

**Mathematik für Anwender I****Arbeitsblatt 28****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 28.1. Sei  $x \in \mathbb{R}$  und betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t) = t^x e^{-t}.$$

Bestimme die Extremwerte dieser Funktion.

AUFGABE 28.2. Zeige, dass für die Fakultätsfunktion für  $k \in \mathbb{N}$  die Beziehung

$$\text{Fak} \left( \frac{2k-1}{2} \right) = \frac{\prod_{i=1}^k (2i-1)}{2^k} \cdot \sqrt{\pi}$$

gilt.

AUFGABE 28.3.\*

a) Zeige, dass für  $x \geq 1$  die Abschätzung

$$\int_1^\infty t^x e^{-t} dt \leq 1$$

gilt.

b) Zeige, dass die Funktion  $H(x)$  mit

$$H(x) = \int_1^\infty t^x e^{-t} dt$$

für  $x \geq 1$  monoton wachsend ist.

c) Zeige, dass  $10! \geq e^{11} + 1$  gilt.

d) Zeige, dass für die Fakultätsfunktion für  $x \geq 10$  die Abschätzung

$$\text{Fak}(x) \geq e^x$$

gilt.

AUFGABE 28.4. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \sin t \text{ mit } y(\pi) = 7.$$

AUFGABE 28.5. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^2 - 4t + 7 \text{ mit } y(2) = 5.$$

AUFGABE 28.6. Finde alle Lösungen zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = y.$$

AUFGABE 28.7. Man mache sich anschaulich und mathematisch klar, dass bei einer ortsunabhängigen Differentialgleichung der Abstand zwischen zwei Lösungen  $y_1$  und  $y_2$  zeitunabhängig ist, d.h. dass  $y_1(t) - y_2(t)$  konstant ist.

Man gebe ein Beispiel, dass dies bei zeitunabhängigen Differentialgleichungen nicht der Fall sein muss.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 28.8. (2 Punkte)

Zeige, dass für die Fakultätsfunktion die Beziehung

$$\text{Fak}(x) = \int_0^1 (-\ln t)^x dt$$

gilt.

AUFGABE 28.9. (3 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^3 - 2t + 5 \text{ mit } y(3) = 4.$$

AUFGABE 28.10. (3 Punkte)

Finde eine Lösung zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = t + y.$$

AUFGABE 28.11. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{t^3}{t^2 + 1} \text{ mit } y(1) = 2.$$