Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2008/2009**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 19

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{N}$ das durch $3, 5, 7$ erzeugte numerische Untermonoid. Bestimme eine Restklassendarstellung des zugehörigen Monoidringes.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid, das von teilerfremden Elementen erzeugt werde. Es sei vorausgesetzt, dass die Multiplizität von M mit der Führerzahl von M übereinstimmt. Bestimme ein minimales Erzeugendensystem und die Einbettungsdimension von M.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Klassifiziere sämtliche numerische Monoide M (mit teilerfremden Erzeugern) mit Führerzahl $f(M) \leq 6$. Gebe jeweils die Einbettungsdimension, die Multiplizität und den Singularitätsgrad an.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Sei M ein kommutatives Monoid und R ein kommutativer Ring. Charakterisiere für welche Teilmengen $I \subseteq M$ die Teilmenge

$$R[I] = \bigoplus_{m \in I} T^m \subseteq R[M]$$

ein Ideal in $R[M]$ ist.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid und K ein Körper.

Definiere $M_+ = M \cap \mathbb{N}_+$ und

$nM_+ = \{m \in M : \text{es gibt eine Darstellung } m = m_1 + \ldots + m_n \text{ mit } m_i \in M_+\}$.

Zeige, dass nM_+ „Ideale“ in M sind, dass zu M_+ ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ in $K[M]$ gehört, und dass das zu nM_+ gehörige Ideal gleich $\mathfrak{m}^n$ ist.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Seien M und N kommutative Monoide und sei K ein Körper. In welcher Beziehung steht K–Spek$\,(K[M \times N])$ zu K–Spek$\,(K[M])$ und K–Spek$\,(K[N])$?

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Sei K ein Körper. Finde ein kommutatives Monoid M derart, dass eine Isomorphie
$$K[M] \cong K[X, Y, U, V]/(UX - VY)$$
vorliegt.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Seien R und S Integritätsbereiche und sei $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Es sei $f \in R$ ein Element, das in S eine Einheit ist. Zeige, dass es dann schon in R eine Einheit ist.

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Seien R, S, T kommutative Ringe und seien $\varphi : R \to S$ und $\psi : S \to T$ Ringhomomorphismen derart, dass S ganz über R und T ganz über S ist. Zeige, dass dann auch T ganz über R ist. (Vergleiche Aufgabe 10.6.)

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Sei $R \subseteq S$ eine ganze Erweiterung von Integritätsbereichen und sei $F \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann auch die zugehörige Erweiterung $R_F \subseteq S_F$ ganz ist.