Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 4

Zwei Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1. Geben Sie eine Darstellung des ggT von 5 und 7 an. Wie viele solche Darstellungen gibt es?

Aufgabe 2. Bestimme den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache von 105 und 150.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 3711 und 4115.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 12733 und 3983. Geben Sie eine Darstellung des ggT von 12733 und 3983 an.

Vor der nächsten Aufgabe erinnern wir an die Fibonacci-Zahlen.

Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* f_n ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1\,, f_2 := 1 \text{ und } f_{n+2} := f_{n+1} + f_n\,.$$

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Wende auf zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen den euklidischen Algorithmus an. Welche Gesetzmäßigkeit tritt auf?

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Alle Flöhe leben auf einem unendlichen Zentimeter-Band. Ein Flohmännchen springt bei jedem Sprung 78 cm und die deutlich kräftigeren Flohweibchen springen mit jedem Sprung 126 cm. Die Flohmännchen Florian, Flöhchen und Carlo sitzen in den Positionen $-123, 55$ und -49. Die Flohweibchen Flora und Florentina sitzen in Position 17 bzw. 109. Welche Flöhe können sich treffen?

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Die Wasserspedition „Alles im Eimer“ verfügt über 77-, 91- und 143-Liter Eimer, die allerdings keine Markierungen haben. Sie erhält den Auftrag, genau einen Liter Wasser von der Nordsee in die Ostsee zu transportieren. Wie kann sie den Auftrag erfüllen?

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Bestimme einen Erzeuger für die Untergruppe $H \subseteq (\mathbb{Q}, +, 0)$, die durch die rationalen Zahlen

$$\frac{8}{7}, \frac{5}{11}, \frac{7}{10}$$

erzeugt wird.

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Sei $a_1, \ldots, a_n$ eine Menge von ganzen Zahlen. Zeige, dass das nichtnegative kleinste gemeinsame Vielfache der a_i mit demjenigen gemeinsamen Vielfachen übereinstimmt, das bezüglich der Ordnungsrelation „$\leq$“ das kleinste gemeinsame Vielfache ist.

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Zeige, dass die Verknüpfung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ (a, b) \longmapsto \operatorname{kgV}(a, b)$$

(wobei man das kgV ≥ 0 wählt), ein Monoid definiert.