PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS.

For the Months of November *and* December, 1695.

The CONTENTS.

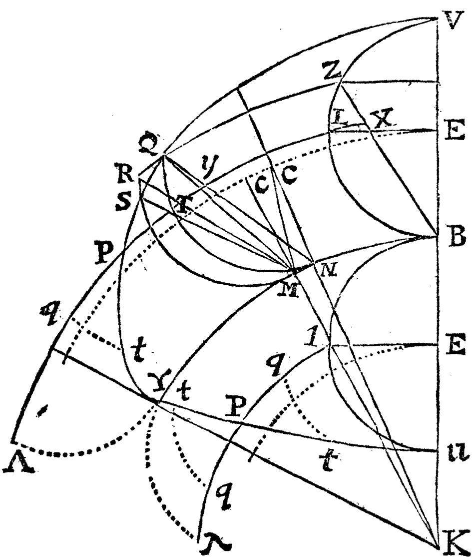
I. *Propositio Generalis Arearum dimensionem exhibens in universo illo Curvarum Genere quæ revolutione æquabili Circuli super Basin quamvis vel rectilineam vel Circularem describi possint, &c.*

NOtum est Cycloidem primariam, sicut etiam Prolatam ac Contractam (quas Trochoides vocant) à Celeberrimo Wallisio aliisque uberrime tractatas fuisse; earumque proprietates dudum innotuisse: ut jam vix liceat quicquam novi de iis comminiſci. At in nupero tractatu Cl. *de la Hire*, nonnulla de Epicycloidis primariæ proprietatibus prodidit: cujus occaſione ingenioſiſſimus *Caſwellus*, non ſolum dimenſionem Areæ totius ſpatii Epicycloidalis etiam in partibus obtinere locum invenit: ſed etiam perfectam Spatii Curvilinei *V P L* Quadraturam exhibuit. Ejuſdem vero demonſtrationem, (cum minime obvia ſit, ac ab Inventore nondum prodita) dum quærerem, incidi forte in Generalem hanc quam damus Propoſitionem, quâ menſurantur ſpatia Curvilinea omnia Generis Cycloidalis vel Epicycloidalis, tam tota, quam per partes. Atque etiam non ſolum Spatia *V P L*, ſed etiam innumera *Q T P* ac *V Q T L* accuratæ Quadraturæ capacia eſſe demonſtravi; idque non tantum in Epicycloidibus primariis, ſed etiam in prolatis vel contractis. Propoſitio autem hæc eſt.

Area Cycloidis vel Epicycloidis, ſive Primariæ ſive Contractæ vel Prolatæ, eſt ad Aream Circuli Generantis; atque etiam Areæ partium genitarum in iiſdem Curvis, ad Areas analogorum ſegmentorum Circuli :: ut ſumma duplæ Velocitatis centri ac velocitatis motus circularis, ad Velocitatem motus circularis.

Demonſtratio.

Deſcribatur Epicyclois quævis *Y P S Q V B* revolutione circuli *V L B* ſuper Baſi circulari *Y M N B*; ponatur centrum circuli generantis in *c*, ductaque *c M K*, inſiſtat circulus Baſi in puncto *M*; ſitque punctum lineans *S*. Jam diviſis motibus, transferatur primum motu circulari punctum *S* in *R*, ut augeatur arcus *S M* particulâ indiviſibili *R S*; deinde progrediatur centrum *c* in *C*; hoc motu, traducto ſegmento *R S M* in ſitum *Q T N*, punctum *Q* tanget Curvam. Patet Triangulum *R S M* eſſe momentum ſive fluxionem Areæ ſegmenti circuli: Trapezium vero *Q S M N* eſſe fluxionem Areæ ſpatii curvilinei ſimul geniti. Jam cum



S M, *R M*, *Q M*, non niſi puncto inter ſe differre intelligantur,

gantur, concipe areolam $QSMN$ constare ex tribus secto-ribus RMS, RMQ, MQN; adeoque areolam RMS esse ad Areolam $QSMN$, ut est angulus RMS ad summam trium angulorum $RMS + RMQ + MQN$. At anguli $RMQ + MQN$ æquantur angulis $MCN + MKN$, sive angulo cMC; propter lineas RM, QN, invicem inclinatis sub angulo ipsi MKN æquali, ac propter angulum MQN ipsius MCN dimidium (per *Eucl.* 3. 20.) Proinde angulus RMS est ad angulos $RMS + cMC$, hoc est, (per eandem 3.20.) arcus $\frac{1}{2} RS$ ad duos arcus $Cc + \frac{1}{2} RS$, sive RS ad $2Cc + RS$; ut areola RSM, ad areolam $QSMN$: sive ut momentum segmenti circularis QTN ad momentum segmenti in Epicycloide simul geniti $QSYMN$. Cumque hæc momenta semper sint in eadem illa ratione, ubicunque assumpseris punctum Q, constat Areas ipsas QTN, $QSYMN$ his momentis genitas, eandem constantem habere rationem, nempe velocitatis motus circularis RS, ad duplam velocitatem centri addito motu circulari, sive $2Cc + RS$. Sicut etiam Aream VBZ ad Aream $QVBN$, ac proinde semicirculum VLB ad spatium Curvilineum $VQYNB$. *Ergo constat Propositio.* Nulla autem alia est differentia in modo demonstrandi, si circulus genitor super arcu Basis Concavæ moveatur, nisi quod angulus cMC, hoc in casu, sit differentia angulorum MCN, MKN. Si vero Basis sit linea recta, evanescente MKN, ac ob RM, QN parallelas, etiam facilior erit probatio. Deducendis ex hac propositione Corollariis, cum in promptu sint, libenter abstineo: In omnibus autem hujusmodi Curvis portiones analogæ portionibus illis, quas in Cycloide primariâ perfectæ Quadraturæ capaces invenit Cl. Wallisius, sunt æque quadrabiles, quod quidem facile consequitur ex præmissis.

Centro K, per punctum Q duc circularem arcum QZ, ac age ZB abscindens segmentum ZLB æquale segmento QTN; Dein biseca semicirculum VB in L, ac per punctum L, centro etiam K, describe arcum PL, secantem Epicycloidem in P, circulum Genitorem in T, ac Chordas QN, ZB in y & X. Jam sit Arcus $VZ = a$, ejusque sinus $= s$, Radius Genitoris $= r$, Radius vero Basis $= R$; sitque arcus CE sive motus centri $= m$. Patet sectorem CKE eam rationem habere ad spatium $XyNB$, quam habet quadratum ex KE, ad differentiam quadratorum ex KL & KB; sive ut $RR + 2Rr + rr$

ad

ad $2Rr + 2rr$; hoc eſt ut $R + r$ ad $2r$, vel KE ad BV; ac proinde rectangulum BE in CE ſive rm æquari ſpatio $XyNB$. Spatium vero VZB æquale eſt rectang. $\frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}sr$; adeoque, juxta noſtram propoſitionem, erit ut a ad $2m$, ita $\frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}sr$, ad $\frac{mar + msr}{a}$, æquale Spatio Curvilineo $QVZLBNQ$: Ex hoc ſubduc ſpatium $XyNB = rm$, & remanebit ſpatium $QVZXy = \frac{mrs}{a}$: Cumque ſpatia ZXL, QyT æquentur inter ſe, ſpatium $QVLTQ$ etiam æquabitur ipſi $\frac{mrs}{a}$: Quoties itaque a ad m, ſive motus circularis ad progreſſivum centri, fuerit in data ratione, dabitur etiam perfecta Quadratura ſpatiorum curvilineorum $QVLTQ$: Totumque ſpatium VPL ad Quadratum Radii BE erit in eadem ratione motuum m ad a, hoc eſt, in omni Epicycloide primariâ, in ratione radiorum KE ad KB, quæ eſt ipſa Domini *Caſwelli* Propoſitio. Spatia autem minora $QVLTQ$ erunt inter ſe ut ſinus Arcuum VZ; ac ſpatia Triangularia QTP eodem argumento erunt ut Sinus Verſi arcuum QT vel ZL: ac proinde etiam Quadrantur. Pari modo probabuntur ſpatia $P\Lambda\Upsilon$, pLu, $p\lambda\Upsilon$ ſemper eſſe ad Radii BE quadratum (in omnibus his figuris) in prædicta ratione m ad a; eorumque portiones pqt, ut Sinus Verſi arcuum interceptorum qt. Reſidua autem ſegmenta, ut $qt\Upsilon\Lambda$, $qt\Upsilon\lambda$, &c. erunt ut Sinus recti complimentorum eorundem arcuum qt.

Componitur autem ratio velocitatum m ad a, ex ratione radiorum KE, BE, ac ratione angulorum ſimul æquabiliter deſcriptorum CKE, VEZ: ac proinde datâ etiam illâ angulorum ratione, etiam Quadrabuntur ſpatia omnia Epicycloidalia prædicta.

Omnibus his Curvis Tangentes ducere in promptu eſt, earumque Longitudines ſive Rectificationes, ex Areis quibuſdam ipſis analogis, jam inveniſſe mihi videor: cujus rei occaſione Familia hæc Curvarum uberius aliquando forſan tractabitur.