Entwicklung Taylorpolynom

Alexander Grubner

Informatik Student ETH Zürich

28. November 2008

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Taylorpolynom

Das Polynom $x^4 - x^2 + 1$ soll mittels Taylorpolynom im Punkt x=1 entwickelt werden. Dazu verschafft man sich, wenn möglich, eine konkrete Grafik der Originalfunktion. In unserem Beispiel sieht der Graph so aus:

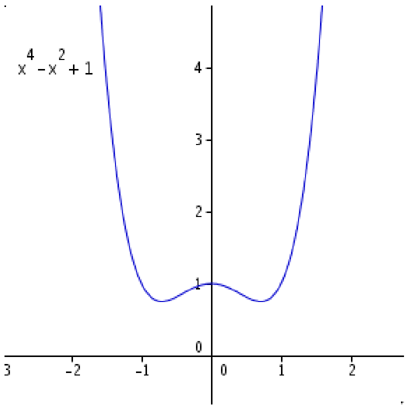

Abbildung 1.1: Ursprungsfunktion

1.1 Die Formel zur Herleitung der verschiedenen Funktionen

Wie beschrieben, setze ich den Punkt mit x=1 fest. Dass heisst, ich bestimme um diesen Punkt alle weiteren Funktionen, die sich der Originalfunktion immer mehr annähern sollen. Die dazu verwendete Formel lautet:

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k \cdot (a)}{k!} \cdot (x-a)^k \tag{1.1}$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \ldots + \frac{f^k \cdot (a)}{k!} \cdot (x-a)^k \tag{1.2}$$

Aber wie sieht dies nun in unserem konkreten Fall aus? Wichtig ist, dass man weiss wie man ableiten muss. Unser Beispiel ist sehr einfach. Polynome sind sehr angenehm abzuleiten und dieses Beispiel soll aufzeigen, wie man Taylor anwendet und nicht wie man Funktionen ableitet.

1.2 Beispiel $x^4 - x^2 + 1$

Da wir im Punkt x=1 entwickeln, beginnen wir gleich mit der ersten Taylorentwicklung. Diese lautet nun:

$$T_1(x,1) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!} \cdot (x-1) \tag{1.3}$$

$$= 1 + \frac{4x^3 - 2x}{1!} \cdot (x-1) \tag{1.4}$$

$$= 1 + 2 \cdot (x-1) \tag{1.5}$$

$$= 2x - 1 \tag{1.6}$$

Wir leiten also die Urspungsfunktion ab und setzen den Punkt x=1 ein. Dabei entsteht ein Wert, den wir als Faktor vor die Klammer setzen und ausrechnen. Zusammen mit der Ursprungsfunktion, bei der der Wert auch ausgerechnet wird, entsteht die Funktion um den Punkt 1. Diese Funktion zeigt sich nun wie folgt: Nun berechnet man das

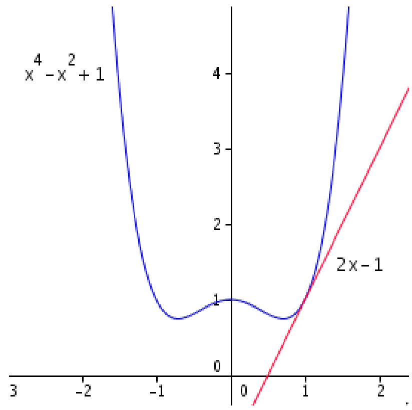

Abbildung 1.2: Erstes Taylorpolynom

zweite Taylorpolynom gemäss der in der Formel 1.1 beschriebenen Vorgehensweise. Dabei berechnet man die zweite Ableitung der ersten und setzt den Wert, hier x=1, ein. Dies erzeugt die folgende Darstellung:

$$
\begin{aligned}
T_2(x,1) &= T_1(x,1) + \frac{f''(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 && (1.7)\\
&= 2x - 1 + \frac{12x^2 - 2}{2} \cdot (x^2 - 2x + 1) && (1.8)\\
&= 2x - 1 + \frac{10}{2} \cdot (x^2 - 2x + 1) && (1.9)\\
&= 2x - 1 + 5 \cdot (x^2 - 2x + 1) && (1.10)\\
&= 5x^2 - 8x + 4 && (1.11)
\end{aligned}
$$

Diese berechnete Funktion tragen wir wieder in das Koordinatensystem ein und erhalten folgende Darstellung: Die violet dargestellte Funktion stellt das zweite Taylorpoly-

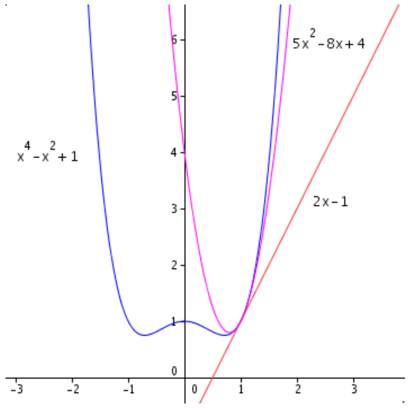

Abbildung 1.3: Zweites Taylorpolynom

nom dar. Man sieht, wie sich die Graphen an den Ursprungsgraphen heranschmiegen und nennt diesen auch Schmiegegraph. Weiter geht es nun mit dem dritten Taylorpolynom, welches sich an denselben Algorithmus hält wie beim vorigen.

Wir leiten die zweite Ableitung erneut ab, setzen für x den Wert gleich eins ein, addieren das zweite Taylorpolynom, berechnen $(x-1)^3$ und multiplizieren mit einem Faktor, der durch die Ableitung entsteht damit. Dies berechnet sich dann so:

$$T_3(x,1) = T_2(x,1) + \frac{f'''(1)}{3!} \cdot (x-1)^3 \tag{1.12}$$
$$= 5x^2 - 8x + 4 + \frac{24x}{6} \cdot (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \tag{1.13}$$
$$= 5x^2 - 8x + 4 + \frac{24}{6} \cdot (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \tag{1.14}$$
$$= 5x^2 - 8x + 4 + 4 \cdot (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \tag{1.15}$$
$$= 5x^2 - 8x + 4 + 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 \tag{1.16}$$
$$= 4x^3 - 7x^2 + 4x \tag{1.17}$$

Diese Funktion lässt sich natürlich wieder grafisch darstellen. Das machen wir auch gleich und erhalten dabei die schwarz farbene Funktion $4x^3 - 7x^2 + 4x$: Man sieht nun

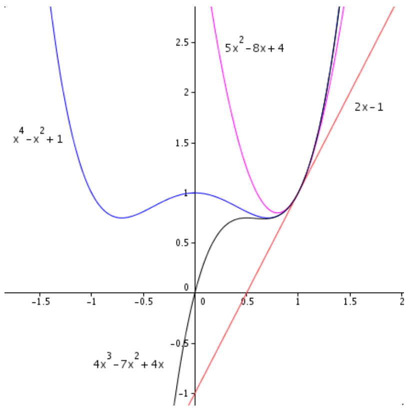

Abbildung 1.4: Drittes Taylorpolynom

deutlich, wie das dritte Taylorpolynom sich mehr und mehr an die Ursprungsfunktion herantastet. Gegenüber dem zweiten Taylorpolynom wurde der Abstand wieder verringert. Aber, das geht doch noch besser, oder? Deshalb erarbeiten wir uns das vierte Taylorpolynom und werden dabei etwas Schönes vorfinden. Die dabei verwendeten Schritte sind identisch mit den davor berechneten. Nun leiten wir die dritte Ableitung erneut ab, setzen den Wert x=1 ein, addieren das dritte Taylorpolynom und multiplizieren die Ableitung mit dem klammerausdruck $(x-1)^4$. In Formeln ausgedrückt bedeutet das:

$$
\begin{aligned}
T_4(x,1) &= T_3(x,1) + \frac{f^{(4)}(1)}{4!} \cdot (x-1)^4 && (1.18)\\
&= 4x^3 - 7x^2 + 4x + \frac{24}{4!} \cdot (x-1)^4 && (1.19)\\
&= 4x^3 - 7x^2 + 4x + (x-1)^4 && (1.20)\\
&= 4x^3 - 7x^2 + 4x + x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 && (1.21)\\
&= x^4 - x^2 + 1 && (1.22)
\end{aligned}
$$

Das vierte Taylorpolynom entspricht wieder der Ursprungsfunktion und ist natürlich deckungsgleich. Dieses Beispiel zeigt in einfacher Weise, wie man vorzugehen hat, wenn man eine Funktion kennt und dann an einer beliebigen Stelle auf der X-Achse eine Taylorpolynom-Entwicklung n.ten Grades durchführen will.