Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 27

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 27.1. Es sei X ein topologischer Raum und $x, y \in X$. Zeige, dass die Homotopie von Wegen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Wege von x nach y ist.

Aufgabe 27.2. Es sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass die Verknüpfung von stetigen Wegen

$$\gamma, \delta \colon [0,1] \longrightarrow X$$

durch Hintereinanderausführung zu einer wohldefinierten Verknüpfung auf den Homotopieklassen von Wegen führt.

Aufgabe 27.3. Es sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Zeige, dass die Verknüpfung eines stetigen geschlossenen Weges γ mit Aufpunkt x mit dem konstanten Weg x homotop zu γ ist.

Aufgabe 27.4. Es sei X ein topologischer Raum und $x, y \in X$. Es sei

$$\gamma \colon [0,1] \longrightarrow X$$

ein stetiger Weg von x nach y und sei γ^{-1} der umgekehrt durchlaufene Weg, also $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t)$. Zeige, dass die Verknüpfung $\gamma\gamma^{-1}$ homotop zum konstanten Weg x ist.

Aufgabe 27.5. Es sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Zeige, dass die Verknüpfung von Homotopieklassen geschlossener Wege mit Aufpunkt x assoziativ ist.

Aufgabe 27.6. Es sei X ein topologischer Raum und

$$\gamma \colon S^1 \longrightarrow X$$

ein stetiger geschlossener Weg. Zeige, dass γ genau dann nullhomotop ist, wenn es eine stetige Fortsetzung von γ auf die abgeschlossene Kreisscheibe gibt.

Aufgabe 27.7. Zeige, dass der $\mathbb{R}^n$ kontrahierbar ist.

Aufgabe 27.8. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $x \in X$ mit $\varphi(x) = y$. Zeige, dass die Zuordnung

$$\gamma \mapsto \varphi \circ \gamma$$

eine wohldefinierte Abbildung auf der Menge der Homotopieklassen geschlossener Wege (mit Aufpunkt x bzw. y) induziert.

Aufgabe 27.9. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $x \in X$ mit $\varphi(x) = y$. Zeige, dass die Zuordnung

$$\gamma \mapsto \varphi \circ \gamma$$

zu einem Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$$

führt.

Aufgabe 27.10. Zeige, dass bei $n \geq 3$ der $\mathbb{R}^n \setminus \{P\}$ einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 27.11. Es sei

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ein Gruppenhomomorphismus und

$$\varphi\colon \mathbb{C}^\times \cong \left(\operatorname{Spek}\left(\mathbb{C}[T, T^{-1}]\right)\right)_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}^\times \cong \left(\operatorname{Spek}\left(\mathbb{C}[T, T^{-1}]\right)\right)_{\mathbb{C}}$$

die zugehörige Spektrumsabbildung zwischen den Spektra der Monoidringe. Wie sieht die zugehörige Abbildung der Fundamentalgruppen aus?

Aufgabe 27.12. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow S^1,\ t \longmapsto (\cos t\,,\ \sin t\,)\,,$$

eine Überlagerung ist.

Aufgabe 27.13. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z \longmapsto \exp z,$$

eine Überlagerung ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 27.14. (3 Punkte)

Bestimme die Fundamentalgruppe des reell-projektiven Raumes $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 27.15. (4 Punkte)

Es sei $R = \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}$ eine endlich erzeugte positiv-graduierte $\mathbb{C}$-Algebra und $X = \mathbb{C}$–Spek $(R) \subseteq \mathbb{C}^n$ das $\mathbb{C}$-Spektrum von R. Es sei $S = \{z \in X \mid \; || z || = 1\}$ die „Sphäre“ von X (bezüglich der gegebenen Einbettung). Zeige, dass es eine Homotopie zwischen $X \setminus \{0\}$ und S gibt. Man folgere, dass die punktierte Fundamentalgruppe von R gleich der Fundamentalgruppe von S ist.