Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Vorlesung 20

Normale Ringe und Normalisierung

Definition 20.1. Ein Integritätsbereich heißt *normal*, wenn er ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist.

Definition 20.2. Sei R ein Integritätsbereich und $Q(R)$ sein Quotientenkörper. Dann nennt man den ganzen Abschluss von R in $Q(R)$ die *Normalisierung* von R.

Es ist eine nichttriviale Tatsache, dass falls R von endlichem Typ ist, dann auch die Normalisierung davon von endlichem Typ ist.

Wichtige Beispiele für normale Ringe werden durch faktorielle Ringe geliefert.

Satz 20.3. *Sei R ein faktorieller Integritätsbereich. Dann ist R normal.*

Beweis. Sei $K = Q(R)$ der Quotientenkörper von R und $q \in K$ ein Element, das die Ganzheitsgleichung

$$q^n + r_{n-1}q^{n-1} + r_{n-2}q^{n-2} + \ldots + r_1 q + r_0 = 0$$

mit $r_i \in R$ erfüllt. Wir schreiben $q = a/b$ mit $a, b \in R$, wobei wir annehmen können, dass die Darstellung gekürzt ist, dass also a und $b \in R$ keinen gemeinsamen Primteiler besitzen. Wir haben zu zeigen, dass b eine Einheit in R ist, da dann $q = ab^{-1}$ zu R gehört.

Wir multiplizieren obige Ganzheitsgleichung mit b^n und erhalten in R

$$a^n + (r_{n-1}b)a^{n-1} + (r_{n-2}b^2)a^{n-2} + \ldots + (r_1 b^{n-1})a + (r_0 b^n) = 0\,.$$

Wenn b keine Einheit ist, dann gibt es einen Primteiler p von b. Dieser teilt alle Summanden $(r_{n-i}b^i)a^{n-i}$ für $i \geq 1$ und daher auch den ersten, also a^n. Das bedeutet aber, dass a selbst ein Vielfaches von p ist im Widerspruch zur vorausgesetzten Teilerfremdheit. □

Satz 20.4. *Sei R ein normaler Integritätsbereich und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Dann ist auch die Nenneraufnahme R_S normal.*

Beweis. Siehe Aufgabe 20.5. □

Normalisierung von Monoidringen

Wir wollen besprechen, wann Monoidringe normal sind und wie gegebenenfalls die Normalisierung eines Monoidrings aussieht. Hierzu brauchen wir zunächst Bedingungen, die sicherstellen, dass ein Monoidring über einem Integritätsbereich wieder integer ist.

Definition 20.5. Ein kommutatives Monoid M heißt *torsionsfrei*, wenn für $m, n \in M$ aus $rm = rn$ für eine positive Zahl $r \in \mathbb{N}_+$ stets $m = n$ folgt.

Satz 20.6. *Sei R ein Integritätsbereich und sei M ein torsionsfreies kommutatives Monoid, das die Kürzungsregel erfüllt. Dann ist der Monoidring $R[M]$ ein Integritätsbereich.*

Beweis. Zunächst ist $M \subseteq \Gamma(M)$, wobei $\Gamma(M)$ die Differenzengruppe zu M bezeichnet. Damit ist $R[M] \subseteq R[\Gamma(M)]$ ein Unterring, und es genügt die Aussage für $R[\Gamma(M)]$ zu beweisen. Da M torsionsfrei ist, ist nach Aufgabe 20.6 auch $\Gamma(M)$ torsionsfrei. Wir können also annehmen, dass M eine torsionsfreie kommutative Gruppe ist. Sei nun

$$\sum_{n \in M} a_n X^n \cdot \sum_{n \in M} b_n X^n = 0 \, .$$

Da hier fast alle Koeffizienten null sind, spielt sich dies in einer endlich erzeugten Untergruppe U der torsionsfreien Gruppe M ab. Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte torsionsfreie kommutative Gruppen ist dann $U \cong \mathbb{Z}^n$. Wir können also sogar $M = \mathbb{Z}^n$ annehmen. Dann ist aber $R[M]$ eine Nenneraufnahme eines Polynomringes über einem Integritätsbereich und damit integer. □

Für ein Monoid ohne Kürzungsregel kann der zugehörige Monoidring über einem Integritätsbereich Nullteiler besitzen.

Beispiel 20.7. Sei M ein Monoid, in dem es zwei verschiedene Elemente m und n gebe mit $m + n = n + n$. Daraus folgt ohne die Kürzungsregel eben nicht $m = n$. Im Monoidring über einem beliebigen Integritätsbereich R ist $X^m - X^n \neq 0$ und $X^n \neq 0$, aber

$$(X^m - X^n)\, X^n \;=\; X^{m+n} - X^{n+n} \;=\; X^{2n} - X^{2n} \;=\; 0.$$

Definition 20.8. Sei M ein torsionsfreies kommutatives Monoid mit Kürzungsregel und mit zugehöriger Differenzengruppe $\Gamma(M)$. Dann heißt das Untermonoid

$$\tilde{M} = \{m \in \Gamma(M) | \text{ es gibt } r \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } rm \in M\}$$

die *Normalisierung* von M.

Satz 20.9. *Sei M ein torsionsfreies kommutatives Monoid mit Kürzungsregel und mit zugehöriger Differenzengruppe $\Gamma(M)$ und mit Normalisierung $\tilde{M}$, $M \subseteq \tilde{M} \subseteq \Gamma(M)$. Sei R ein normaler Ring. Dann ist die Normalisierung des*

Monoidringes $R[M]$ der Monoidring $R[\tilde{M}]$. Insbesondere ist der Monoidring zu einem normalen Monoid über einem normalen Ring selbst wieder normal.

Beweis. Zunächst ist

$$R[M] \subseteq R[\tilde{M}] \subseteq R[\Gamma(M)] \subseteq Q(R)[\Gamma(M)] \subseteq Q(R[M]).$$

Sei $m \in \tilde{M}$ mit $m = n - k$, $n, k \in M$, und mit $rm = m + m + \ldots + m \in M$ (r mal). Damit ist $T^m = T^n/T^k$ ein Element im Quotientenkörper und nach der zweiten Eigenschaft ist $(T^m)^r \in R[M]$. Dies bedeutet, dass eine (reine) Ganzheitsgleichung für T^m vorliegt und damit T^m zur Normalisierung von $R[M]$ gehört.

Für die Umkehrung kann man M durch $\tilde{M}$ ersetzen und sich somit auf den Fall beschränken, wo M normal ist. Man beweist zuerst, dass für eine torsionsfreie Gruppe G der Gruppenring $R[G]$ normal ist, was daraus folgt, dass der Polynomring über einem normalen Bereich wieder normal ist. Dann muss man zeigen, dass $R[M]$ in $R[\Gamma(M)]$ ganz-abgeschlossen ist. Ein Element $q \in R(\Gamma(M))$ und eine Ganzheitsgleichung dafür lebt im Monoidring zu einer endlich erzeugten Untergruppe $U \subseteq \Gamma(M)$, sodass man $\Gamma(M) = \mathbb{Z}^n$ annehmen darf.

Hier kommt nun etwas konvexe Geometrie ins Spiel, was wir nicht ausführen. Jedenfalls lässt sich ein normales Untermonoid $M \subseteq \mathbb{Z}^n$ darstellen als der Durchschnitt (innerhalb von $\mathbb{Q}^n$ oder $\mathbb{R}^n$) von $\mathbb{Z}^n$ und einem polyhedrischen Kegel. Ein solcher Kegel ist selbst wiederum der Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen H_i (Lemma von Gordan). Dabei ist ein Halbraum H gegeben durch eine lineare Abbildung $p : V = \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $H = p^{-1}(\mathbb{R}_+)$. Daraus folgt, dass M ein endlicher Durchschnitt $M = \bigcap_{i \in I} M_i$ ist mit $M_i = p_i^{-1}(\mathbb{N})$. Daraus ergibt sich, dass die M_i eine Form $M_i \cong \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^{n-1}$ haben. Damit ist $R[M] = \bigcap_{i \in I} R[M_i]$ nach Aufgabe 20.1 normal, da die einzelnen $R[M_i] \cong R[\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^{n-1}]$ normal sind. □

Beispiel 20.10. Wir betrachten die algebraische Fläche, die durch die Gleichung

$$X^2 Z = Y^2$$

gegeben ist. Wir wollen sie als die Fläche zu einem Monoidring verstehen. Dazu sei

$$M = \langle (1,0), (1,1), (0,2) \rangle \subset \mathbb{N}^2$$

Wegen $(1,1) - (1,0) = (0,1)$ ist $\mathbb{Z}^2$ das Quotientengitter (Differenzgruppe). Da $2(0,1) = (0,2) \in M$ ist, muss $\mathbb{N}^2$ die Normalisierung von M sein. Die drei Erzeuger ergeben einen surjektiven Monoidhomomorphismus

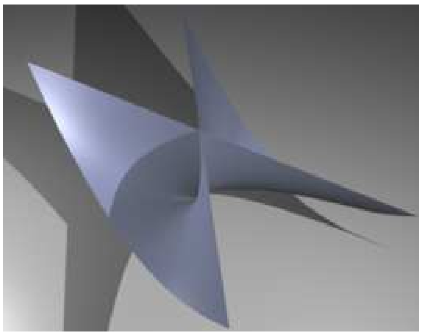
$$\mathbb{N}^3 \longrightarrow M,\, e_i \longmapsto m_i\,, i = 1, 2, 3\,.$$

Diese monomiale Abbildung $\mathbb{N}^3 \longrightarrow M \subset \mathbb{N}^2$ bedeutet geometrisch die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow K\text{–Spek}\,(K[M]) \hookrightarrow \mathbb{A}_K^3,\ (s,t) \longmapsto (s, st, t^2)\,.$$

Dabei gehen (monomial gesehen) $2e_1 + e_3$ und $2e_2$ beide auf das Element $(1,1)$, und das liefert die Gleichung $X^2Z = Y^2$, die man natürlich auch direkt ablesen kann.

Man kann die definierende Gleichung auch als $Z = \left(\frac{Y}{X}\right)^2$ ansehen. Von $K[X,Y]$ ausgehend wird also ein Quadrat zu $\frac{Y}{X}$ adjungiert.



Beispiel 20.11. Wir betrachten das durch $(1,0), (-1,2)$ und $(0,1)$ erzeugte Untermonoid $M \subseteq \mathbb{Z}^2$. Für den zugehörigen Monoidring gilt $K[M] \cong K[X,Y,Z]/(Z^2 - XY)$. Wir behaupten, dass das Monoid normal ist, also mit seiner Normalisierung übereinstimmt. Die beiden Erzeuger $(1,0)$ und $(-1,2)$ definieren je eine Gerade in $\mathbb{R}^2$, und das Monoid besteht aus allen Gitterpunkten (Punkte im $\mathbb{Z}^2$) innerhalb des durch diese Geraden definierten Kegels. Dies sieht man so: Die Gitterpunkte in diesem Kegel sind gegeben durch die zwei Bedingungen

$$\left\{(s,t) \in \mathbb{Z}^2 | \, t \geq 0 \text{ und } t \geq -2s\right\} .$$

Ein Punkt daraus mit $s \geq 0$ gehört offensichtlich zu M. Sei also (s,t) ein Punkt daraus mit $s < 0$. Wegen der zweiten linearen Bedingung kann man

$$(s,t) = -s(-1,2) + (t-2s)(0,1)$$

schreiben, was wegen $t - 2s \geq 0$ zu M gehört.

Mit den zwei Geraden lässt sich M auch sofort als $M = H_1 \cap H_2$ beschreiben, mit $H_1 = \{(s,t) | \, t \geq 0\} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ und $H_1 = \{(s,t) | \, t \geq -2s\} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, wobei die zweite Identifizierung von der $\mathbb{Z}$-Basis $(-1,2), (0,1)$ herrührt. Aus dieser expliziten Beschreibung folgt, dass der zugehörige Monoidring normal ist.

Monomiale Kurven und Normalisierung

Wir werden später sehen, dass eine algebraische Kurve genau dann normal ist, wenn sie nichtsingulär ist. Im Fall einer monomilaen Kurve lässt sich die Normalisierung einfach beschreiben.

Satz 20.12. *Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein durch teilerfremde $e_1, \ldots, e_n$ erzeugtes Untermonoid, und $K[M] \subseteq K[T]$ die zugehörige Ringerweiterung von Monoidringen. Dann ist $K[T]$ die Normalisierung von $K[M]$. Mit anderen Worten: Die monomiale Abbildung*

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow K\!-\!\operatorname{Spek}\,(K[M])$$

ist eine Normalisierung.

Beweis. Wir haben $K[M] = K[T^{e_1}, \ldots, T^{e_n}] \subseteq K[T]$. Da die Exponenten teilerfremd sind, erzeugen sie die Eins und das bedeutet (multiplikativ betrachtet), dass es ein Monom in diesen Potenzen (auch mit negativen Exponenten) gibt, das gleich T ist. D.h. T ist ein Quotient von Elementen aus $K[M]$ und daher sind die Quotientenkörper gleich. Andererseits erfüllt T eine Ganzheitsgleichung über $K[M]$, beispielsweise $T^{e_1} - T^{e_1} = 0$. Da $K[T]$ normal ist (sogar faktoriell, da es ja ein Hauptidealbereich ist), muss es sich um die Normalisierung handeln. □

Monomiale Kurven liefern also eine Vielzahl an Beispielen, wo die Normalisierung auf der Ebene der K-Spektren eine Bijektion ist. Es handelt sich auch um eine Homöomorphie bezüglich der Zariski-Topologie, die ja im Kurvenfall sehr einfach ist. Dennoch wäre es falsch, die beiden Kurven als identisch anzusehen. Die Normalisierung ist (bei $e_i \neq 1$ für alle i) auf der Ringebene keine Bijektion, und in der algebraischen Geometrie darf man nicht nur die mengentheoretische oder topologische Gestalt des Nullstellengebildes anschauen, man darf die Ringe (und die Gleichungen selbst) im Hintergrund nicht völlig vergessen. Den Unterschied sieht man auch in der eingebetteten Situation, wo die Neilsche Parabel eine Spitze besitzt.

Mit der Normalisierung bekommt der Singularitätsgrad einer monomialen Kurve eine neue Interpretation.

Lemma 20.13. *Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein durch teilerfremde Erzeuger definiertes numerisches Monoid. Es sei $R = K[M]$ der zugehörige Monoidring und $R^{\text{norm}} = K[T]$ die Normalisierung davon. Dann gilt für den Singularitätsgrad von M die Gleichung*

$$\delta(M) = \dim_K(R^{\text{norm}}/R)\,.$$

Beweis. Die Normalisierung besitzt die K-Basis T^m, $m \in \mathbb{N}$, und der Monoidring $K[M]$ besitzt die K-Basis T^m, $m \in M$. Daher besitzt der Restraum $K[T]/K[M]$ die K-Basis T^m, $m \in \mathbb{N} \setminus M$. Die Dimension des Restraumes ist die Anzahl der Elemente einer Basis, und diese Anzahl ist die Anzahl der Lücken, also der Singularitätsgrad von M. □

Abbildungsverzeichnis