Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 6

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Bestimme alle primitiven Elemente von $\mathbb{Z}/(27)$.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Gebe für die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/(16))^\times$ explizit einen Isomorphismus zu einem Produkt von (additiven) zyklischen Gruppen an.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Sei n eine natürliche Zahl derart, dass $(\mathbb{Z}/(n))^\times$ zyklisch ist. Zeige, dass die Anzahl der primitiven Elemente gleich $\varphi(\varphi(n))$ ist, wobei φ die Eulersche Funktion bezeichnet. Wie groß ist deren Anzahl, wenn $(\mathbb{Z}/(n))^\times$ nicht zyklisch ist?

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Sei p eine Primzahl und $r \geq 2$. Beschreibe explizit die Elemente im Kern der Abbildung

$$(\mathbb{Z}/(p^r))^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/(p^{r-1}))^\times .$$

Aufgabe 5. (7 Punkte)

a) Sei K ein Körper. Zeige, dass die Einheitengruppe von K nicht zyklisch unendlich ist.

b) Sei R ein kommutativer Ring, dessen Charakteristik nicht zwei ist. Zeige, dass die Einheitengruppe von R nicht zyklisch unendlich ist.

c) Beschreibe einen kommutativen Ring, dessen Einheitengruppe zyklisch unendlich ist.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Sei p eine Primzahl und $e \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Potenzieren

$$(\mathbb{Z}/(p))^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/(p))^\times,\ x \longmapsto x^e ,$$

eine Bijektion ist genau dann, wenn e und $p-1$ teilerfremd sind.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ der zugehörige Restklassenkörper. Konstruiere Ringe

$$\mathbb{F}_p[i] = \mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p i = \{a + bi : a, b \in \mathbb{F}_p\}$$

in der gleichen Weise, wie man die komplexen Zahlen definiert. Charakterisiere, für welche p diese Konstruktion einen Körper liefert.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Seien a, b und r positive natürliche Zahlen. Zeige, dass die Teilbarkeit $a^r | b^r$ die Teilbarkeit $a|b$ impliziert.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Seien a und b positive natürliche Zahlen. Seien $r_n\,, n \in \mathbb{N}$, und $s_n\,, n \in \mathbb{N}$, Folgen von positiven natürlichen Zahlen derart, dass die Teilbarkeitsbeziehung

$$a^{r_n} | b^{s_n}$$

für alle n gilt. Es sei vorausgesetzt, dass die Quotientenfolge r_n/s_n gegen 1 konvergiert. Zeige, dass a ein Teiler von b ist.