u} \cdot \underline{\phi} \, dS + \frac{1}{2} \int_V \underline{u} \cdot \underline{b} \, dV = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \, dV \quad \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

La energía potencial  $V$  está relacionada con el trabajo de las fuerzas conservativas. Una fuerza constante puede tratarse como una fuerza conservativa. La variación de energía potencial es

$$V_B - V_A = - \int_A^B \underline{F} \cdot d\underline{r} = -W_{AB}$$

La energía potencial total  $E_t$  se define como la suma de la energía interna y la energía potencial,  $E_t = U + V$ . Si el sistema está aislado, entonces ésta será una magnitud constante,  $\Delta E_t = 0$ .

El principio del valor estacionario de la energía potencial total dice

- *Una condición necesaria y suficiente para que exista equilibrio en un sistema de fuerzas conservativas es que la variación de primer orden de la energía potencial total sea nula para cualquier campo de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces.*

Este principio es una manera de interpretar los trabajos virtuales en términos de la energía potencial total.

### 4.3. Grados de libertad

Los grados de libertad son un conjunto de variables  $q_1, q_2, \dots, q_n$  independientes que una vez determinados definen la deformación, la energía interna y la energía potencial.

$$U = U(q) \quad V = V(q) \quad E_t = E_t(q)$$

El principio del valor estacionario de la energía potencial total implica

$$\delta E_t = 0 \Rightarrow \delta(U + V) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} (U + V) \cdot \delta q_i = 0$$

Los desplazamientos  $\delta q_i$  son arbitrarios, puede hacerse que uno cualquiera de ellos sea 1 y el resto sea 0. Entonces el valor de la derivada respecto a ese desplazamiento será cero. En general, como puede hacerse para cualquier  $i$

$$\frac{\partial}{\partial q_i} (U + V) = 0$$

### 4.4. Estabilidad

Las tres posiciones de la esfera de la figura 4.2 son posiciones de equilibrio. La primera es una posición de equilibrio estable, es decir, si se perturba ligeramente la posición, ésta tenderá a volver a la posición inicial. El segundo es un punto de equilibrio neutro, es decir, la esfera permanecerá en la nueva posición de equilibrio después de una perturbación. El tercer punto es un punto de equilibrio inestable, la esfera caerá ante la más mínima perturbación.

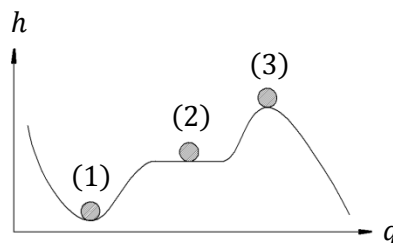


Figura 4.2. Los tres tipos de equilibrio según su estabilidad.



La energía interna de este caso no se modificará, pues se considerará una esfera rígida,  $\partial U = 0$ , y la energía potencial es  $V = mgh(q)$ , donde  $q$  es la variable independiente que se perturbará. La variación de la energía potencial total es

$$\partial E = \partial(U + V) = \partial V = \frac{\partial V}{\partial q} \delta q = \frac{\partial V}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial q} \delta q = mg \frac{\partial h}{\partial q} \delta q = 0$$

Dado que  $mg$  es constante y  $\delta q$  es una variación arbitraria que no tiene por qué ser nula, la única posibilidad de que la variación de energía potencial sea nula es

$$\frac{\partial h}{\partial q} = 0$$

Volviendo a los tres puntos de estabilidad de la figura 4.2, el primero es un mínimo local de la función  $h(q)$ , el tercero es un máximo local, y el segundo es una constante de la función. Si se desarrolla en serie de Taylor la variación de energía potencial total para un desplazamiento arbitrario

$$\Delta(U + V) = \frac{d(U + V)}{dq} \delta q + \frac{1}{2!} \frac{d^2(U + V)}{dq^2} \delta q^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3(U + V)}{dq^3} \delta q^3 + \dots$$

Para un punto de equilibrio, el primer término será cero. La estabilidad o inestabilidad de un punto la dará el signo de la primera derivada no nula, pues para un punto de equilibrio estable una perturbación tiende a aumentar la energía potencial total, y al revés. Puede suceder

1. Que la primera derivada no nula sea par y positiva  $\Rightarrow$  Punto de equilibrio estable.
2. Que la primera derivada no nula sea par y negativa  $\Rightarrow$  Punto de equilibrio inestable.
3. Que la primera derivada no nula sea impar  $\Rightarrow$  Punto de silla inestable.
4. Que todas las derivadas sean nulas  $\Rightarrow$  Equilibrio neutro.

#### 4.5. Introducción al pandeo

Suponiendo que la barra y la fuerza  $F$  aplicada están perfectamente alineadas, y el muelle mantiene su longitud natural, el sistema de la figura 4.3 a la izquierda está en equilibrio. Imagínese que se perturba el equilibrio de la forma que se muestra en la figura 4.3 a la derecha, entonces aparece la reacción del resorte  $R = kx$ .

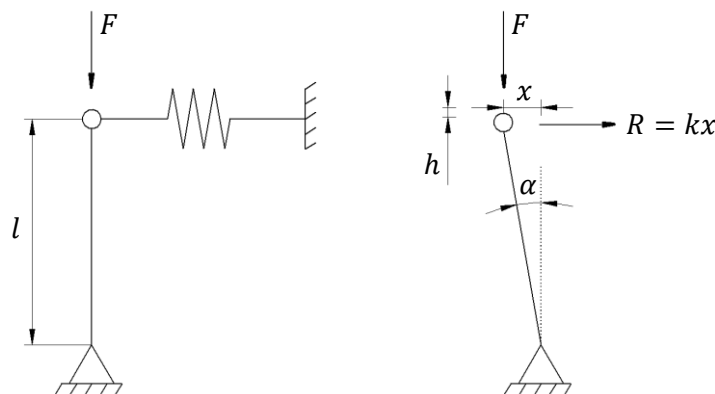


Figura 4.3. Desviación de una estructura debido a una perturbación.

La fuerza  $F$  y la reacción  $R$  generan dos momentos, respectivamente. El primero es el momento desestabilizador  $M_d$  y el momento estabilizador  $M_e$ .

$$M_d = Fx \quad M_e = Rl$$

Por lo tanto, también se puede conseguir el equilibrio en esta nueva posición si  $M_e = M_d$ , es decir, si  $F = kl$ , y por lo tanto no sólo la posición original es estable. Esta nueva posición de equilibrio es neutra.

Puede comprobarse mediante el estudio energético expuesto anteriormente. Se toma como variable generalizada el ángulo de inclinación  $\alpha$ , y entonces puede definirse  $x = l \sin \alpha$  y  $h = l(1 - \cos \alpha)$ . La energía interna del resorte es

$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kl^2 \sin^2 \alpha \approx \frac{1}{2} kl^2 \alpha^2$$

Donde se ha desarrollado en serie de Taylor  $\sin \alpha$ . La variación de energía potencial es

$$V(\alpha) - V(0) = -Fh = Fl(1 - \cos \alpha) \approx -Fl \frac{\alpha^2}{2}$$

Donde se ha desarrollado en serie de Taylor  $\cos \alpha$ . Se considera que  $F$ , al ser constante, es una fuerza conservativa y actúa sobre la energía potencial. La energía potencial total es entonces

$$E = (kl^2 - Fl) \frac{\alpha^2}{2}$$

Derivando esta expresión respecto a  $\alpha$  para encontrar la posición de equilibrio

$$\delta E = 0 \Rightarrow \delta(U + V) = 0 \Rightarrow \frac{\partial(U + V)}{\partial \alpha} \delta \alpha = 0 \quad \forall \delta \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(U + V)}{\partial \alpha} = 0$$

Entonces se encuentran dos soluciones para la posición de equilibrio

$$(kl^2 - Fl)\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ F = kl \end{cases}$$

Efectivamente se han encontrado las mismas posiciones de equilibrio, la inicial y la inclinada. La estabilidad de estas posiciones de equilibrio se encuentra haciendo las sucesivas derivadas

$$\delta^2(U + V) \Rightarrow \frac{\partial^2(U + V)}{\partial \alpha^2} = kl^2 - Fl$$

Entonces hay tres posibilidades

$$\begin{array}{lll} kl - F > 0 & kl - F = 0 & kl - F < 0 \\ \text{Inestable} & \text{Neutro} & \text{Estable} \end{array}$$

## 5. Inestabilidad estructural de columnas

### 5.1. Introducción

Se sabe que piezas de sección muy pequeña pueden fallar con tensiones que se encuentran aún muy lejos de las tensiones admisibles. Por ejemplo, la varilla de un paraguas a compresión se dobla muy rápido. La inestabilidad de esta varilla es primaria, es decir, la dimensión que se ve afectada es la longitud de la pieza. La inestabilidad secundaria es cuando la dimensión que se ve afectada es la sección de la pieza. En este curso se estudia la inestabilidad primaria.

El pandeo será aquí el único caso en que el equilibrio de fuerzas se impondrá en la deformada. Esto es porque las deformaciones son muy grandes, el problema no es lineal y no se puede aplicar el principio de superposición. Sin embargo, las tensiones y las deformaciones se considerarán como si los desplazamientos fuesen pequeños. Se dice de estas suposiciones que se está haciendo un análisis de segundo orden.

### 5.2. Carga crítica de Euler – Viga biapoyada

Imagínese una estructura como la mostrada en la figura 5.1 a la izquierda, perfectamente horizontal y alineada con la carga  $P$  de compresión. Un pequeño valor de la carga  $P$  supondrá únicamente una contracción de la viga. Esta posición horizontal será una posición de equilibrio. Si se aplica una perturbación a la horizontalidad de la pieza, y el valor de  $P$  es pequeño, la pieza volverá a la posición original, que es estable. Pero si la carga  $P$  es muy grande, la pieza se deformará y la nueva posición de equilibrio será la mostrada en la figura 5.1 a la derecha.

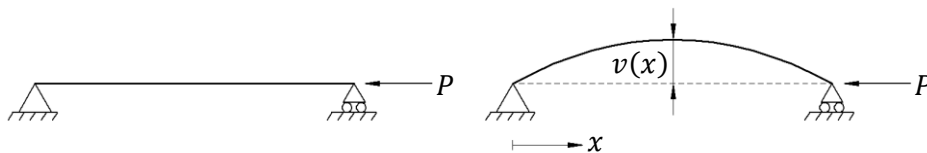


Figura 5.1. Pandeo de una viga biapoyada.

El valor de  $P$  que separa estos dos casos es la carga crítica de Euler  $P_{cr}$ , por debajo de la cual sólo hay una solución de equilibrio, la horizontal, y es estable, y por encima la solución horizontal es inestable y aparece otra posición de equilibrio estable que es la curvada. Aunque en la práctica la estructura podría soportar un poco más de carga, se considera que bajo la carga crítica de Euler la estructura colapsa.

Considerando el desplazamiento vertical o flecha  $v(x)$  de la estructura, en un punto  $x$  la estructura soportará la carga  $P$  y un momento debido a la curvatura  $M(x) = -P \cdot v(x)$  como se muestra en la figura 5.2.

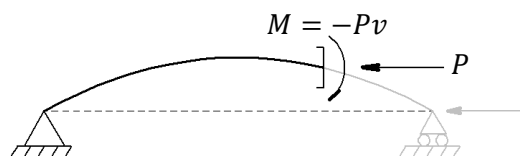


Figura 5.2. Equilibrio en la deformada.

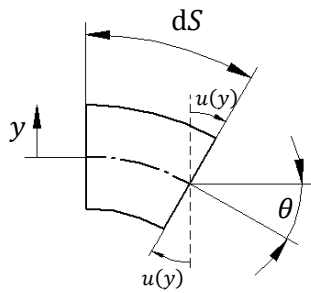


Figura 5.3.

Para considerar las deformaciones se toma la hipótesis de Navier – Bernoulli, de forma que se considera que las caras planas perpendiculares a la directriz continuarán siendo caras planas perpendiculares a la directriz tras la deformación como se muestra en la figura 5.3.

El ángulo de giro de una sección  $\theta$  se aproximará como un ángulo pequeño, y entonces se puede calcular fácilmente el desplazamiento horizontal  $u$  como

$$\frac{dv}{dx} = \tan \theta \approx \theta \quad u = -y\theta$$

El campo de deformaciones quedará

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial \theta}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Para las tensiones se aplicará la ley de Hooke  $\sigma = E\varepsilon$ , es decir

$$\sigma = -yE \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

El equilibrio de la sección puede calcularse a partir del momento que generan las tensiones

$$M = - \int_S \sigma y \, dS = \int_S y^2 E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \, dS = E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \int_S y^2 \, dS = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Donde  $I$  es la inercia de la sección. Sustituyendo por el momento  $M = -P \cdot v$  que se había encontrado por equilibrio se obtiene la ecuación diferencial que describe el problema

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{P}{EI} v = 0$$

### 5.3. Carga crítica de Euler – Viga biapoyada – Planteamiento en fuerzas

La solución para la ecuación diferencial que se acaba de encontrar es de la forma

$$v(x) = A \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right)$$

Las condiciones de contorno para este problema son las de flecha nula en los extremos

$$v(0) = v(l) = 0$$

La primera condición implica  $B = 0$ , para la segunda condición hay dos opciones,  $A = 0$  o bien

$$\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} l\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} l = n\pi \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

En este segundo caso, el valor de  $A$  no queda determinado, aunque sí el valor de la carga  $P$ . Para cada valor posible de  $n$  se encuentra un valor de  $P$  y una solución para la flecha  $v(x)$  como muestra la figura 5.4.

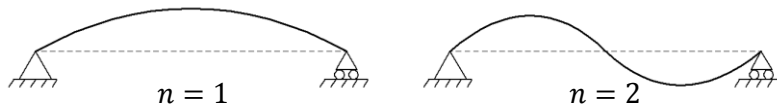


Figura 5.4. Dos modos de pandeo diferentes.

La carga para  $n = 1$  es la menor de todas, y si se carga la estructura gradualmente será la primera que se alcance, produciéndose el pandeo e impidiendo alcanzar las cargas para  $n = 2$  y sucesivas. Esta carga es la carga crítica de Euler  $P_{cr}$  y vale

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

A partir de esta carga crítica de Euler, si la carga aplicada es inferior únicamente se tiene una solución de equilibrio, pero por encima de esta carga aparece una solución más, y la solución horizontal pasa a ser inestable. La constante  $A$  que no se pudo determinar pasa a ser el desplazamiento máximo  $A = v_{l/2}$ , que en este momento es desconocido.

Para aumentar la carga crítica de Euler puede aumentarse la inercia de la sección o también reducir la longitud, por ejemplo estableciendo apoyos adicionales.

#### 5.4. Carga crítica de Euler – Viga biapoyada – Planteamiento energético

Para el planteamiento en energías se considera la energía interna como la energía potencial elástica almacenada en la pieza, y a partir de la ecuación de Clapeyron valdrá

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx = \int_0^l \frac{1}{2} EI \frac{d^2 v}{dx^2} dx$$

Como la fuerza  $P$  se considera constante, puede considerarse que proviene de un potencial y que se trata de una fuerza conservativa, con una energía potencial asociada de

$$V = -P\delta$$

Donde  $\delta$  es la reducción total de longitud de la barra, que se puede escribir como el acortamiento de las rebanadas

$$\delta = \int_0^{l-\delta} d\delta = \int_0^{l-\delta} (ds - dx) = \int_0^{l-\delta} (\sqrt{dx^2 + dv^2} - dx) = \int_0^{l-\delta} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} - 1 \right) dx$$

Desarrollando en serie de Taylor

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

Sustituyendo y considerando para el límite de integración  $l \gg \delta$

$$V = -P \int_0^l \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx$$

La energía potencial total es entonces

$$U + V = \int_0^l \frac{1}{2} EI \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx - P \int_0^l \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx$$

Para poder continuar el planteamiento energético sería necesario conocer el desplazamiento  $v(x)$ , que es desconocido. Más adelante lo habitual será tomar unos desplazamientos supuestos y calcular una aproximación de la carga crítica de Euler, pero para este caso se tomará la ley de desplazamientos calculada mediante el planteamiento en fuerzas, de modo que en vez de una aproximación se obtendrá la carga crítica exacta.

$$v(x) = v_{l/2} \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{\pi v_{l/2}}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \quad \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{\pi^2 v_{l/2}}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

Sustituyendo en la expresión anterior e integrando

$$U + V = \left( \frac{\pi^4 EI}{4l^3} - \frac{\pi^2 P}{4l} \right) v_{l/2}^2$$

Y el equilibrio viene dado por  $\delta(U + V) = 0$ , por lo tanto

$$\frac{\partial(U + V)}{\partial v_{l/2}} = \left( \frac{\pi^4 EI}{4l^3} - \frac{\pi^2 P}{4l} \right) (2v_{l/2})$$

Y efectivamente las dos soluciones para esta ecuación son

$$v_{l/2} = 0 \quad P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = P_{cr}$$

Ahora se puede calcular la estabilidad de la solución comprobando el signo de  $\delta^2(U + V)$

$$\frac{\partial^2(U + V)}{\partial v_{l/2}^2} = \frac{\pi^4 EI}{2l^3} - \frac{\pi^2 P}{2l} = \frac{\pi^2}{2l} (P_{cr} - P)$$

Si  $P < P_{cr}$  el equilibrio es estable, si  $P = P_{cr}$  el equilibrio es neutro, y será inestable si  $P > P_{cr}$ .

### 5.5. Carga crítica de Euler – Viga biempotrada – Planteamiento en fuerzas

La estructura que se plantea ahora es la mostrada en la figura 5.5 a la izquierda.

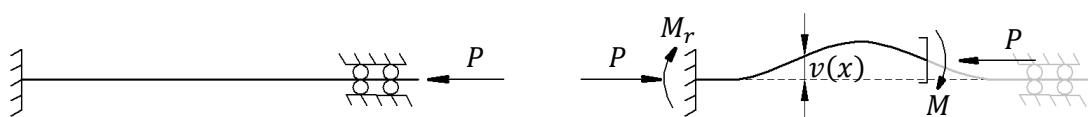


Figura 5.5. Pandeo de una viga biempotrada y equilibrio en la deformada.

En este caso aparece un momento de reacción  $M_r$  de forma que el momento  $M$  en las rebanadas vale  $M = M_r - P \cdot v(x)$  (figura 5.5 derecha) y la ecuación diferencial queda

$$M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{1}{EI} (M_r - Pv) \Rightarrow EI \frac{d^2 v}{dx^2} + Pv = M_r$$

La solución será la suma de la solución homogénea y la particular

$$v(x) = A \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + \frac{M_r}{P}$$

Aplicando la condición de contorno  $v(0) = 0$  se obtiene  $B = -M_r/P$ . Para  $x = 0$  la condición de contorno de rotación nula es

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = A \sqrt{\frac{P}{EI}} \cos 0 - B \sqrt{\frac{P}{EI}} \sin 0 = 0$$

La única posibilidad, aparte de la solución trivial  $P = 0$ , es que  $A = 0$ , y por lo tanto la solución para el desplazamiento es

$$v(x) = \frac{M_r}{P} \left( 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) \right)$$

En este caso el momento de reacción  $M_r$  es desconocido, pues no se ha calculado. Esto hace que, como en el caso anterior, se desconozca el desplazamiento  $v(x)$ . La condición de contorno para el desplazamiento en  $v(l) = 0$  es

$$0 = \frac{M_r}{P} \left( 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} l\right) \right) \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} l = 2n\pi \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, igual que se hizo con la viga biapoyada, la carga crítica se dará para  $n = 1$  y será

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

La condición de rotación en  $x = l$  se obtiene

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=l} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = A \sqrt{\frac{P}{EI}} \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} l\right) - B \sqrt{\frac{P}{EI}} \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} l\right) = 0$$

Entonces se deberá cumplir

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} l = m\pi \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Pero esta es una condición que ya se cumplía con la condición de contorno anterior.

### 5.6. Carga crítica de Euler – Viga en voladizo – Planteamiento en fuerzas

La estructura que se plantea ahora es la mostrada en la figura 5.6 a la izquierda.

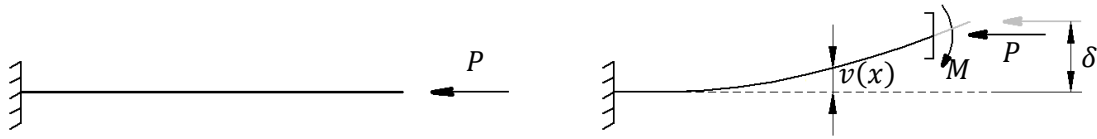


Figura 5.6. Pandeo de una viga en voladizo y equilibrio en la deformada.

El momento  $M$  en las rebanadas vale  $M = P(\delta - v(x))$  (figura 5.6 derecha) y la ecuación diferencial queda

$$M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{P}{EI} (\delta - v) \Rightarrow EI \frac{d^2 v}{dx^2} + Pv = P\delta$$

La solución será la suma de la solución homogénea y la particular

$$v(x) = A \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + \delta$$

Aplicando la condición de contorno  $v(0) = 0$  se obtiene  $B = -\delta$ . Para  $x = 0$  la condición de contorno de rotación nula es

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = A \sqrt{\frac{P}{EI}} \cos 0 - B \sqrt{\frac{P}{EI}} \sin 0 = 0$$

La única posibilidad, aparte de la solución trivial  $P = 0$ , es que  $A = 0$ , y por lo tanto la solución para el desplazamiento es

$$v(x) = \delta \left( 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) \right)$$

El desplazamiento en el extremo  $\delta$  es desconocido, pues no se ha calculado todavía. Esto hace que, como en los casos anteriores, se desconozca el desplazamiento  $v(x)$ . La condición de contorno para el desplazamiento en  $v(l) = \delta$  es

$$\delta = \delta \left( 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} l\right) \right) \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} l = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, igual que se hizo en el caso anterior, la carga crítica se dará para  $n = 1$  y será

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$



### 5.7. Expresión general de la carga crítica de Euler

Todas las cargas críticas que se han calculado son muy similares entre ellas, y por lo general la carga crítica de Euler puede escribirse como

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\beta^2 l^2}$$

Entonces, para el caso de la viga biapoyada  $\beta = 1$ , para el caso de la viga biempotrada  $\beta = 1/2$  y para el caso de la viga en voladizo  $\beta = 2$ .

### 5.8. Excentricidad y defectos iniciales

Considérese ahora la estructura de la figura 5.7 que permite descentralizar la carga  $P$  aplicada

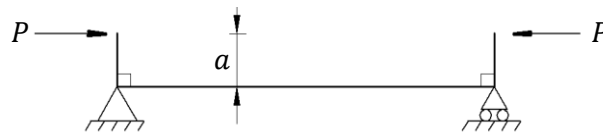


Figura 5.7. Excentricidad de la carga.

El momento en la viga es  $M = P(-a - v(x))$  y la ecuación diferencial entonces será

$$M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}(a + v) \Rightarrow EI \frac{d^2 v}{dx^2} + Pv = -Pa$$

La solución será la suma de la solución homogénea y la particular

$$v(x) = A \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) - a$$

Aplicando la condición de contorno  $v(0) = 0$  se obtiene  $B = a$ . Con  $v(l) = 0$  se obtiene

$$A = a \frac{1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} l\right)}{\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} l\right)} = a \tan\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} l\right)$$

La solución final es entonces

$$v(x) = a \tan\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} l\right) \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + a \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) - a$$

Si se hace tender la carga  $P$  a la carga crítica  $P_{cr}$  para  $x = l/2$  entonces

$$P \rightarrow P_{cr} \Rightarrow v\left(\frac{l}{2}\right) \rightarrow a \tan \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} + a \cos \frac{\pi}{2} - a$$

Como  $\tan \pi/2 \rightarrow \infty$  el desplazamiento sería infinito, y la carga crítica es la carga límite.

### 5.9. Inestabilidad en cargas columna

Para la estructura biapoyada cargada como indica la figura 5.8 a la izquierda, la ley de momentos se obtiene por combinación de la ley lineal de primer orden  $M_1$  y la de segundo orden, no lineal,  $M_2$  como ilustra la figura 5.8 a la derecha. Para el momento  $M_1$  se puede calcular el equilibrio en la estructura original, para el  $M_2$  hay que hacerlo en la deformada.

Las fuerzas pueden dividirse por superposición, pero la solución no se puede calcular mediante este método, pues se está calculando un problema no lineal debido a la geometría.

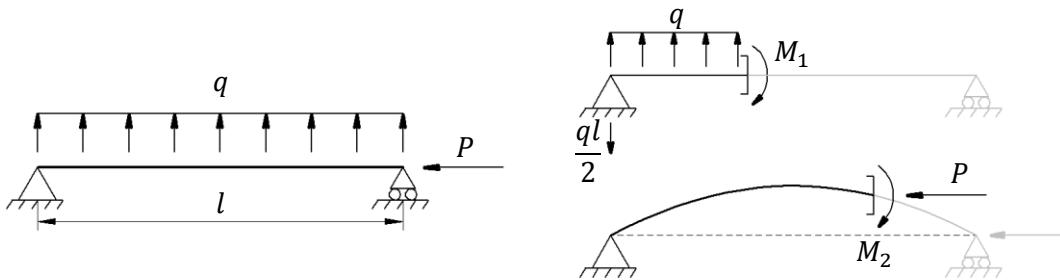


Figura 5.8. Pandeo con carga distribuida.

Los momentos en la viga son

$$M_1 = -\frac{ql}{2}x + \frac{q}{2}x^2 \quad M_2 = -P \cdot v(x)$$

Y la ecuación diferencial entonces será

$$M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{q}{2}x^2 - \frac{ql}{2}x - Pv \right) \Rightarrow I \frac{d^2 v}{dx^2} + Pv - \left( \frac{q}{2}x^2 - \frac{ql}{2}x \right) = 0$$

La solución para esta ecuación es

$$v(x) = A \sin \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + B \cos \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) - \frac{q}{2P} \left( x^2 - lx - \frac{2EI}{P} \right)$$

La condición  $v(0) = 0$  implica  $B = qEI/P^2$ , y la condición  $v(l) = 0$  implica

$$A = \frac{qEI \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} l \right) \right)}{P^2 \sin \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} l \right)}$$

Ahora se puede calcular el desplazamiento máximo en  $x = l/2$ . Si se hace tender la carga  $P$  a la carga crítica  $P_{cr}$

$$P \rightarrow P_{cr} \Rightarrow v \left( \frac{l}{2} \right) \rightarrow \frac{q^2 l^4}{\pi EI \sin \pi} (1 - \cos \pi) \sin \frac{\pi}{2} + \frac{ql^4}{\pi^4 EI} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{ql^4}{2\pi^2 EI} \left( \frac{l^2}{2} - \frac{2l^2}{EI} \right)$$

Como  $\sin \pi \rightarrow \infty$  entonces el desplazamiento sería infinito, como en el caso anterior. La carga crítica no varía por el hecho de tener una carga distribuida.

### 5.10. Método energético de Rayleigh – Ritz

Hasta este punto se han calculado las cargas críticas para diferentes condiciones de contorno sin conocer por completo los desplazamientos verticales en el caso del planteamiento por fuerzas. Incluso, en “5.4. Carga crítica de Euler – Viga biapoyada – Planteamiento energético” se hizo utilizando la forma de la solución conocida de antemano, y por ello se obtuvo la carga crítica exacta.

El método energético de Rayleigh – Ritz consiste en suponer una familia de  $m$  funciones  $v_i(x)$ , que se anularán allí donde se tenga una condición de contorno impuesta, además de una función de desplazamientos  $v_0(x)$  impuestos en la frontera y nula en el resto del dominio. La solución entonces podrá obtenerse como

$$v(x) = v_0 + \sum_{i=1}^m a_i \cdot v_i(x)$$

Donde habrá que encontrar los coeficientes  $a_i$  para conocer la solución del desplazamiento vertical. Se toman entonces estos coeficientes como coordenadas generalizadas y al aplicarles unos desplazamientos virtuales arbitrarios, resultará en un sistema de  $m$  ecuaciones de la forma

$$\frac{\partial(U + V)}{\partial a_i} = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \cup [1, m]$$

### 5.11. Método energético – Viga biapoyada

Se determinará por el método de Rayleigh – Ritz el desplazamiento de la sección central  $C$  de la viga biapoyada de la figura 5.9.

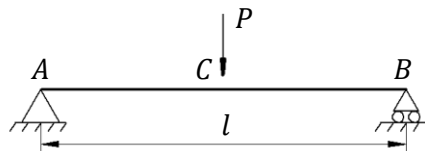


Figura 5.9. Viga biapoyada.

Para ello se supone una solución inventada

$$v(x) = v_c \sin \frac{\pi x}{l}$$

Se ha supuesto una única función, que no es la solución real, pero podrían haberse supuesto muchas más. Por ejemplo, en “Cálculo de estructuras – Método de los elementos finitos” se suponían las funciones de forma, tantas como nodos y dimensiones hubiese.

La energía de deformación interna es

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx$$

Donde el momento es

$$M = EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -EI v_c \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

Sustituyendo, la energía interna será

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l v_c^2 \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{\pi^4 EI v_c^2}{4l^3}$$

Dado que  $P$  es una carga constante, la energía potencial  $V = P v_c$ . La energía potencial total será finalmente

$$U + V = \frac{\pi^4 EI v_c^2}{4l^3} - P v_c$$

Para encontrar el equilibrio habrá que derivar esta expresión e igualar a cero.

$$\delta(U + V) = 0 \Rightarrow \frac{\partial(U + V)}{\partial v_c} \delta v_c = 0 \Rightarrow \frac{\partial(U + V)}{\partial v_c} = 0$$

$$\frac{\partial(U + V)}{\partial v_c} = \frac{\pi^4 EI v_c}{2l^3} - P = 0$$

De donde se obtiene  $v_c$ , que puede compararse con el valor real  $v_{cR}$ .

$$v_c = \frac{2}{\pi^4} \frac{Pl^3}{EI} \approx 0,02053 \frac{Pl^3}{EI} \quad v_{cR} = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EI} \approx 0,02083 \frac{Pl^3}{EI}$$

La aproximación es, por lo tanto, muy buena, pero la solución aproximada sobreestima la capacidad de la estructura, es decir, la carga crítica calculada es mayor de la real. Esto ocurre siempre que en la familia de funciones supuestas no se encuentre la solución real.

Esto es así porque el desplazamiento real será siempre el que requiera la mínima energía para un mismo desplazamiento dado. Visto de otro modo, es el que a una misma energía de deformación, esto es, a una misma carga, provoca las máximas deformaciones. Por lo tanto el desplazamiento real será el que requiera una menor carga hasta la rotura.

## 5.12. Método energético – Viga en voladizo

A continuación se aplica el método energético a la viga en voladizo de la figura 5.10.

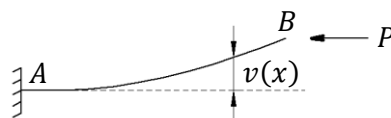


Figura 5.10. Viga en voladizo.

Se supone la siguiente ley de desplazamiento transversal para la estructura de viga empotrada

$$v(x) = \frac{v_0 x^2}{2l^3} (3l - x)$$

Efectivamente, esta ley cumple las condiciones de contorno del problema

$$v(0) = 0 \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

Las derivadas de esta ley de desplazamientos son

$$\frac{dv}{dx} = \frac{3v_0x}{2l^3}(2l-x) \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{3v_0}{l^3}(l-x)$$

La energía interna se calcula como

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{3v_0}{l^3} \right)^2 (l-x)^2 dx = \frac{3EIv_0^2}{2l^3}$$

Considerando que  $P$  es constante y proviene de un campo conservativo, la energía potencial se calcula como

$$V = -P \int_0^l \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx = -\frac{P}{2} \int_0^l \left( \frac{3v_0}{2l^3} \right)^2 (2lx - x^2)^2 dx = -\frac{3Pv_0^2}{5l}$$

Y por lo tanto la energía potencial total es

$$U + V = \frac{3EIv_0^2}{2l^3} - \frac{3Pv_0^2}{5l}$$

Derivando respecto a la coordenada generalizada  $v_0$  e igualando a cero queda

$$\frac{\partial(U+V)}{\partial v_0} = 2v_0 \left( \frac{3EI}{2l^3} - \frac{3P}{5l} \right) = 0$$

Como debe cumplirse para cualquier  $v_0$  arbitrario entonces se obtiene la solución aproximada para la carga

$$\left( \frac{3EI}{2l^3} - \frac{3P}{5l} \right) = 0 \quad P = 2,5 \frac{EI}{l^2}$$

Mientras que la solución exacta para la carga  $P$  es

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \approx 2,4674 \frac{EI}{l^2}$$

De nuevo la solución se aproxima de forma que sobreestima la carga crítica que puede soportar la estructura. Para la energía interna se ha utilizado la segunda derivada del desplazamiento, a partir del momento y la ecuación de Clapeyron

$$M = EI \frac{d^2v}{dx^2} \quad U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx$$

Pero se puede proceder de otra manera, a partir de la ley de momentos

$$M = P(v_0 - v(x))$$

Y sustituir directamente en la ecuación de Clapeyron la ley de momentos, es decir

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{[P(v_0 - v(x))]^2}{2EI} dx = \frac{P^2 v_0^2}{2EI} \int_0^l \left(1 - \frac{x^2}{2l^3}(3l - x)\right)^2 dx = \frac{17 P^2 v_0^2}{70 EI} l$$

Si se repite el procedimiento anterior pero para esta energía interna, la solución obtenida es

$$P \approx 2,4706 \frac{EI}{l^2}$$

Que sigue sobreestimando la carga máxima, pero es mucho más aproximada que la anterior. Esto es porque, considerando la ecuación aproximada para  $v(x)$ , el error de la segunda derivada de esta ecuación es mayor que el de la ecuación en sí. En el primer caso se empleó esta segunda derivada  $d^2v/dx^2$ , sin embargo, en la ley de momentos se empleó  $v(x)$ .

## 6. Cálculo matricial de la estabilidad de estructuras

### 6.1. Formulación de la matriz de rigidez

Con el objetivo de obtener la relación entre las fuerzas y los desplazamientos de una estructura se tomarán las siguientes hipótesis para desarrollar el método matricial.

1. Se plantea el equilibrio en la rebanada debido a la no linealidad del problema.
2. Estructura de vigas rectas de propiedades constantes con las cargas externas aplicadas en los nudos.
3. Hipótesis de Navier – Bernoulli. Las caras de la rebanada permanecen planas y perpendiculares a la directriz.

Con todo, puede escribirse lo siguiente

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= -u(x) - y \frac{dv}{dx} & \varepsilon_{xx} &= -\frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} & \sigma_{xx} &= E\varepsilon_{xx} \\ v_y(x, y) &= v(x) \end{aligned}$$

A partir de la tensión ya puede calcularse el esfuerzo axial

$$N = \int_A \sigma \, dA = \int_A E \left( -\frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} \right) dA = -E \frac{du}{dx} \int_A dA - E \frac{d^2v}{dx^2} \int_A y \, dA = -EA \frac{du}{dx}$$

La integral del primer término es el área de la sección  $A$ , la segunda es nula, pues  $y$  tiene su origen en el centro de área de la sección. También puede calcularse el momento flector

$$M = - \int_A y \sigma \, dA = \int_A E \left( y \frac{du}{dx} + y^2 \frac{d^2v}{dx^2} \right) dA = E \frac{du}{dx} \int_A y \, dA + E \frac{d^2v}{dx^2} \int_A y^2 \, dA = EI \frac{d^2v}{dx^2}$$

La integral del segundo término es la inercia  $I$  de la sección. Aplicando el equilibrio de fuerzas horizontales a la sección  $dx$  mostrada en la figura 6.1, que está deformada, se obtiene

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N - \left( N - \frac{dN}{dx} dx \right) = 0 \Rightarrow \frac{dN}{dx} = 0 \Rightarrow N = \text{cte} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( -EA \frac{du}{dx} \right) = 0$$

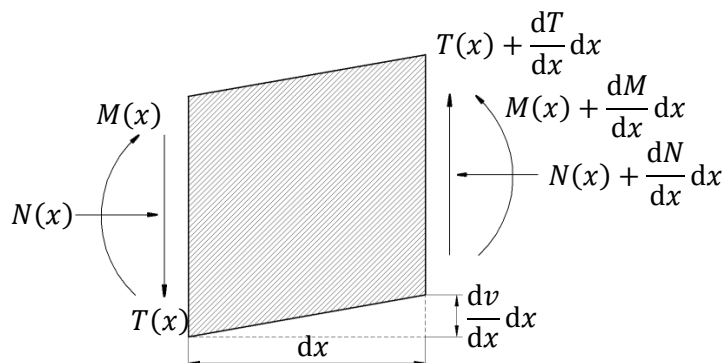


Figura 6.1. Equilibrio en la rebanada deformada.

El esfuerzo normal generará un momento debido a la no linealidad geométrica.

Dado que  $EA$  se considera constante para toda la barra entonces

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \Rightarrow u(x) = ax + b = \frac{u_2 - u_1}{l}x + u_1$$

Donde  $u_1$  y  $u_2$  son los desplazamientos de los extremos. Las fuerzas axiales que actúan en los extremos de la barra son  $P_{x1}$  y  $P_{x2}$ , ambas en la dirección  $x$  de modo que

$$N(0) = P_{x1} \quad N(l) = -P_{x2}$$

Se considera  $N > 0$  cuando es de compresión. De este modo

$$N = \text{cte} = -EA \frac{du}{dx} = -EA \frac{u_2 - u_1}{l} = P_{x1} = -P_{x2}$$

$$P_{x1} = \frac{EA}{l}(u_1 - u_2) \quad (6.1) \quad P_{x2} = \frac{EA}{l}(u_2 - u_1) \quad (6.2)$$

De un modo similar se aplica el equilibrio de fuerzas verticales

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \left( T + \frac{dT}{dx} dx \right) - T = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow T = \text{cte}$$

Para los momentos hay que considerar que la deformación introduce el momento generado por la fuerza axial, como indica la figura 6.1

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow \left( M + \frac{dM}{dx} dx \right) - M + T dx + N \frac{dv}{dx} dx = 0$$

Se obtiene entonces la ecuación

$$\frac{dM}{dx} + T + N \frac{dv}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad M(x) + Tx + N \cdot v(x) + A = 0$$

Siendo  $A$  una constante de integración, que puede encontrarse sustituyendo  $x = 0$  y aplicando las condiciones de contorno se tiene

$$A = -M_1 - Nv_1$$

Sustituyendo esta constante y el valor del momento en la ecuación obtenida se tiene

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} + Tx + N \cdot v(x) - M_1 - Nv_1 = 0$$

También puede escribirse

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} + P_{x1}(v(x) - v_1) + P_{y1}x - M_1 = 0 \quad (6.3)$$

Con las condiciones de contorno

$$v(0) = v_1 \quad v(l) = v_2 \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = \theta_1 \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=l} = \theta_2$$



Las ecuaciones (6.1) y (6.2) más la (6.3) combinada con sus cuatro condiciones de contorno se pueden escribir de forma matricial como  $\underline{P} = \underline{K} \cdot \underline{\Delta}$ , es decir

$$\begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ M_1 \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{l^3} \phi_1 & \frac{EI}{l^2} \phi_2 & 0 & -\frac{EI}{l^3} \phi_1 & \frac{EI}{l^2} \phi_2 \\ 0 & \frac{EI}{l^2} \phi_2 & \frac{EI}{l} \phi_4 & 0 & -\frac{EI}{l^2} \phi_2 & \frac{EI}{l} \phi_3 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EI}{l^3} \phi_1 & -\frac{EI}{l^2} \phi_2 & 0 & \frac{EI}{l^3} \phi_1 & -\frac{EI}{l^2} \phi_2 \\ 0 & \frac{EI}{l^2} \phi_2 & \frac{EI}{l} \phi_3 & 0 & -\frac{EI}{l^2} \phi_2 & \frac{EI}{l} \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Las funciones  $\phi_i$  son las llamadas funciones de estabilidad, que son función de  $N$  y desconocidas de modo que lo que se hace es aproximar esta matriz.

## 6.2. Formulación de la matriz de rigidez aproximada

Se supondrá un desplazamiento aproximado y a partir de métodos energéticos se encontrará una solución aproximada. La energía potencial total es

$$E_T = U + V = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d^2v}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l N \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \underline{\Delta}^T \cdot \underline{P}$$

Se supondrán unos desplazamientos transversales  $v(x)$  que sigan una ley cúbica

$$v(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$$

Y se tratará de aproximar esta solución. Las condiciones de contorno para los desplazamientos transversales y los giros son

$$v(0) = v_1 \quad v(l) = v_2 \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = \theta_1 \quad \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=l} = \theta_2$$

A partir de estas condiciones pueden encontrarse las cuatro constantes de la función

$$v(x) = v_1 + \theta_1 x - \frac{3(v_1 - v_2)}{l^2} x^2 - \frac{2\theta_1 + \theta_2}{l} x^2 + \frac{\theta_1 + \theta_2}{l^2} x^3 - \frac{2(v_2 - v_1)}{l^3} x^3$$

Esta ecuación para  $v(x)$  se puede escribir de forma matricial como

$$v(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} & x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} & \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} & \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \underline{A}^T \cdot \underline{\Delta}$$

Se pueden calcular entonces la primera y la segunda derivada de esta expresión como se indica a continuación.

La primera derivada en forma matricial es

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dA^T}{dx} \underline{\Delta} = \begin{bmatrix} -\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3} & 1 - \frac{4x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} & \frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3} & \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \underline{C}^T \cdot \underline{\Delta}$$

Y haciendo lo mismo para la segunda derivada

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{dC^T}{dx} \underline{\Delta} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} & -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} & \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} & \frac{6x}{l^2} - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \underline{D}^T \cdot \underline{\Delta}$$

Elevando la primera derivada al cuadrado se obtiene

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = (\underline{C}^T \cdot \underline{\Delta})^T (\underline{C}^T \cdot \underline{\Delta}) = \underline{\Delta}^T \cdot \underline{C} \otimes \underline{C}^T \cdot \underline{\Delta}$$

De idénticamente para la segunda derivada

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 = (\underline{D}^T \cdot \underline{\Delta})^T (\underline{D}^T \cdot \underline{\Delta}) = \underline{\Delta}^T \cdot \underline{D} \otimes \underline{D}^T \cdot \underline{\Delta}$$

Finalmente se pueden sustituir estas derivadas en la ecuación para la energía potencial total

$$U + V = \underline{\Delta}^T \cdot \left[ \frac{EI}{2} \int_0^l \underline{D} \otimes \underline{D}^T dx - \frac{N}{2} \int_0^l \underline{C} \otimes \underline{C}^T dx \right] \cdot \underline{\Delta} - \underline{\Delta}^T \cdot \underline{P}$$

Para analizar el equilibrio la ecuación resultante en matricial será

$$\frac{\partial(U + V)}{\partial \underline{\Delta}} = \left[ \frac{EI}{2} \int_0^l \underline{D} \otimes \underline{D}^T dx - \frac{N}{2} \int_0^l \underline{C} \otimes \underline{C}^T dx \right] \cdot \underline{\Delta} - \underline{P} = 0$$

Los productos  $\underline{C} \otimes \underline{C}^T$  y  $\underline{D} \otimes \underline{D}^T$  devolverán matrices  $4 \times 4$ . A partir de las expresiones de los vectores  $\underline{C}$  y  $\underline{D}$  es fácil realizar estos productos y sus integrales, y escribir esta expresión como

$$(\underline{K}_e - N\underline{K}_g) \cdot \underline{\Delta} - \underline{P} = 0$$

Hasta este punto se han dejado de lado los desplazamientos horizontales  $u$  y las fuerzas horizontales  $P_x$ , que no se han considerado en el vector  $\underline{\Delta}$  ni  $\underline{P}$  respectivamente.

Sin embargo, estas fuerzas no dependen del desplazamiento vertical  $v$ , ni las fuerzas verticales y los momentos dependen del desplazamiento horizontal  $u$ , como se puede comprobar de la ecuación matricial a la que se llegó al final de "6.1. Formulación de la matriz de rigidez".

Llegado este momento, pueden volver a introducirse en la ecuación anterior, sin tener que modificar su forma. Y por lo tanto los vectores  $\underline{\Delta}$  y  $\underline{P}$  pasan a ser de dimensión 6, y las matrices elástica  $\underline{K}_e$  y geométrica  $\underline{K}_g$  pasan ahora a ser matrices  $6 \times 6$ , como se indica a continuación.

$$\underline{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}; \underline{K}_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{bmatrix}$$

Las cargas y los desplazamientos son los indicados en la figura 6.2.

$$\underline{P} = [P_{x1} \quad P_{y1} \quad M_1 \quad P_{x2} \quad P_{y2} \quad M_2]^T \quad \underline{\Delta} = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T$$

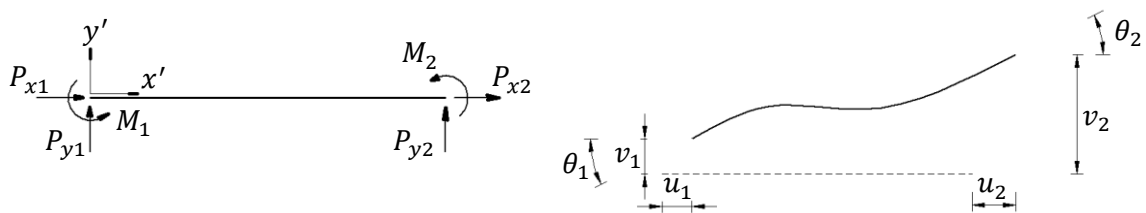


Figura 6.2. Definición de cargas y desplazamientos en los nudos.

Para encontrar la estabilidad

$$\delta^2(U + V) = \delta \underline{\Delta}^T \cdot \frac{\partial^2(U + V)}{\partial \underline{\Delta}^2} \delta \underline{\Delta} = \delta \underline{\Delta}^T \cdot (\underline{K}_e - N \underline{K}_g) \cdot \delta \underline{\Delta} \begin{cases} > 0 & \text{Estable} \\ = 0 & \text{Neutro} \\ < 0 & \text{Inestable} \end{cases} \quad \forall \delta \underline{\Delta}$$

Por lo tanto la carga crítica vendrá dada por

$$\det(\underline{K}_e - N \underline{K}_g) = 0$$

Esto equivale a un problema de autovalores generalizados en  $N$ . Dado que la singularidad de la matriz  $\underline{K}$  depende de  $N$ , que solo afecta a la matriz geométrica, y las filas y columnas de la matriz geométrica correspondientes a los desplazamientos horizontales son 0 (filas y columnas 1 y 4), podrán eliminarse del problema, junto con los desplazamientos impuestos por las condiciones de contorno.

### 6.3. Cálculo matricial de estabilidad – Viga biapoyada

Para la viga biapoyada de la figura 6.3 se tienen las siguientes condiciones de contorno.

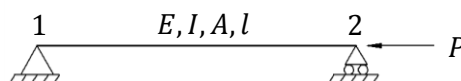


Figura 6.3. Viga biapoyada.

$$u_1 = 0 \quad v_1 = 0 \quad \theta_1 = 0 \quad P_{x2} = -P \quad M_1 = 0 \quad M_2 = 0$$

El sistema de ecuaciones se puede escribir entonces de la forma

$$\underline{P} = \underline{K} \cdot \underline{\Delta} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ M_1 \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Donde  $\underline{K} = \underline{K}_e - N\underline{K}_g$  y por lo tanto  $k_{ij} = k_{eij} - N \cdot k_{gij}$ . Dado que se puede desacoplar el problema de los desplazamientos horizontales, se pueden eliminar las filas y columnas 1 y 4. Debido a los desplazamientos impuestos, se pueden eliminar también las filas y columnas 2 y 5. Entonces la matriz que deberá ser singular es  $\underline{K}^*$

$$\underline{K}^* = \begin{bmatrix} k_{33} & k_{36} \\ k_{63} & k_{66} \end{bmatrix} \rightarrow \det(\underline{K}^*) = 0$$

En definitiva, el determinante siguiente deberá anularse para un valor de  $N$ .

$$\left| \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} - N \begin{bmatrix} \frac{2l}{15} & -\frac{l}{30} \\ -\frac{l}{30} & \frac{2l}{15} \end{bmatrix} \right| = 0$$

Desarrollado, este determinante resulta en la siguiente ecuación

$$\left( \frac{4EI}{l} - \frac{2l}{15}N \right)^2 - \left( \frac{2EI}{l} + \frac{l}{30}N \right)^2 = 0$$

Entonces se obtiene el valor del esfuerzo normal crítico, que para este caso de viga biarticulada es igual a la carga crítica, y se compara con la solución real

$$N_{cr} = P_{cr} = 12 \frac{EI}{l^2} \quad P_{cr R} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \approx 9,8 \frac{EI}{l^2}$$

De nuevo la carga crítica se ha sobreestimado, debido a que se la deformación que se ha supuesto, la ley cúbica del apartado "6.2. Formulación de la matriz de rigidez aproximada" no era la real.

#### 6.4. Cálculo matricial de estabilidad – Viga en voladizo

Para la viga en voladizo de la figura 6.4 se tienen las siguientes condiciones de contorno.

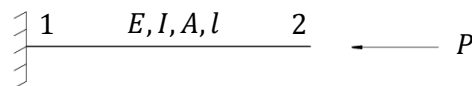


Figura 6.4. Viga en voladizo.

$$u_1 = 0 \quad v_1 = 0 \quad \theta_1 = 0 \quad P_{x2} = -P \quad P_{y2} = 0 \quad M_2 = 0$$

Ahora puede repetirse el mismo procedimiento que en el apartado anterior.

De la misma matriz  $\underline{K}$ , que mantiene la misma forma para todos los elementos y dependen sus valores de las propiedades  $E$ ,  $I$ ,  $A$ , y  $l$  del elemento, de nuevo se eliminan las filas y columnas 1 y 4. Debido a los desplazamientos impuestos, se pueden eliminar también las filas y columnas 2 y 3. Entonces la matriz que deberá ser singular es

$$\det \begin{bmatrix} k_{55} & k_{56} \\ k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{12EI}{l^3} - \frac{6}{5l}N & -\frac{6EI}{l^2} + \frac{1}{10}N \\ -\frac{6EI}{l^2} + \frac{1}{10}N & \frac{4EI}{l} - \frac{2l}{15}N \end{vmatrix} = 0$$

La ecuación resultante y su solución para  $N$ , que dada la configuración del problema coincide con la carga crítica es

$$\frac{3}{20}N^2 - \frac{26EI}{5l^2N} + \frac{12E^2I^2}{l^4} = 0 \Rightarrow N_{cr} = P_{cr} = 2,486 \frac{EI}{l^2}$$

Mientras que a solución real para este problema es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \approx 2,46 \frac{EI}{l^2}$$

### 6.5. Cálculo matricial de estabilidad – Viga empotrada y apoyada

Dada la estructura de la figura 6.5, el caso es casi idéntico al anterior.

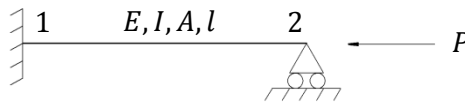


Figura 6.5. Viga empotrada y apoyada.

Ahora habrá una condición de contorno de desplazamiento adicional

$$u_1 = 0 \quad v_1 = 0 \quad \theta_1 = 0 \quad v_2 = 0 \quad P_{x2} = -P \quad M_2 = 0$$

La nueva condición de contorno elimina, además de las filas y columnas 1, 2, 3 y 4 que ya se eliminaban en el caso anterior, la fila y columna 5, y por lo tanto la matriz que deberá hacerse singular se reduce a un único escalar

$$\det[k_{66}] = 0 \Rightarrow \frac{4EI}{l} - \frac{2l}{15}N = 0 \Rightarrow N_{cr} = P_{cr} = 30 \frac{EI}{l^2}$$

Mientras que la solución exacta es

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{0,7}\right)^2 \frac{EI}{l^2} \approx 20,1 \frac{EI}{l^2}$$

La diferencia es de un 50% y del lado de la inseguridad, pues se ha sobreestimado la carga crítica. La solución es tan mala debido a que la función de desplazamientos  $v(x)$  supuesta, que era un polinomio de orden cúbico, no puede aproximar adecuadamente la solución. Si se suponen otros desplazamientos, la matriz geométrica  $\underline{K}_g$  cambiará.

## 6.6. Discretización y ensamblado

No sólo cambiar los desplazamientos supuestos mejorará la solución. Otra forma de hacerlo es aumentando el número de elementos en que se divide la estructura. Tomando el caso anterior, se cambiará la discretización por una con dos elementos, como indica la figura 6.6.

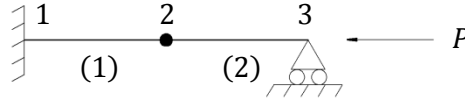


Figura 6.6. Discretización con dos elementos.

Ahora habrá dos matrices elementales  $\underline{K}^e$ , una por elemento, que deberán ensamblarse. Para la barra (1) y para la barra (2) se tendrá, respectivamente

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{11}^1 & \underline{K}_{12}^1 \\ \underline{K}_{21}^1 & \underline{K}_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta}_1 \\ \underline{\Delta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_{12} \\ \underline{P}_{21} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \underline{K}_{22}^2 & \underline{K}_{23}^2 \\ \underline{K}_{32}^2 & \underline{K}_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta}_2 \\ \underline{\Delta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_{23} \\ \underline{P}_{32} \end{bmatrix}$$

El ensamblado consiste físicamente en imponer el equilibrio en los nudos de forma que puedan acoplarse las ecuaciones de cada barra. Tras el proceso de ensamblado la ecuación queda

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{11}^1 & \underline{K}_{12}^1 & 0 \\ \underline{K}_{21}^1 & \underline{K}_{22}^1 + \underline{K}_{22}^2 & \underline{K}_{23}^2 \\ 0 & \underline{K}_{32}^2 & \underline{K}_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta}_1 \\ \underline{\Delta}_2 \\ \underline{\Delta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \\ \underline{P}_3 \end{bmatrix}$$

De la matriz  $\underline{K}$  de dimensiones  $9 \times 9$  se eliminan, por desacoplamiento de los desplazamientos horizontales, las filas y las columnas 1, 4 y 7. Por la condición de empotramiento en el nudo 1 se eliminan las filas y las columnas 2 y 3, y con la condición de apoyo para el nudo 3 se eliminan la fila y la columna 8, por lo tanto el problema de singularidad se convierte en

$$\det \begin{bmatrix} k_{55} & k_{56} & k_{59} \\ k_{65} & k_{66} & k_{69} \\ k_{95} & k_{96} & k_{99} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 192 \frac{EI}{l^3} - \frac{24}{5l} N & 0 & 24 \frac{EI}{l^2} - \frac{1}{10} N \\ 0 & 16 \frac{EI}{l} - \frac{2l}{15} N & 4 \frac{EI}{l} + \frac{l}{60} N \\ 24 \frac{EI}{l^2} - \frac{1}{10} N & 4 \frac{EI}{l} + \frac{l}{60} N & 8 \frac{EI}{l} - \frac{l}{15} N \end{vmatrix} = 0$$

Dado que la normal  $N$  es la misma para ambos elementos. La ecuación final viene dada por

$$-\frac{l}{25} N^3 + \frac{176EI}{15l} N^2 - \frac{4096E^2 l^2}{l^3} N + \frac{12288E^3 l^3}{l^5} = 0$$

Y la normal crítica, que coincide con la carga crítica es

$$N_{cr} = P_{cr} \approx 20,71 \frac{EI}{l^2}$$

Este nuevo valor se aproxima mucho más, el error ahora es un 3%.

### 6.7. Transformación de coordenadas locales a globales

Dada la estructura de la figura 6.7, la simetría garantiza que la normal de las barras sea igual.

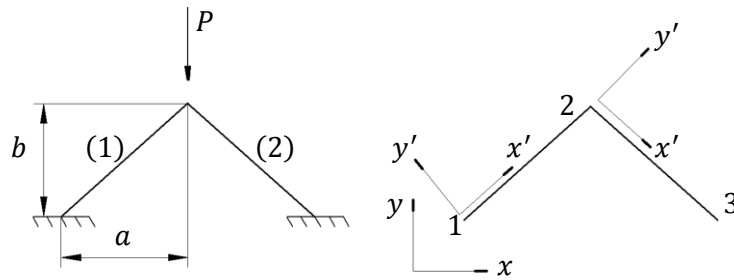


Figura 6.7. Pórtico simétrico. Coordenadas globales y locales.

Las características de la estructura son

$$a = 8 \text{ m} \quad b = 9 \text{ m} \quad EA = 10^5 \text{ N} \quad EI = 10^4 \text{ Nm}^2$$

Las ecuaciones para ambas barras, en coordenadas locales \$x'\$ e \$y'\$ son

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{11}^{1'} & \underline{K}_{12}^{1'} \\ \underline{K}_{21}^{1'} & \underline{K}_{22}^{1'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta}_1' \\ \underline{\Delta}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_{12}' \\ \underline{P}_{21}' \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \underline{K}_{22}^{2'} & \underline{K}_{23}^{2'} \\ \underline{K}_{32}^{2'} & \underline{K}_{33}^{2'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta}_2' \\ \underline{\Delta}_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_{23}' \\ \underline{P}_{32}' \end{bmatrix}$$

Para convertir estas ecuaciones a coordenadas globales basta con encontrar la rigidez en coordenadas globales, y para ello se emplea una matriz de transformación \$\underline{T}\$ que cumpla

$$\underline{K}_{ij}^e = \underline{T}^e \cdot \underline{K}_{ij}^{e'} \cdot \underline{T}^{eT}$$

Esta matriz de transformación es

$$\underline{T}^e = \begin{bmatrix} \cos \alpha^e & -\sin \alpha^e & 0 \\ \sin \alpha^e & \cos \alpha^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde \$\alpha^e\$ es la inclinación del elemento respecto a la horizontal, positiva en sentido contrario al de las agujas del reloj. Finalmente, una vez aplicada la matriz de rotación a todas las matrices de rigidez el sistema quedará

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{11}^1 & \underline{K}_{12}^1 & 0 \\ \underline{K}_{21}^1 & \underline{K}_{22}^1 + \underline{K}_{22}^2 & \underline{K}_{23}^2 \\ 0 & \underline{K}_{32}^2 & \underline{K}_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta}_1 \\ \underline{\Delta}_2 \\ \underline{\Delta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \\ \underline{P}_3 \end{bmatrix}$$

Se pueden eliminar las filas y columnas 1, 2 y 3 por ser nulos los desplazamientos del nodo 1, y también las filas y columnas 7, 8 y 9 por ser nulos los desplazamientos del nodo 3. Sin embargo, en esta ocasión el desplazamiento horizontal del nodo 2 sí que afecta al problema de singularización y no se puede eliminar del problema. Esto es debido a que las barras están inclinadas, y puede comprobarse que tras aplicar la matriz de giro, la fila y la columna correspondiente al desplazamiento horizontal de la matriz geométrica de cualquiera de las dos barras tiene términos diferentes de cero.

Se recomienda encarecidamente resolver estos problemas de forma numérica, y no arrastrar las variables a lo largo de todo el desarrollo. Para este caso la matriz de rigidez es

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 7407,67 & 0 & 618,545 \\ 0 & 9338,85 & 0 \\ 618,545 & 0 & 6643,64 \end{bmatrix} - N \begin{bmatrix} 0,111338 & 0 & 0,149482 \\ 0 & 0,0879709 & 0 \\ 0,149482 & 0 & 9,63328 \end{bmatrix}$$

La ecuación de igualar el determinante de esta matriz a cero es

$$-0,0923877N^3 + 16134,2N^2 - 6,75901 \cdot 10^8 N + 4,5603 \cdot 10^{11} = 0$$

Y la solución de valor más pequeño de esta ecuación es la solución aproximada

$$N_{cr} = 685,9 \text{ N}$$

La carga crítica no es en este caso el esfuerzo axial crítico, sino que debido a la inclinación de las barras ésta será

$$P_{cr} = 2N_{cr} \sin \alpha = 1025,3 \text{ N}$$

### 6.8. Esfuerzos normales dependientes del elemento

Hasta ahora en todas las estructuras los elementos compartían el mismo valor de esfuerzo normal, lo que permitía aislarlo en la ecuación y encontrar su valor crítico. En el caso de que el esfuerzo normal no sea igual para todos los elementos se deberá proceder de forma ligeramente diferente.

El procedimiento consiste en resolver primero el problema elástico, es decir

$$\underline{\underline{K}}_e \cdot \underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{P}}$$

Una vez resueltos los desplazamientos, se puede encontrar la normal a la que se ve sometido cada elemento en función de  $P$ , de la forma  $N^e = a^e P$ . Después de esto, se pueden introducir los coeficientes  $a^e$  en las matrices geométricas de cada elemento  $\underline{\underline{K}}_g^e$ , es decir que para cada elemento la matriz de rigidez en coordenadas globales será

$$\underline{\underline{K}}^e = \underline{\underline{K}}_e^e - N^e \cdot \underline{\underline{K}}_g^e = \underline{\underline{K}}_e^e - a^e P \cdot \underline{\underline{K}}_g^e = \underline{\underline{K}}_e^e - P \cdot \underline{\underline{K}}_{gg}^e$$

Y una vez se ensamblen las matrices de rigidez de todos los elementos se obtiene

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}_e - P \underline{\underline{K}}_{gg}$$

E igualando el determinante de esta matriz de rigidez a cero puede hallarse directamente la carga crítica  $P_{cr}$ .



## 7. Estructuras aeroespaciales

### 7.1. Introducción a las estructuras aeroespaciales

Finalmente en esta última parte del curso se estudiará de forma más específica la teoría de estructuras aplicada al sector aeroespacial. Por lo general las estructuras utilizadas en aeronáutica son de sección delgada, como por ejemplo las paredes de un fuselaje o de un tanque de combustible.

El análisis que se presentará a continuación se realiza durante las fases iniciales del proyecto, mientras que en fases de diseño detallado el estudio se realiza a través de cálculo numérico. Sin embargo es necesario discriminar los resultados obtenidos mediante resolución numérica con un estudio aproximado.

### 7.2. Factor de carga

El estado límite de carga es el máximo valor de carga al que se espera que se vea sometida la estructura en servicio. Generalmente en el campo aeroespacial se requiere que no existan deformaciones permanentes arriesgadas, ni que las deformaciones que se produzcan impidan el correcto funcionamiento de los sistemas de la aeronave.

El estado último de carga es el último valor de carga para el cual se requiere que no se produzca un fallo catastrófico, al menos durante una cantidad de tiempo determinada.

El margen de seguridad se define como la relación entre la carga última y la carga límite, con factor de seguridad incluido.

$$MS = \frac{P_u}{\gamma \cdot P_l} - 1$$

El margen de seguridad disminuye a medida que pasan los ciclos de carga, debido a la fatiga. Por ello se inspecciona la estructura con el doble de frecuencia que la reducción a cero de este margen de seguridad.

Las cargas límite y última se obtienen analizando diferentes situaciones de vuelo. Por ejemplo, para analizar las cargas a las que se someterá debido a las maniobras que realice la aeronave se define una envolvente de las maniobras que realizará, y se determinan las cargas que supondrán las maniobras más bruscas. La mayor parte de las cargas que se considerarán serán debidas a efectos dinámicos, pues estas cargas serán mayores que las máximas que pueda sufrir la estructura en estático.

Algunos factores de carga límites son

	$n_{min}$	$n_{max}$
<b>Transporte comercial</b>	-1	+2,5
<b>Aviación general</b>	-1	+3,5
<b>Superioridad aérea</b>	-3	+9
<b>Aviación acrobática</b>	-12	+12

### 7.3. Comportamiento frente a ráfaga

La norma indica diferentes velocidades de ráfaga (*gust*), para cerca del suelo y baja velocidad (*rough air*), para vuelo de crucero (CRZ) y para la velocidad de diseño.

$$V_{RA}^G = 75 \text{ ft/s} \quad V_{CRZ}^G = 50 \text{ ft/s} \quad V_D^G = 25 \text{ ft/s}$$

Una aproximación para determinar la variación del factor de carga debido a ráfaga es a partir del aumento del ángulo de ataque que provoca.

$$\Delta\alpha = \frac{V^G}{U_\infty} \Rightarrow \Delta C_L = \frac{V^G}{U_\infty} C_{L\alpha} \Rightarrow \Delta n = \frac{\Delta L}{W} k = \frac{\rho U_\infty V^G S C_{L\alpha}}{2W} k = \frac{\rho C_{L\alpha} U_\infty}{2} \cdot \frac{V^G}{W/S} \cdot k$$

Donde  $k$  es el factor de alivio, que tiene en cuenta que la ráfaga es un fenómeno transitorio y por lo tanto la sustentación no aumenta de forma instantánea, sino que inicialmente es menor, y además tiene en cuenta que la velocidad cambiará al cambiar la trayectoria.

Se supone que la aeronave pasará la mayor parte del tiempo volando a  $n = 1$ , y por lo tanto se considera que este es el factor de carga inicial. Para cada velocidad de ráfaga característica de se definió anteriormente se dibuja entonces una línea como muestra la figura 7.1.

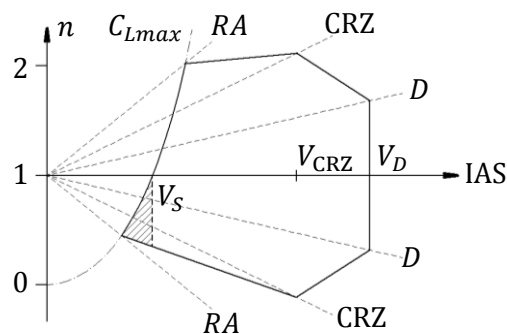


Figura 7.1. Envoltura de ráfaga.

### 7.4. Teorema de Castigliano

En una estructura sobre la que se aplica un sistema de cargas externas se almacena una cantidad de energía interna de deformación  $U$  debido al trabajo de este sistema de cargas

$$\Delta U = \int_a^b \vec{P}_i \cdot d\vec{u}_i$$

Para un pequeño desplazamiento se puede escribir

$$\delta U = \sum_i \vec{P}_i \cdot \delta\vec{u}_i$$

Puede considerarse de forma matemática una energía de deformación complementaria para un desplazamiento constante y un pequeño incremento de carga

$$\delta U^* = \sum_i \delta\vec{P}_i \cdot \vec{u}_i$$

Estas pequeñas variaciones de energías internas, así como la variación total, pueden interpretarse como muestra la figura 7.2 a la izquierda.

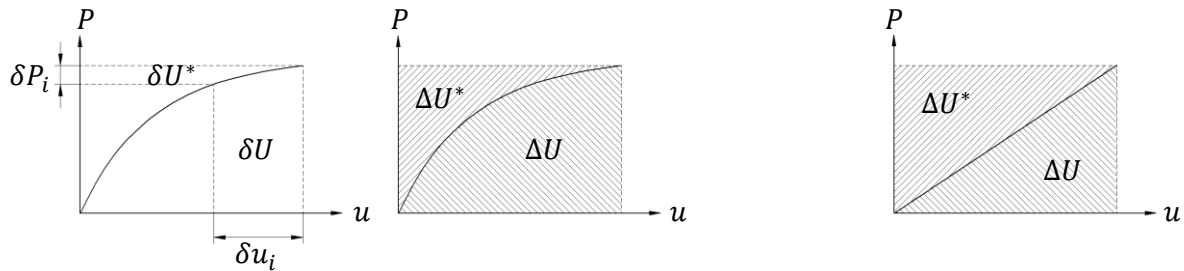


Figura 7.2. Energías de deformación y complementaria, para un material no lineal (izquierda) y para un material lineal (derecha).

En el caso de una estructura lineal la energía de deformación es igual a la energía complementaria de deformación  $\Delta U = \Delta U^*$ , como se aprecia en la figura 7.2 a la derecha.

Entonces para una estructura lineal se podrán encontrar los desplazamientos en cualquier punto  $u_i$ , a partir de la carga aplicada en ese punto  $P_i$  en la dirección de  $u_i$ , como

$$u_i = \frac{dU^*}{dP_i} = \frac{dU}{dP_i}$$

Éste es el segundo teorema de Castigliano.

### 7.5. Energía de deformación

A partir de aquí se ha de encontrar la energía de deformación a partir del trabajo producido por las fuerzas internas. Por lo general para un material lineal  $k$  con una carga externa  $P$  el trabajo realizado por esta carga que provoca un desplazamiento  $u$  es

$$P = ku \quad dW = P du = ku du \Rightarrow \Delta W = \frac{1}{2}ku^2 = \frac{1}{2}Pu = \frac{P^2}{2k}$$

Para calcular los trabajos de las fuerzas externas se aplica una de dos posibles hipótesis sobre la estructura:

- Una dimensión de la estructura mayor que las otras dos (viga).
- Una dimensión de la estructura menor que las otras dos (placa).

Estructuras más complejas pueden dividirse entonces en piezas que cumplen alguna de estas dos hipótesis.

En el caso de la viga, sus propiedades quedan caracterizadas por  $EI$  para la flexión producida por el momento flector  $M$ ,  $EA$  para la tracción producida por el esfuerzo axial  $N$ ,  $GJ$  para la torsión producida por el momento torsor  $T$ , y  $GA_c$  para la cortadura producida por el esfuerzo cortante  $Q$ .

El trabajo producido por un momento flector en una rebanada  $dl$  que gira un ángulo  $\theta$  como muestra la figura 7.3 es

$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{M}{EI} \quad dW = \frac{M\theta}{2} = \frac{M^2}{2EI} dl$$

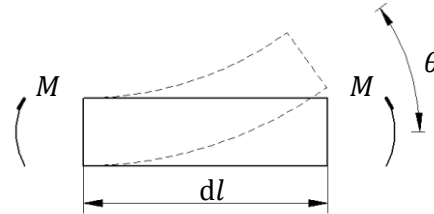


Figura 7.3. Viga sometida a flexión.

Este trabajo es igual a la variación de energía interna que produce. Puede hacerse lo mismo para los demás tipos de carga y desplazamientos generalizados, y la expresión general para la energía interna de una viga de longitud  $L$  es

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{EA} + \frac{T^2}{GJ} + \frac{Q^2}{GA_c} \right) dl$$

Para un panel de espesor  $t$ , la carga que se aplica es principalmente de cortadura, como se muestra en la figura 7.4, donde la relación entre las tensiones tangenciales y el ángulo de cortadura es  $\tau = G\gamma$ .

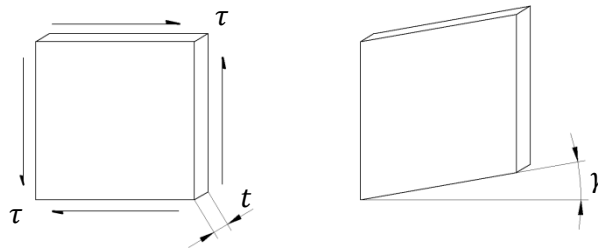


Figura 7.4. Panel delgado sometido a cortadura.

La energía interna debido al esfuerzo cortante aplicado sobre el panel es

$$dW = \frac{\tau t dy \cdot \gamma dx}{2}$$

El producto  $\tau t$  se denomina flujo cortante  $q$ , y resulta muy útil trabajar con él debido a ciertas propiedades que cumple, como se verá más adelante. De este modo se puede escribir

$$\left. \begin{array}{l} \tau = G\gamma \\ q = \tau t \end{array} \right\} \Rightarrow dW = \frac{q^2}{2Gt} dx dy \quad U = \frac{1}{2} \iint_S \frac{q^2}{Gt} dx dy$$

Y de forma general la energía de deformación será

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{EA} + \frac{T^2}{GJ} + \frac{Q^2}{GA_c} \right) dl + \frac{1}{2} \iint_S \frac{q^2}{Gt} dx dy$$

## 7.6. Método de la carga unitaria

Como ya se ha visto, para una estructura lineal se podrán encontrar los desplazamientos en cualquier punto  $u_i$ , a partir de la carga aplicada en ese punto  $P_i$  en la dirección de  $u_i$ , como

$$u_i = \frac{dU}{dP_i}$$

La derivada de la energía interna puede encontrarse rápidamente sin necesidad de integrar, utilizando la regla de la cadena.

$$\frac{dU}{dP_i} = \int_0^L \left( \frac{M}{EI} M' + \frac{N}{EA} N' + \frac{T}{GJ} T' + \frac{Q}{GA_c} Q' \right) dl + \iint_S \frac{q}{Gt} q' dx dy$$

Donde, por ejemplo,  $M' = dM/dP_i$  se puede calcular como  $\Delta M/\Delta P_i$ , que a su vez se puede calcular como el momento producido por una carga unitaria  $P_i = 1$  eliminando todas las demás cargas.

Sirva de ejemplo la viga en voladizo de la figura 7.5 con una carga  $P$  aplicada en el extremo.

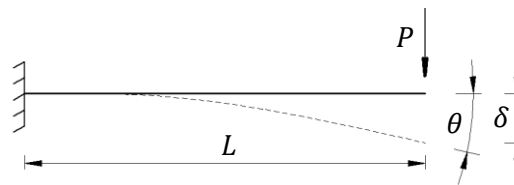


Figura 7.5. Viga en voladizo.

El giro  $\theta$  del extremo se puede calcular aplicando un momento ficticio  $M^F$  en ese punto, y particularizando para el caso en que  $M^F = 0$ .

$$\theta = \left. \frac{\partial U^*}{\partial M^F} \right|_{M^F=0}$$

Considerando además que la estructura se comporta de forma lineal.

$$\theta = \left. \frac{\partial U^*}{\partial M^F} \right|_{M^F=0} = \left. \frac{\partial U}{\partial M^F} \right|_{M^F=0} = \int_0^L \frac{M}{EI} M' dl$$

La ley de momentos flectores es  $M = Pl$ . La derivada  $M'$  se puede calcular como la ley de momentos flectores resultante de un estado de cargas con todas las cargas nulas y una carga unitaria en el punto de interés, en este caso  $M^F = 1$ .

$$M' = \frac{\partial M}{\partial M^F} = \frac{\Delta M}{\Delta M^F} = M|_{M^F=1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \int_0^L \frac{M}{EI} M' dl = \int_0^L \frac{Pl}{EI} \cdot 1 dl = \frac{PL^2}{2EI}$$

En el caso de querer obtener la flecha  $\delta$  se puede proceder de la misma manera, pero ahora con la carga  $P$  que ya existe

$$\delta = \int_0^L \frac{M}{EI} M' dl = \int_0^L \frac{Pl}{EI} \cdot l dl = \frac{PL^3}{3EI}$$

### 7.7. Cargas sobre una viga

Para una viga sometida a cargas los ejes de coordenadas que se emplearán a partir de ahora están definidos en la figura 7.6.

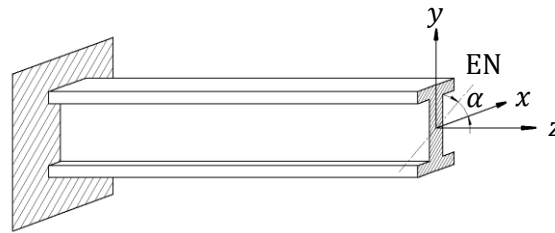


Figura 7.6. Definición de los ejes de coordenadas para una viga.

Donde EN es el eje neutro y  $\alpha$  es el ángulo que forma respecto a  $x$ . Se tendrá en cuenta también la hipótesis de Navier – Bernoulli, es decir, las caras de la rebanada permanecen planas y perpendiculares a la directriz.

Para esta sección, su tensión normal  $\sigma_z$  será diferente en cada punto  $(x, y)$  de la sección, y según los ejes definidos anteriormente, será

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot x$$

Donde los momentos de área  $I_x$  e  $I_y$  y el producto de área  $I_{xy}$  son

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad I_{xy} = \int_A xy dA$$

En los ejes principales de inercia el producto de área será nulo. Fuera de estos ejes la expresión anterior sería

$$\sigma_z = \frac{M_x I_y + M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \cdot y - \frac{M_y I_x + M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \cdot x$$

Pero no es habitual utilizar esta última expresión, sino utilizar la simplificada pero con unos momentos equivalentes  $\bar{M}_x$  y  $\bar{M}_y$ , de forma que la expresión queda

$$\sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{I_x} \cdot y - \frac{\bar{M}_y}{I_y} \cdot x$$

Relacionando ambas expresiones se puede obtener el valor de los momentos equivalentes.

$$\bar{M}_x = \frac{M_x + M_y \frac{I_{xy}}{I_y}}{1 - \frac{I_{xy}^2}{I_x I_y}} \quad \bar{M}_y = \frac{M_y + M_x \frac{I_{xy}}{I_x}}{1 - \frac{I_{xy}^2}{I_x I_y}}$$

Por lo tanto, si los ejes son tales que  $I_{xy} = 0$  se trabaja con la expresión simplificada, pero si son tales que  $I_{xy} \neq 0$  entonces también se puede emplear la misma expresión pero con los momentos equivalentes.

El eje neutro EN es el lugar geométrico de los puntos que no desarrollan ninguna tensión normal. Puede encontrarse entonces igualando a cero la expresión de la tensión normal, es decir, la ecuación del eje neutro es

$$\frac{\bar{M}_x}{I_x} \cdot y = \frac{\bar{M}_y}{I_y} \cdot x \quad \frac{y}{x} = \tan \alpha = \frac{\bar{M}_y I_x}{\bar{M}_x I_y}$$

Si además de considerar los momentos de flexión se considera una carga axial, la tensión normal se verá modificada por igual en toda la sección.

$$\sigma_z = \frac{\bar{M}_x}{I_x} \cdot y - \frac{\bar{M}_y}{I_y} \cdot x + \frac{N}{A}$$

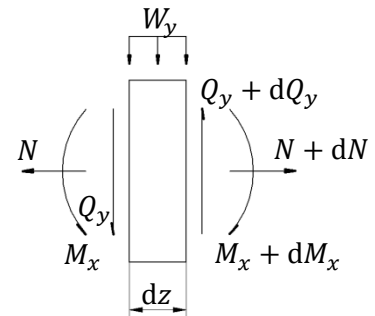


Figura 7.7.  
Definición de esfuerzos sobre la rebanada.

Y el eje neutro dejaría de pasar por el centro de área, pero mantendría la misma inclinación.

Es importante conocer también la variación de los esfuerzos flectores a lo largo de la viga. Considerando ahora una rebanada como muestra la figura 7.7, el equilibrio de momentos en  $x$  de esta rebanada es

$$M_x - (M_x + dM_x) + Q_y \frac{dz}{2} + (Q_y + dQ_y) \frac{dz}{2} = 0 \Rightarrow -dM_x + Q_y dz = 0$$

Donde se ha despreciado el momento de segundo orden debido a  $dQ_y dz$ . El equilibrio de fuerzas en  $y$  resulta en

$$-Q_y + Q_y + dQ_y + W_y dz = 0 \Rightarrow dQ_y + W_y dz = 0$$

De estas dos ecuaciones puede deducirse entonces

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz} \quad W_y = -\frac{dQ_y}{dz}$$

Puede hacerse el mismo análisis para los momentos en  $y$  y las fuerzas en  $x$ , obteniendo

$$Q_x = -\frac{dM_y}{dz} \quad W_x = -\frac{dQ_x}{dz}$$

Estas expresiones son válidas para los momentos reales, pero no para los momentos equivalentes que se habían definido anteriormente. Para aplicarlas con los momentos equivalentes hay que definir también unos cortantes equivalentes que se pueden obtener derivando las expresiones de los momentos equivalentes.

$$\bar{Q}_x = -\frac{d\bar{M}_y}{dz} \quad \bar{Q}_y = \frac{d\bar{M}_x}{dz} \quad \bar{Q}_x = \frac{-Q_x + Q_y \frac{I_{xy}}{I_x}}{1 - \frac{I_{xy}^2}{I_x I_y}} \quad \bar{Q}_y = \frac{Q_y - Q_x \frac{I_{xy}}{I_y}}{1 - \frac{I_{xy}^2}{I_x I_y}}$$

Igualmente se puede proceder para los esfuerzos distribuidos.

### 7.8. Cargas sobre una placa

Las placas son estructuras de pared delgada que soportan principalmente esfuerzos tangenciales. Se realizará entonces la hipótesis de que soportan exclusivamente este tipo de carga, lo que conlleva esfuerzos cortantes y momentos torsores, mientras que serán las vigas las que soporten los momentos de flexión y los esfuerzos normales.

Considérese la placa plana de la figura 7.8 a la izquierda. Se despreciará la variación de los esfuerzos en el espesor  $t$ . Para una sección abierta a torsión la distribución varía notablemente en el espesor, pero tiene una rigidez a torsión muy baja, de modo que no es una sección de interés en una estructura aeroespacial. En las secciones cerradas se cumple aceptablemente esta propiedad.

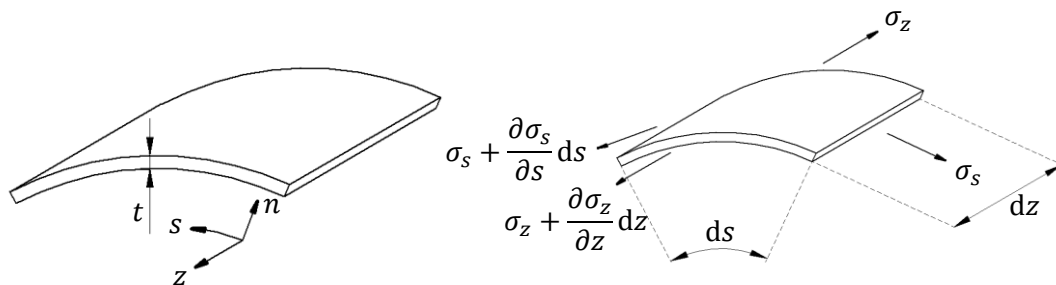


Figura 7.8. Placa de pared delgada.

Las tensiones que aparecerán en un elemento diferencial  $ds dz$  de la placa son las mostradas en la figura 7.8 a la derecha.

No se considera la carga cortante que se podría producir en las superficies amplias de la placa, pues se suponen muy inferiores a los esfuerzos de presión. Esto implica que las tensiones tangenciales sean nulas en estas superficies, incluyendo en los bordes. Por equilibrio interno, en los bordes de las caras delgadas también serán nulas, y como se ha especificado que no variarán con el espesor, entonces serán nulas en todas las caras.

En lugar de utilizar las tensiones tangenciales  $\tau$ , se trabajará habitualmente con el flujo cortante  $q = \tau t$ . No se consideran las variaciones de  $q$  a lo largo de una cara, puesto que serán idénticas en la cara opuesta, pero de sentido contrario, y por lo tanto se cancelarán. Los flujos cortantes que quedarán serán entonces los que se muestran en la figura 7.9.

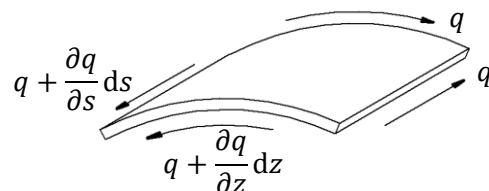


Figura 7.9. Flujos cortantes.

El equilibrio de fuerzas en la dirección  $z$  queda

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz t ds + \frac{\partial q}{\partial s} dz ds = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial q}{\partial s} = -t \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$



Y en la dirección  $s$

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial s} ds t dz + \frac{\partial q}{\partial z} dz ds = 0 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial z} = -t \frac{\partial \sigma_s}{\partial s}$$

Se puede introducir ahora la expresión para la tensión normal  $\sigma_z$

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x + \frac{N}{A}$$

El término debido a las cargas axiales puede dejarse de lado, pues las tensiones que provoca no varían con  $z$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{y}{I_x} \frac{dM_x}{dz} - \frac{x}{I_y} \frac{dM_y}{dz} = \frac{Q_y y}{I_x} + \frac{Q_x x}{I_y}$$

Y por lo tanto

$$\frac{\partial q}{\partial s} = -t \left( \frac{Q_y}{I_x} y + \frac{Q_x}{I_y} x \right)$$

Los términos  $Q_y/I_x$  y  $Q_x/I_y$  son constantes en  $s$ , de modo que se puede integrar

$$q(s) - q(0) = - \int_0^s \left( \frac{Q_y t}{I_x} y(s) + \frac{Q_x t}{I_y} x(s) \right) ds$$

Para conocer el flujo de cortadura en un punto cualquiera  $q(s)$  es necesario conocerlo en al menos un punto  $q(0)$ . Por ejemplo, allí donde la sección esté abierta se conoce su valor, y es cero. Sin embargo se ha comentado ya que la sección abierta no soporta los esfuerzos a torsión y en la que además aparece una distribución a lo largo del espesor. Y para el caso de una sección cerrada es difícil encontrar un punto donde el flujo cortante sea conocido. Por lo tanto un modo de proceder es encontrar la solución para la misma sección, pero dejarla abierta en algún punto, y añadir los términos de la solución particular que soporta la torsión.

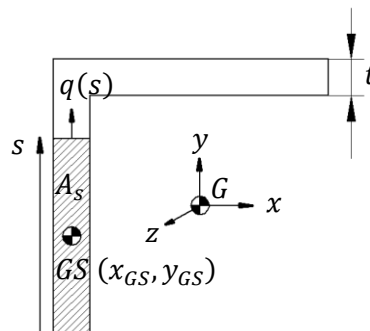


Figura 7.10. Flujo cortante en un punto de una sección.

Para la sección abierta de la figura 7.10, se puede calcular el flujo cortante en el punto  $s$  como

$$q(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \int_0^s y(s) t ds - \frac{Q_x}{I_y} \int_0^s x(s) t ds = -\frac{Q_y}{I_x} \int_{A_s} y(s) dA - \frac{Q_x}{I_y} \int_{A_s} x(s) dA$$

Estas últimas integrales son los productos de inercia de la sección de forma que en lugar de realizar el cálculo de la integral se puede hacer

$$q(s) = -\frac{Q_y}{I_x} A_s y_{GS} - \frac{Q_x}{I_y} A_s x_{GS}$$

Esto sólo es válido si no hay torsión en la sección. Para ello, los esfuerzos cortantes  $Q_x$  y  $Q_y$  deben estar aplicados en el centro de cortadura  $(x_{CC}, y_{CC})$ .

### 7.9. Centro de cortadura

El centro de cortadura es una propiedad geométrica de la sección, lo que permite calcular su posición de forma instantánea en algunos casos sencillos, por ejemplo aprovechando las simetrías de la sección. También puede verse el centro de cortadura como el punto respecto al cual la distribución de efectos cortantes no produce ningún momento.

La fuerza neta debida al flujo cortante deberá ser igual a la resultante de  $Q_x$  y  $Q_y$  en ese punto, y por lo tanto también lo serán los momentos que produzcan respecto a cualquier punto  $P = (x_p, y_p)$  arbitrario.

$$-Q_x(y_{CC} - y_p) + Q_y(x_{CC} - x_p) = M_p^q$$

Donde  $M_p^q$  es el momento debido a la distribución íntegra de flujo cortante  $q$  respecto al punto  $P$ . De cualquier modo, resulta más sencillo calcularlo en un punto estratégico como el origen. Lo que se hace habitualmente para encontrar  $x_{CC}$  y  $y_{CC}$  es aplicar primero únicamente una carga  $Q_y$  arbitraria, con  $Q_x = 0$ , obtener la distribución de cortante debida a esta carga, e igualando el momento que produce con el de la carga  $Q_y$  respecto a un punto cualquiera se obtiene  $x_{CC}$ . Posteriormente se aplica únicamente una carga  $Q_x$  arbitraria, con  $Q_y = 0$ , se encuentra la distribución de cortante debida a esta carga, y finalmente se encuentra  $y_{CC}$ .

### 7.10. Secciones reforzadas

Habitualmente las estructuras empleadas en aeronáutica son una combinación de vigas, llamadas normalmente cordones o elementos rigidizadores, y paneles de pared delgada. Los cordones confieren estabilidad a las placas delgadas, puesto que impiden que el pandeo se propague a zonas de la placa separadas por estos rigidizadores. Además son los que soportan principalmente los esfuerzos normales.

Para calcular el comportamiento a flexión y a tracción se desprecia la sección de las paredes delgadas, y se considera una sección de los rigidizadores ligeramente mayor a la que realmente tienen. En el caso de que una sección real no posea rigidizadores deberá calcularse una sección equivalente que mantenga aproximadamente las propiedades de la sección.

Al despreciar la sección de las placas el cálculo de algunas propiedades se reduce a sumar las contribuciones de los cordones.

$$x_{CG} = \frac{\sum A_i x_{CGi}}{\sum A_i} \quad I_x = \sum A_i y_i^2 \quad \sigma_{zi} = \frac{M_x}{I_x} y_i - \frac{M_y}{I_y} x_i$$

Para una estructura idealizada como una combinación de paneles y cordones, puede calcularse el salto del flujo cortante en un cordón que separa dos placas como

$$A \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz + (q_2 - q_1) dz = 0$$

$$q_2 - q_1 = -A \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \right) = -A \left( \frac{Q_y}{I_x} y + \frac{Q_x}{I_y} x \right)$$

Donde  $I_x$  e  $I_y$  contabilizan únicamente el efecto de los cordones. Para cada panel el esfuerzo cortante será constante, pues se considera que no soportan esfuerzos normales, y cada vez que cruza un cordón, que es el elemento que los soporta, cambiará según la expresión anterior.

Para una sección que no tenga cordones deberá encontrarse una sección idealizada con unos cordones cuya área debe hacer que la sección idealizada trabaje de forma similar a la real. Si el elemento real trabaja a flexión y cortante es interesante mantener la inercia de la sección, mientras que si trabaja a tracción tiene más interés mantener su área. Cabe recordar que la chapa idealizada solo trabaja a cortadura y no contribuye al momento de inercia.

Tómese por ejemplo la sección en forma de C de la figura 7.11, de espesor  $t$  y que se ha idealizado mediante 4 cordones, en este caso de igual área  $A$ , pero podrían haber sido de áreas diferentes.

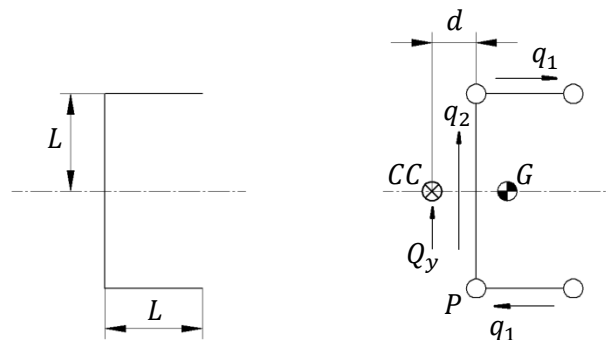


Figura 7.11. Idealización de una sección en forma de C.

Para esta sección el centro de cortadura  $CC$  estará sobre el eje de simetría horizontal, y para encontrar su posición horizontal sobre este eje, será necesario suponer una fuerza cortante vertical  $Q_y$ .

Debido a la antisimetría de cargas, los flujos superior e inferior son de igual módulo  $q_1$ , pero de sentidos opuestos. Además, aunque no es necesario conocerlo, se puede intuir directamente que  $q_2 = Q_y/2L$ . Para calcular los momentos se empleará el punto  $P$ .

$$M_P = Q_y \cdot d = q_1 L \cdot 2L$$

El flujo cortante puede calcularse fácilmente desde el panel inferior.

$$q_1 = -A \frac{Q_y}{I_x} y = -A \frac{Q_y}{4AL^2} (-L) = \frac{Q_y}{4L}$$

Finalmente

$$d = \frac{2L^2 q_1}{Q_y} = \frac{L}{2}$$

Para el caso en que se tenga una sección cerrada de la que no se conozca a simple vista ningún punto que tenga flujo cortante nulo, se tomará un punto arbitrario como origen de flujos cortantes, y la constante de integración que aparezca será precisamente el flujo cortante en ese punto. Tomando como ejemplo la sección de la figura 7.12, se puede calcular el flujo cortante por superposición de una sección abierta en el punto 0 que se ha tomado como origen, y por lo tanto con  $q_a(0) = 0$ , más una sección cerrada con un flujo cortante constante  $q_c = \text{cte}$ , es decir, el flujo cortante será  $q(s) = q_a(s) + q_c$ .

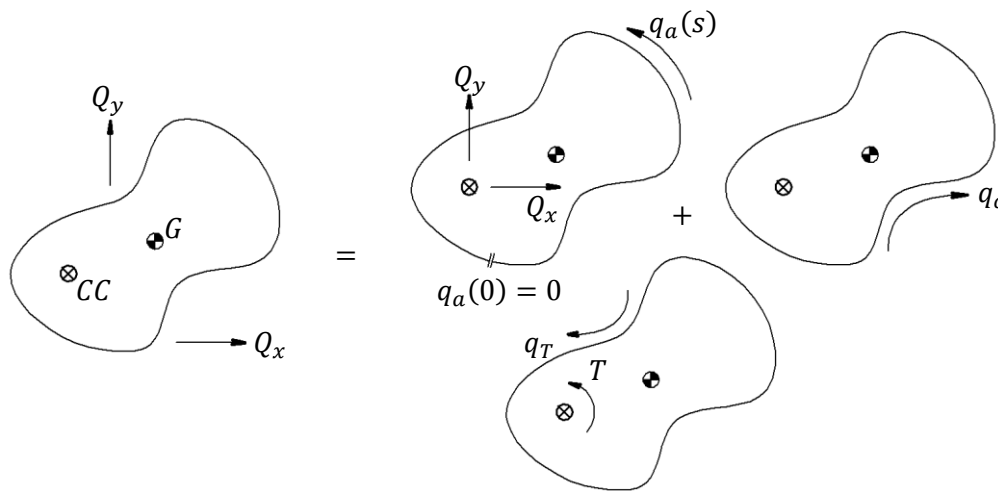


Figura 7.12. Superposición de flujos cortantes.

Además se ha considerado que la carga no tiene por qué estar aplicada en el centro de cortadura, de forma que se debe superponer la carga aplicada sobre el centro de cortadura con el momento torsor  $T$  que genera respecto a ese punto.

Suponiendo que la sección es cerrada, porque si fuese abierta no podría soportar el momento torsor, el flujo cortante debido exclusivamente a este momento será constante a lo largo de la sección completa, y puede calcularse como muestra la figura 7.13.

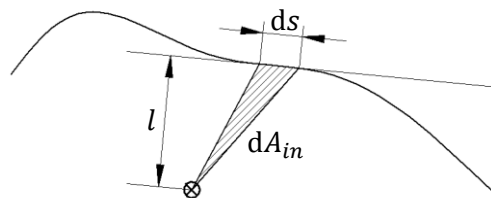


Figura 7.13. Flujo cortante debido al momento torsor.

$$dA_{in} = \frac{l ds}{2} \quad dM = q_T l ds \Rightarrow T = \oint q_T l ds = \int q_T 2 dA_{in} = 2A_{in} q_T$$

Cuando se tenga una sección cerrada con una carga aplicada en un punto cualquiera, se superpondrá como un momento torsor que genera un flujo cortante constante  $q_T$ , y una carga igual aplicada sobre el centro de cortadura, dividida a su vez en una sección abierta equivalente que generará una distribución de esfuerzos cortantes  $q_a(s)$  y otro flujo cortante de valor constante  $q_c$ .

Entonces el momento respecto a un punto cualquiera  $P$  debido al flujo cortante total deberá ser igual al producido por las cargas  $Q$ .

$$M_{PQ} = M_{Pq_a} + 2A_{in}q_0$$

Donde  $q_0$  es la combinación del flujo cortante debido a  $q_c$  y a  $q_T$ , que son constantes. Un ejemplo podría ser el que se presenta en la figura 7.14, con una estructura idealizada con cuatro cordones de área  $A$  y cuatro paneles de espesor  $t$ .

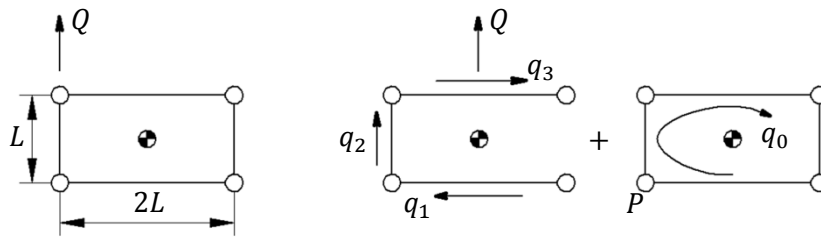


Figura 7.14. Sección sometida a cortadura.

La carga  $Q$  es antisimétrica respecto al eje horizontal. Abriendo la estructura por el panel derecho, el flujo cortante en el único panel vertical que queda deberá ser  $Q/L$ , y el flujo  $q_1$  será, considerando el salto desde el panel que se ha abierto con  $q = 0$  hasta el panel inferior

$$q_1 = -A \frac{Q_y}{I_x} y = -A \frac{Q}{4A \left(\frac{L}{2}\right)^2} \left(-\frac{L}{2}\right) = \frac{Q}{2L}$$

Puede comprobarse que, efectivamente, para el panel vertical y para el superior quedaría

$$q_2 = q_1 - A \frac{Q_y}{I_x} y = \frac{Q}{2L} - A \frac{Q}{4A \left(\frac{L}{2}\right)^2} \left(-\frac{L}{2}\right) = \frac{Q}{L}$$

$$q_3 = q_2 - A \frac{Q_y}{I_x} y = \frac{Q}{L} - A \frac{Q}{4A \left(\frac{L}{2}\right)^2} \frac{L}{2} = \frac{Q}{2L}$$

Para el flujo constante  $q_0$  es muy cómodo tomar los momentos respecto al punto  $P$  indicado.

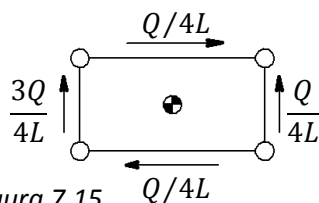


Figura 7.15.

$$M_{PQ} = M_{Pq_a} + 2A_{in}q_0 \Rightarrow 0 = q_3 \cdot 2L \cdot L + 2 \cdot 2L^2 \cdot q_0$$

$$q_0 = -\frac{Q}{4L}$$

Los flujos totales se muestran en la figura 7.15.

### 7.11. Torsión y giro

El centro de cortadura se ha definido como el punto donde, una vez aplicada la carga, no se produce torsión, de forma que puede encontrarse su posición igualando a cero el momento torsor provocado por una carga situada en ese punto.

Pero la sección, por lo general, se deforma, la rotación no es sencilla.

Una cuaderna puede deformarse fuera de su plano, pero no cambiará su forma, que es una deformación en su propio plano, pues posee una gran rigidez en ese plano.

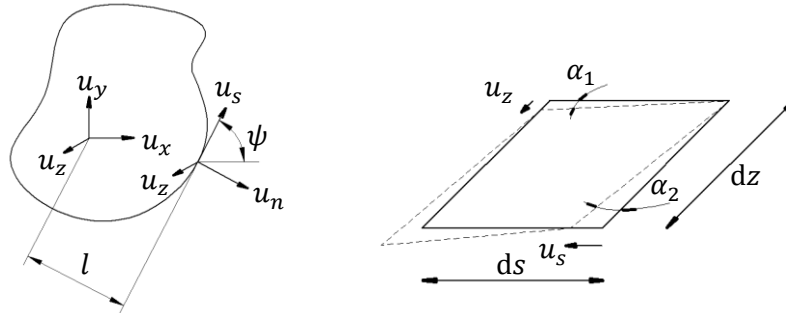


Figura 7.16. Desplazamientos de la sección.

Se supone una sección como la de la figura 7.16 que dentro de su plano  $x, y$  puede rotar un ángulo  $\theta$  y trasladarse como un sólido rígido  $u_x, u_y$ , y además podrá tener un movimiento  $u_z$  en la dirección  $z$  perpendicular a su plano. El movimiento de un punto de la chapa puede descomponerse en coordenadas intrínsecas como  $u_s, u_n, u_z$ , en función de la posición  $s$  del punto. El desplazamiento tangencial de un punto cualquiera será la parte debida a la traslación más la debida a la rotación.

$$u_s = u_x \cos \psi + u_y \sin \psi + \theta l$$

Recordando que el material es lineal, elástico e isótropo, se cumplirá  $\tau = G\gamma$ , donde la distorsión angular  $\gamma$  es la variación del ángulo que forman dos líneas que inicialmente son perpendiculares.

La distorsión angular  $\gamma$  será entonces, considerando ángulos pequeños

$$\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial u_s}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial s}$$

El flujo cortante valdrá entonces

$$q = \tau t = Gt\gamma = Gt \left( \frac{du_x}{dz} \cos \psi + \frac{du_y}{dz} \sin \psi + l \frac{d\theta}{dz} + \frac{\partial u_z}{\partial s} \right)$$

Si se integra esta expresión a lo largo de la sección

$$\int_0^s \frac{q}{Gt} ds = \int_0^s \frac{du_x}{dz} \cos \psi ds + \int_0^s \frac{du_y}{dz} \sin \psi ds + \int_0^s l \frac{d\theta}{dz} ds + \int_0^s \frac{\partial u_z}{\partial s} ds$$

Integrando para todo el perímetro se cancelan muchas de estas integrales, pues al dar la vuelta a todo el perímetro el punto de partida y el final tienen el mismo desplazamiento.

$$\oint \frac{du_x}{dz} \cos \psi \, ds = \frac{du_x}{dz} \oint \cos \psi \, ds = \frac{du_x}{dz} \oint dx = 0 \quad \oint \frac{du_y}{dz} \sin \psi \, ds = 0$$

$$\oint \frac{\partial u_z}{\partial s} \, ds = 0$$

Finalmente

$$\oint \frac{q}{Gt} \, ds = \frac{d\theta}{dz} \oint l \, ds = 2A_{in} \frac{d\theta}{dz}$$

El momento torsor  $T$  define la rigidez a torsión  $J$  como

$$T = GJ \frac{d\theta}{dz} \Rightarrow J = \frac{T}{G \frac{d\theta}{dz}} = \frac{2A_{in} T}{\oint \frac{q}{t} \, ds}$$

Si sólo se aplica torsión a una sección cerrada, el flujo cortante debido a este torsor es constante, de forma que es más sencillo encontrar la rigidez a torsión  $J$ .

$$T = 2A_{in} q_T \quad J = \frac{4A_{in}^2}{\oint \frac{1}{t} \, ds}$$

Se aprovechará todo esto para calcular la posición del centro de cortadura de la sección triangular de la figura 7.17, de paneles de espesor  $t$ .

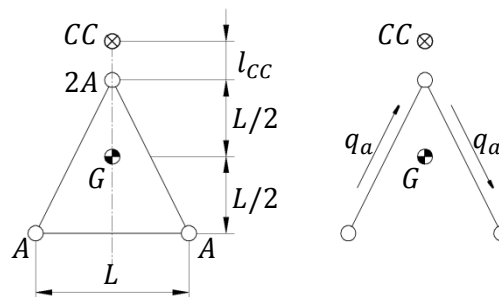


Figura 7.17. Sección triangular y sección abierta equivalente.

Ya se conoce la posición horizontal  $x_{CC}$  del centro de cortadura gracias al eje de simetría, y para conocer la posición vertical  $y_{CC}$  hay que aplicar una carga  $Q_x$  horizontal.

Primero se busca la distribución de flujo cortante de la sección abierta. La mejor forma de abrir la sección es de forma que se conserve la simetría, y para este caso hay que abrir el panel inferior. De forma inmediata, por equilibrio de fuerzas, se obtiene la solución para la distribución de flujo cortante de la sección abierta

$$q_a = \frac{Q_x}{L}$$

Si se añade la distribución constante  $q_0$  se pueden tomar momentos respecto al vértice superior, donde los flujos de los dos paneles inclinados no hacen momento.

$$l_{CC} Q_x = 2 \frac{L^2}{2} q_0 \Rightarrow q_0 = \frac{Q_x l_{CC}}{L^2}$$

Ahora queda encontrar la posición del centro de cortadura respecto al vértice superior  $l_{CC}$  buscando cuál es el punto que no provoca un giro para esta distribución de flujo.

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A_{in}} \oint \frac{q}{Gt} ds = 0 \Rightarrow \oint q ds = 0 = 2q_a \frac{\sqrt{5}}{2} L + q_0 \left( 2 \frac{\sqrt{5}}{2} + 1 \right) L \Rightarrow$$

$$Q_x \sqrt{5} + \frac{Q_x l_{CC}}{L} (\sqrt{5} + 1) = 0 \Rightarrow l_{CC} = -L \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + 1} \Rightarrow$$

Como era de esperar de forma intuitiva, el centro de cortadura se situará en el interior de la sección. Cuando se conoce la posición del centro de cortadura ya puede obtenerse la distribución de flujo cortante a lo largo de la sección debido a una carga de cortadura pura  $q_a + q_0$ . Si una carga arbitraria no está situada sobre el centro de cortadura se puede descomponer en el efecto de cortadura pura y el de torsión, de forma que a la distribución del flujo cortante habrá que añadir el debido al torsió  $q_T$ .

## 7.12. Equilibrado

El objetivo del equilibrado, por ejemplo en las ruedas de un vehículo, es evitar cargas de fatiga cíclicas. Para ello debe cumplirse el equilibrio estático, que consiste en que el centro de gravedad se sitúe sobre el eje de giro, y el equilibrio dinámico, que consiste en hacer los productos de inercia nulos.

Si los productos de inercia no son nulos, el momento cinético no tiene la misma dirección que el giro, y cambia su dirección con el giro.

El sistema de masas  $M$  de la figura 7.18 que gira sobre el eje indicado está equilibrado estáticamente, pero las fuerzas centrífugas generan un momento que además cambia de dirección con el giro de forma que causa un esfuerzo cíclico.

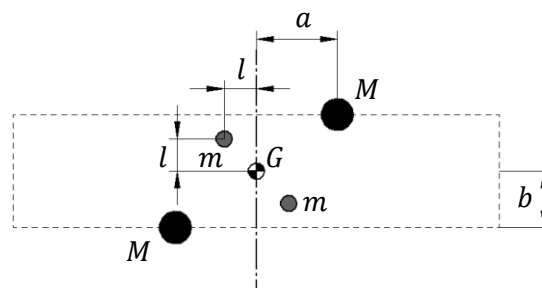


Figura 7.18. Sistema de masas puntuales equilibradas.

Añadiendo dos masas  $m$  como se indica podrán cancelarse los productos de inercia.

$$2Mab - 2ml^2 = 0$$



De forma similar a la sección de la figura 7.19 con cuatro cordones  $A$  se le añaden dos cordones  $A'$  para anular los productos de área.

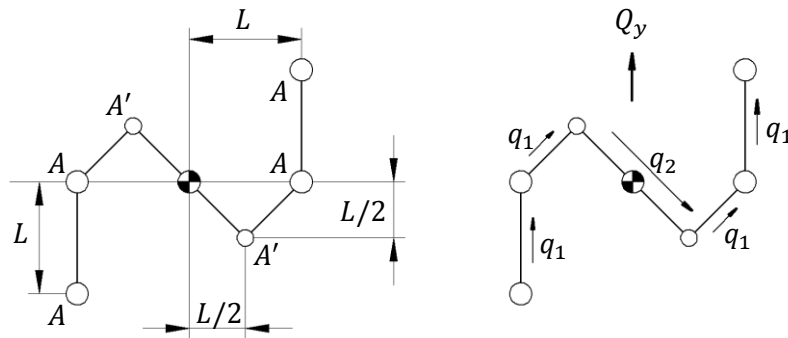


Figura 7.19. Sección idealizada equilibrada.

Para que efectivamente el producto de área  $I_{xy}$  se anule deberá cumplirse

$$2AL^2 - 2A' \left(\frac{L}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow A' = 4A$$

Para calcular para esta sección el flujo cortante  $q$  debido a una carga  $Q_y$  aplicada en su centro de cortadura se obtiene primero la inercia

$$I_x = 2AL^2 + 2 \cdot 4A \left(\frac{L}{2}\right)^2 = 4AL^2$$

En los cordones que se encuentran en el eje  $x$  no hay salto de flujo cortante.

$$q_1 = \frac{Q_y}{4AL^2} \cdot A \cdot L = \frac{Q_y}{4L}$$

Puede obtenerse  $q_2$  por saltos igual que  $q_1$ , o por equilibrio de fuerzas verticales como se hace a continuación

$$Q_y = q_1 \cdot 3L - q_2 \cdot L \Rightarrow q_2 = 3q_1 - \frac{Q_y}{L} = -\frac{Q_y}{4L}$$

### 7.13. Secciones multicelulares

Si una sección está formada por más de una célula se procede de forma muy similar a cuando las secciones tenían un único bucle. Ahora habrá que abrir una cantidad de veces igual al total de células cerradas que haya en la sección, y será necesario determinar una cantidad de flujos constantes igual a ese número, como muestra la figura 7.20.

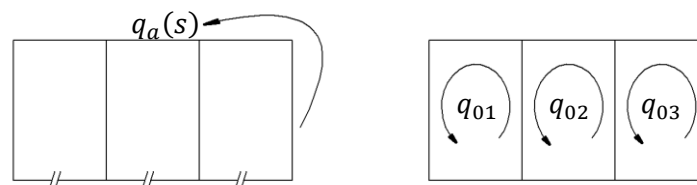


Figura 7.20. Sección multicelular.

Para averiguar los flujos constantes no bastará con igualar los momentos de la carga externa con los del flujo cortante, que solo proporciona una ecuación, sino que será necesario aplicar compatibilidad de giros en las diferentes células, es decir

$$\frac{d\theta}{dz}\Big|_1 = \frac{d\theta}{dz}\Big|_2 = \frac{d\theta}{dz}\Big|_3$$

Supóngase una sección como la de la figura 7.21 de espesor uniforme  $t$  sometida a un momento torsor  $T$ .

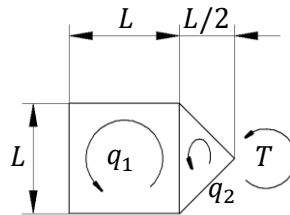


Figura 7.21. Sección multicelular sometida a torsión.

Para calcular la rigidez a torsión de la sección hay que imponer el mismo giro para ambas células de la sección.

$$\frac{d\theta}{dz}\Big|_1 = \frac{d\theta}{dz}\Big|_2 \quad T = 2L^2 q_1 + 2q_2 \frac{L^2}{4}$$

Para cualquier camino cerrado se puede aplicar la expresión

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A} \oint \frac{q}{Gt} ds \Rightarrow \frac{1}{2L^2} (q_1 \cdot 3L + (q_1 - q_2)L) = \frac{1}{2 \frac{L^2}{4}} \left( (q_2 - q_1)L + 2q_2 \frac{L\sqrt{2}}{2} \right)$$

De estas dos ecuaciones puede encontrarse el valor de  $q_1$  y  $q_2$ .

$$q_1 = \frac{(3 + 8\sqrt{2}) T}{34 L^2} \quad q_2 = \frac{4T}{(7 + 4\sqrt{2}) L^2}$$

Entonces ya puede encontrarse la rigidez a torsión  $J$  a partir de

$$T = GJ \frac{d\theta}{dz}$$

Si se quiere calcular la posición del centro de cortadura conviene idealizar la sección tal y como se muestra en la figura 7.22.

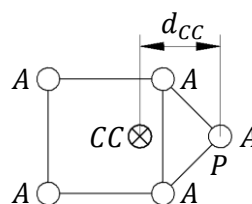


Figura 7.22. Idealización de la sección anterior.

Ya es conocida la posición vertical del centro de cortadura  $y_{CC}$  gracias al eje de simetría horizontal. Para obtener la posición horizontal  $x_{CC}$  será necesario aplicar una carga vertical  $Q_y$ .

No será necesario encontrar la posición horizontal del centro de gravedad  $x_G$  pues solo hay que tomar posiciones a lo largo del eje  $y$ , cuyo origen  $y_G$  está situado también en el eje de simetría de la sección.

$$I_x = 4A \left(\frac{L}{2}\right)^2 = AL^2 \quad \Delta q_i = -\frac{Q_y}{I_x} A_i y_i$$

Para calcular el flujo cortante se abren los dos paneles que se indican en la figura 7.23, y aprovechando la antisimetría de cargas sólo hará falta obtener el valor de dos flujos cortantes.

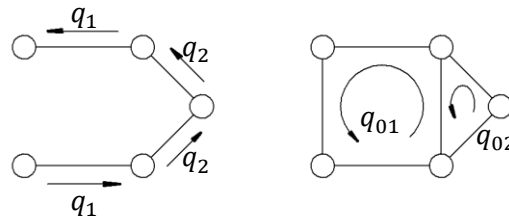


Figura 7.23. Flujo abierto y flujo constante.

Del equilibrio de fuerzas verticales ya puede obtenerse  $q_2 = Q_y/L$ . Dado que el salto del flujo es el mismo en todos los cordones entonces  $q_1$  será la mitad  $q_1 = Q_y/2L$ .

Ahora hay que calcular los flujos constantes. Como se está buscando el centro de cortadura, las rotaciones de ambas células no sólo deberán ser iguales, sino que deberán ser nulas.

$$\left. \frac{d\theta}{dz} \right|_1 = \left. \frac{d\theta}{dz} \right|_2 = 0$$

Esta condición se simplifica gracias al espesor y demás propiedades constantes y queda.

$$\oint_1 q ds = \oint_2 q ds = 0$$

Para la primera célula

$$\oint_1 q ds = 2 \frac{Q_y}{2L} L + q_{01} \cdot 3L + (q_{01} - q_{02})L = 0$$

Para la segunda

$$\oint_2 q ds = 2 \frac{Q_y L \sqrt{2}}{L \cdot 2} + (q_{02} - q_{01})L + 2q_{02} \frac{L \sqrt{2}}{2} = 0$$

De estas dos ecuaciones ya se pueden obtener los flujos cortantes constantes  $q_{01}$  y  $q_{02}$ . Equilibrando los momentos respecto al punto  $P$  se obtiene

$$-Q_y d_{CC} = \frac{Q_y}{2} L + q_{01} \cdot 2L^2 + q_{02} \cdot 2 \frac{L^2}{4} \Rightarrow d_{CC} = \frac{13 - 2\sqrt{2}}{23} L$$

### 7.14. Secciones variables

Imagínese que se tiene una sección idealizada por paneles y cordones que varía de dimensiones a lo largo de su eje, es decir, en la dirección  $z$  como muestra la figura 7.24. Los rigidizadores soportarán entonces una parte de esfuerzos tangenciales debido a su inclinación con respecto al eje  $z$ .

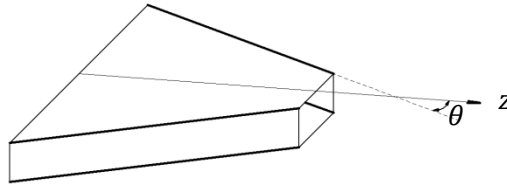


Figura 7.24. Estructura de pared delgada de sección variable.

Se puede suponer que la tensión en la dirección  $z$  en los rigidizadores  $\sigma_z$  variará poco respecto al caso de sección constante.

$$\sigma_{zi} = \frac{M_x}{I_x} y_i - \frac{M_y}{I_y} x_i$$

Sin embargo, ahora el cordón no apunta en dirección  $z$  de forma que la carga que soporta viene dada por

$$\sigma_i = \frac{\sigma_{zi}}{\cos \theta_i}$$

Donde  $\theta$  es el ángulo que forma el cordón con el eje  $z$ , que es el mismo que el que forma el esfuerzo que soporta  $P_i = \sigma_i A_i$  con este eje. El cortante que soporte la sección será entonces

$$Q_x = Q_x^L + \sum_i P_{xi} \quad Q_y = Q_y^L + \sum_i P_{yi}$$

Donde  $Q_x^L$  y  $Q_y^L$  son las cargas que soportan los paneles, y las sumas son las cargas que soportan los cordones debido a la desalineación. Puede escribirse entonces

$$Q_x^L = Q_x - \sum_i P_{xi} \quad Q_y^L = Q_y - \sum_i P_{yi}$$

De este modo los cordones soportan una fracción de los esfuerzos cortantes, y las expresiones que se han utilizado anteriormente para calcular los flujos cortantes en los paneles pueden emplearse con  $Q_x^L$  y  $Q_y^L$ .

$$\Delta q_i = -\frac{Q_x^L}{I_y} x_i A_i - \frac{Q_y^L}{I_x} y_i A_i$$

Puede utilizarse directamente la sección normal del cordón  $A_i$ , no es necesario encontrar su proyección en el plano de la sección.

Tómese como ejemplo la semi-ala que se muestra en la figura 7.25, con una carga  $P$  aplicada en la punta hacia arriba en el borde de ataque, reforzada con rigidizadores de sección  $A$ .

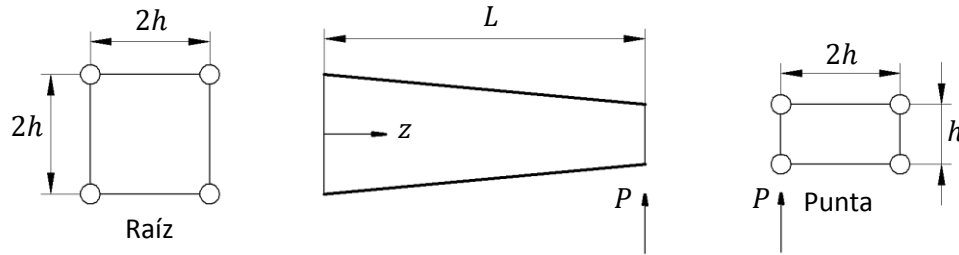


Figura 7.25. Semi-ala de cuerda variable a lo largo de la envergadura.

En la sección de la raíz, la más castigada a flexión, la carga cortante es  $Q_y = P$  y el momento flector es  $M_x = PL$ . Debido a la posición del centro de cortadura de la sección, el cortante genera un torsor  $T = -Ph$ . La inercia de la sección es  $I_x = 4Ah^2$ . Puede obtenerse entonces la tensión en dirección  $z$  que soporta cada rigidizador.

$$\sigma_z = \frac{PL}{4Ah^2} h = \frac{PL}{4Ah}$$

Se considera que la carga total que soporta cada rigidizador es aproximadamente la misma que la que soporta en dirección  $z$ , pues el ángulo de inclinación  $\theta$  que forman los rigidizadores con el eje  $z$  es pequeño.

$$\tan \theta = \frac{h/2}{L} \approx \theta \ll 1 \quad \sigma = \frac{\sigma_z}{\cos \theta} = \sigma_z$$

Sin embargo existe una componente vertical de este esfuerzo, que en módulo vale

$$\sigma_y = \sigma \cdot \sin \theta = \sigma_z \cdot \frac{h/2}{L} \Rightarrow F_y = \sigma_z \cdot \frac{h/2}{L} \cdot A = \frac{P}{8}$$

Las cargas en los larguerillos inferiores son de tracción, ligeramente desviada hacia arriba, de forma que las cargas  $F_y$  van hacia arriba. En los larguerillos superiores las cargas son de compresión ligeramente hacia abajo, de forma que las cargas  $F_y$  también son hacia arriba. La resultante de las cargas sobre todos los larguerillos no tiene la misma línea de acción que la carga aplicada, de forma que el efecto producido por el momento se añadirá a la constante de flujo cortante  $q_0$ .

El esfuerzo cortante que queda para los paneles es  $P/2$ . Por equilibrio de fuerzas se pueden obtener los flujos cortantes de la sección abierta que se muestra en la figura 7.26.

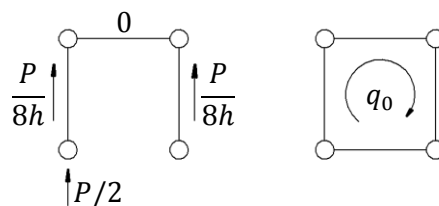


Figura 7.26. Flujo cortante en la raíz del ala.

Tomando momentos respecto al centro de área de la sección, la suma de los momentos de todos los esfuerzos de la sección, que es exclusivamente el debido a  $q_0$  debe ser idéntico al producido por el sistema de cargas externas, de modo que

$$Ph = q_0 \cdot 2 \cdot 4h^2 \Rightarrow q_0 = \frac{P}{8h}$$

Finalmente el flujo cortante de la sección es el que se muestra en la figura 7.27.

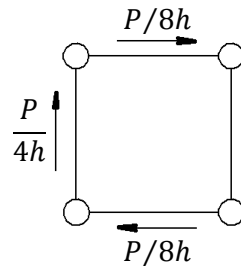


Figura 7.27. Flujo cortante en la raíz del ala.

### 7.15. Tensión diagonal

Los largueros de un ala están pensados para trabajar a flexión. Éstos no se hacen de una sola pieza en forma de doble T, pues sería demasiado pesado y grande, y además las grietas se podrían propagar sin control. Un larguero real acostumbra a ser una placa delgada reforzada con montantes verticales y con dos alas en forma de T que soportan la flexión, más o menos como se esquematiza en la figura 7.28.

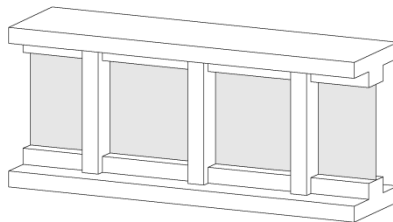


Figura 7.28. Esquema de una sección del larguero de un ala.

Si se carga la estructura como se indica en la figura 7.29 la chapa soportará esfuerzos cortantes exclusivamente, las alas soportarán la flexión y los montantes, inicialmente, no trabajan.

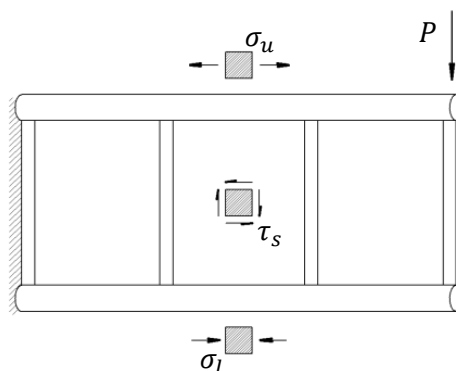
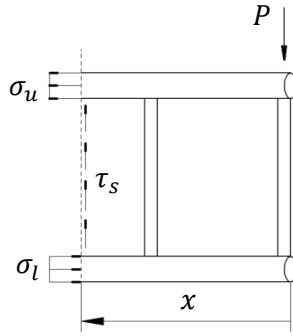


Figura 7.29. Estado tensional previo a la carga crítica.



Para este estado de cargas se puede aplicar equilibrio en una rebanada arbitraria como muestra la figura 7.30.

$$\tau_s t h = P \quad \sigma_u A_u h = \sigma_l A_l h = P x$$

Donde  $h$  y  $t$  son la altura y el espesor de la placa respectivamente, y  $A_l$  y  $A_u$  son las secciones de los largueros inferior y superior respectivamente (habitualmente iguales).

Figura 7.30. Equilibrio de la estructura.

Cuando en una estructura se alcanza una determinada carga crítica  $P_{cr}$  se produce el fenómeno de pandeo en aquellas zonas que estén trabajando a compresión. Tras el pandeo la capacidad de trabajar a compresión queda muy mermada, pero la estructura puede seguir trabajando a tracción.

En el larguero de ejemplo el punto más crítico es la chapa. Al alcanzar la carga crítica el panel pandea y no puede soportar más cargas de compresión, por lo que su estado tensional ya no puede ser tangencial puro. El estado tensional puede descomponerse en el crítico más un estado de carga adicional, en el que los montantes comienzan a trabajar a compresión, como muestra la figura 7.31.

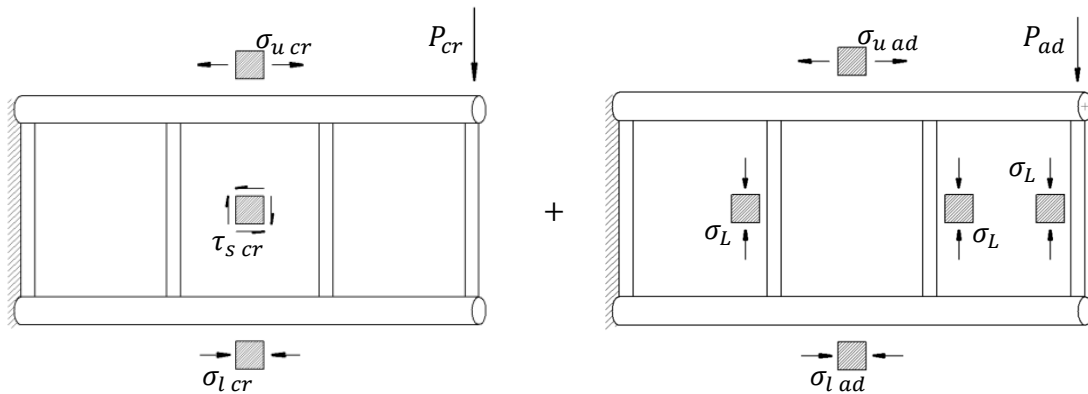


Figura 7.31. Estado de carga crítica y adicional.

En concreto, en el panel, el estado de carga adicional se detalla en la figura 7.32.

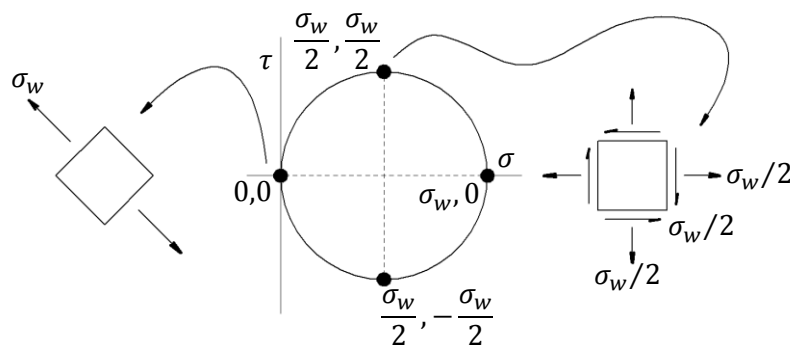


Figura 7.32. Estado de carga adicional en el panel, de tracción a 45°.

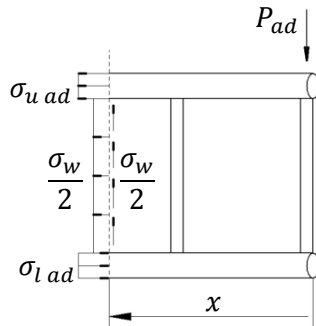


Figura 7.33. Equilibrio de la estructura.

Se puede aplicar equilibrio de nuevo en una rebanada arbitraria para el estado de carga adicional como muestra la figura 7.33.

$$\frac{\sigma_w}{2} th = P_{ad}$$

$$\sigma_{u ad} A_u h + \frac{\sigma_w}{2} th \frac{h}{2} = P_{ad} x$$

$$\sigma_{l ad} A_l h - \frac{\sigma_w}{2} th \frac{h}{2} = P_{ad} x$$

Mientras no se alcanza la carga crítica los largueros experimentan la misma tensión (si sus secciones son iguales), uno a tracción y el otro a compresión. Pero de estas últimas expresiones se deduce que, una vez se alcanza la carga crítica, la deformación de compresión aumenta más que la de tracción, pues el larguero inferior absorbe la carga de compresión que no puede absorber el panel.

Finalmente los montantes deben soportar la carga cortante que se transmite a los largueros desde el panel.

$$\sigma_L A_L = \frac{\sigma_w}{2} tb$$

Donde  $A_L$  es la sección de los montantes y  $b$  la anchura libre de la placa delgada, es decir, la distancia que separa dos montantes. Se ha supuesto que todos los montantes son iguales y se encuentran separados uniformemente.