Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 17

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 17.1. Betrachte den Monoidhomomorphismus

$$\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{Z},\, e_1 \longmapsto 1,\, e_2 \longmapsto -1\,.$$

Beschreibe die zugehörige Abbildung zwischen den Monoidringen (für einen Körper K) und den zugehörigen K-Spektren.

Aufgabe 17.2. Seien $M \subseteq N$ kommutative Monoide. Zeige, dass durch

$$\tilde{M} = \{n \in N \mid \text{es gibt } k \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } kn \in M\}$$

ein Untermonoid von N gegeben ist, das M umfasst.

Aufgabe 17.3. Wir betrachten die kommutativen Monoide $M = \mathbb{N}^r$ und $N = \mathbb{N}^s$. Zeige, dass ein Monoidhomomorphismus von M nach N eindeutig durch eine Matrix (mit r Spalten und s Zeilen) mit Einträgen aus $\mathbb{N}$ bestimmt ist.

Wie sieht die zugehörige Spektrumsabbildung aus?

Aufgabe 17.4. Sei M ein kommutatives Monoid. Zeige, dass die zugehörige Differenzgruppe $\Gamma = \Gamma(M)$ eine kommutative Gruppe ist, und dass sie folgende universelle Eigenschaft besitzt: Zu jedem Monoidhomomorphismus

$$\varphi\colon\, M \longrightarrow G$$

in eine Gruppe G gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{\varphi}\colon\, \Gamma \longrightarrow G,$$

der φ fortsetzt.

Aufgabe 17.5. Sei M ein kommutatives Monoid mit zugehöriger Differenzgruppe $\Gamma = \Gamma(M)$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) M ist ein Monoid mit Kürzungsregel.
(2) Die kanonische Abbildung $M \to \Gamma(M)$ ist injektiv.
(3) M lässt sich realisieren als Untermonoid einer Gruppe.

Aufgabe 17.6. Sei R ein kommutativer Ring. Beweise die R-Algebra-Isomorphie

$$R[\mathbb{Z}^n] \cong R[X_1, \ldots, X_n]_{X_1 \cdots X_n}$$

mit Hilfe der universellen Eigenschaften von Monoidringen und Nenneraufnahmen.

Aufgabe 17.7. Seien M, N endlich erzeugte kommutative Monoide mit den K-Spektren $K-\operatorname{Spek}(K[M]) = \operatorname{Mor}_{\text{mon}}(M, K)$ und $K-\operatorname{Spek}(K[N]) = \operatorname{Mor}_{\text{mon}}(N, K)$. Zeige, dass man für einen Monoidhomomorphismus $\varphi : M \to N$ die zugehörige Spektrumsabbildung auf zwei verschiedene Weisen definieren kann, die aber inhaltlich übereinstimmen.

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Ein *Filter* F in einem kommutativen Monoid M ist ein Untermonoid, das zusätzlich *teilerstabil* ist. D.h. falls $f \in F$ ist und $g|f$ gilt, so ist auch $g \in F$.

Aufgabe 17.8. Sei M ein kommutatives Monoid. Zeige, dass es in M einen kleinsten Filter gibt und dass dieser eine Gruppe bildet.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.9. (6 Punkte)

Seien $M \subseteq N$ endlich erzeugte kommutative Monoide. Zeige, dass für einen Körper K der Ringhomomorphismus $K[M] \subseteq K[N]$ genau dann endlich ist, wenn es zu jedem $n \in N$ ein $k \in \mathbb{N}_+$ gibt mit $kn \in M$.

Aufgabe 17.10. (4 Punkte)

Sei $M = (\mathbb{Q}, +)$ die additive Gruppe der rationalen Zahlen. Bestimme $\mathbb{Q} - \operatorname{Spec}(\mathbb{Q}[M])$. Wie sieht es aus, wenn man $\mathbb{Q}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt?

Aufgabe 17.11. (4 Punkte)

Es sei $\varphi\colon M \to N$ ein Homomorphismus von kommutativen Monoiden. Zeige, dass die Menge aller Punkte aus $K - \operatorname{Spec} K[N]$, die unter der Spektrumsabbildung auf den Einspunkt $1 \in K - \operatorname{Spek}(K[M])$ (das ist der Punkt, der der konstanten Abbildung $M \mapsto 1$ entspricht) abgebildet werden, selbst die Struktur eines K-Spektrums eines geeigneten Monoids besitzt.

Aufgabe 17.12. (4 Punkte)

Wir betrachten Monoide der Form $M = (\mathbb{Z}/(m), +)$. Beschreibe $K - \operatorname{Spek}(K[M])$ allgemein sowie für die Körper $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/(5)$. Finde die idempotenten Elemente von $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/(3)]$.

Aufgabe 17.13. (4 Punkte)

Sei M ein kommutatives Monoid. Definiere eine Bijektion zwischen den folgenden Objekten.

(1) Filter in M.
(2) $\mathrm{Mor}_{\mathrm{mon}}(M, (\{0,1\}, 1, \cdot))$.
(3) $\mathbb{F}_2 - \mathrm{Spek}\,(M)$
(4) $\{\varphi \in K{-}\mathrm{Spek}\,(K[M]) | \, \varphi(M) \subseteq \{0,1\}\}$. (Dabei ist K ein Körper.)

Aufgabe 17.14. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und G eine Gruppe. Dann können wir den Monoidring $K[G]$ betrachten. Sei nun weiter M ein $K[G]$-Modul. Zeige, dass

(1) M nichts anderes ist als ein K-Vektorraum V zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(V)$.
(2) ein $K[G]$-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to M$ eine K-lineare Abbildung ist, für die zusätzlich $\varphi \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \varphi$ für alle $g \in G$ gilt.

Bemerkung: ρ heißt dann eine *Darstellung* von G. Solche Darstellungen sind oft einfacher zu handhaben als G und man kann mit Hilfe von ρ oft hilfreiche Erkenntnisse über G selbst gewinnen.