Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 8

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 8.1. Zeige, dass die Menge der algebraischen Zahlen $\mathbb{A}$ keine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 8.2. Zeige, dass es nur abzählbar viele algebraische Zahlen gibt.

Aufgabe 8.3. Es seien $K \subseteq L$ und $L \subseteq M$ algebraische Körpererweiterungen. Zeige, dass dann auch $K \subseteq M$ eine algebraische Körpererweiterung ist.

Aufgabe 8.4. Es sei K ein Körper. Zeige, dass es außer K keine endliche K-Unteralgebra $A \subseteq K[X]$ gibt.

Aufgabe 8.5. Es sei K ein kommutativer Ring und A eine kommutative K-Algebra. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Die Identität ist ein K-Algebra-Automorphismus.
(2) Die Verknüpfung $\varphi \circ \psi$ von zwei K-Algebra-Automorphismen φ und ψ ist wieder ein Automorphismus.
(3) Die Umkehrabbildung φ^{-1} zu einem K-Algebra-Automorphismus φ ist wieder ein Automorphismus.
(4) Die Menge der K-Algebra-Automorphismen bilden mit der Hintereinanderschaltung als Verknüpfung eine Gruppe.

Aufgabe 8.6. Es sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und sei $K \subseteq L$ eine quadratische Körpererweiterung. Zeige, dass es neben der Identität einen weiteren K-Algebra-Automorphismus $L \rightarrow L$ gibt.

Aufgabe 8.7. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass ein Polynom $P \in K[X]$ genau dann irreduzibel ist, wenn das um $a \in K$ „verschobene" Polynom (das entsteht, wenn man in P die Variable X durch $X - a$ ersetzt) irreduzibel ist.

Aufgabe 8.8. Sei $x = \sqrt{2} + \sqrt{5} \in \mathbb{R}$ und betrachte die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(x) = L .$$

Zeige, dass diese Körpererweiterung algebraisch ist und bestimme den Grad der Körpererweiterung, das Minimalpolynom von x und das Inverse von x. (Man darf dabei verwenden, dass $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$ irrationale Zahlen sind.)

Aufgabe 8.9. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und es sei $x_i \in L$, $i \in I$, ein Körper-Erzeugendensystem von L über K. Es seien $\varphi, \psi \in \operatorname{Gal}(L|K)$ mit $\varphi(x_i) = \psi(x_i)$ für alle $i \in I$. Zeige, dass $\varphi = \psi$ ist.

Aufgabe 8.10. Es sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, eine algebraische Zahl. Zeige, dass auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z} = a - bi$ sowie der Real- und der Imaginärteil von z algebraisch sind. Man bestimme den Grad der Körpererweiterung

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}\,.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.11. (3 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und sei $f \in L$ ein Element. Zeige: f ist genau dann algebraisch über K, wenn $K[f] = K(f)$ ist.

Aufgabe 8.12. (3 Punkte)

Bestimme das Inverse von $2x^2+3x-1$ im Körper $\mathbb{Q}[X]/(X^3-5)$ (x bezeichnet die Restklasse von X).

Aufgabe 8.13. (4 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, wobei L algebraisch abgeschlossen sei. Zeige, dass auch der algebraische Abschluss $\overline{K}$ von K in L algebraisch abgeschlossen ist.[1]

Aufgabe 8.14. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei $K[X,Y]$ der Polynomring über K in zwei Variablen. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom in der einen Variablen X. Zeige, dass durch die Einsetzung $X \mapsto X$ und $Y \mapsto Y + P(X)$ ein K-Algebra-Automorphismus von $K[X,Y]$ in sich definiert wird, der im Allgemeinen nicht linear ist.

Aufgabe 8.15. (5 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $L = K(X)$ der rationale Funktionenkörper über K. Zeige, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ einen Ringhomomorphismus $\varphi : L \to L$ gibt derart, dass $L \cong \varphi(L) \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad n ist.

[1] Die Bezeichnungen wären natürlich schlecht gewählt, wenn dies nicht gelten würde.