

# Mathematik für Anwender II

Prof. Dr. Holger Brenner  
Universität Osnabrück  
Fachbereich Mathematik/Informatik

Sommersemester 2012

## INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	4
31. Vorlesung - Euklidische Vektorräume	5
31. Arbeitsblatt	11
32. Vorlesung - Metrische Räume	14
32. Arbeitsblatt	21
33. Vorlesung - Stetige Abbildungen	24
33. Arbeitsblatt	30
34. Vorlesung - Differenzierbare Kurven	35
34. Arbeitsblatt	41
35. Vorlesung - Kurvenlänge	45
35. Arbeitsblatt	51
36. Vorlesung - Wegintegrale	56
36. Arbeitsblatt	62
37. Vorlesung - Gewöhnliche Differentialgleichungen	65
37. Arbeitsblatt	71
38. Vorlesung - Differentialgleichungen höherer Ordnung	73
38. Arbeitsblatt	82
39. Vorlesung - Eigentheorie	84
39. Arbeitsblatt	92
40. Vorlesung - Diagonalisierbarkeit	95
40. Arbeitsblatt	101
41. Vorlesung - Trigonalisierbarkeit	105
41. Arbeitsblatt	111
42. Vorlesung - Lineare Differentialgleichungssysteme I	114
42. Arbeitsblatt	121
43. Vorlesung - Lineare Differentialgleichungssysteme II	124
43. Arbeitsblatt	132
44. Vorlesung - Richtungsableitung	135
44. Arbeitsblatt	141
45. Vorlesung - Partielle Ableitung	144
45. Arbeitsblatt	149

46. Vorlesung - Totale Differenzierbarkeit	151
46. Arbeitsblatt	156
47. Vorlesung - Die Kettenregel	160
47. Arbeitsblatt	166
48. Vorlesung - Taylor-Formel	168
48. Arbeitsblatt	174
49. Vorlesung - Extrema	177
49. Arbeitsblatt	184
50. Vorlesung - Kriterien für Extrema	187
50. Arbeitsblatt	195
51. Vorlesung - Diffeomorphismen	199
51. Arbeitsblatt	205
52. Vorlesung - Implizite Abbildungen	208
52. Arbeitsblatt	214
53. Vorlesung - Picard-Lindelöf	218
54. Arbeitsblatt	224
54. Vorlesung - Gradientenfelder	227
54. Arbeitsblatt	233
55. Vorlesung - Volumina	236
55. Arbeitsblatt	244
56. Vorlesung - Mehrfachintegrale	246
56. Arbeitsblatt	253
57. Vorlesung - Die Transformationsformel	255
57. Arbeitsblatt	261
58. Vorlesung - Der Satz von Green	264
58. Arbeitsblatt	272
Anhang A: Bildlizenzen	275
Abbildungsverzeichnis	275

## VORWORT

Dieses Skript gibt die Vorlesung Mathematik für Anwender I wieder, die ich im Wintersemester 2011/2012 an der Universität Osnabrück gehalten habe. Ich habe diese Veranstaltung in dieser Form zum ersten Mal durchgeführt, bei einem zweiten Durchlauf würden sicher noch viele Korrekturen und Änderungen dazukommen. Dies bitte ich bei einer kritischen Durchsicht wohlwollend zu berücksichtigen.

Der Text wurde auf Wikiversity geschrieben und steht unter der Creative-Commons-Attribution-ShareAlike 3.0. Die Bilder wurden von Commons übernommen und unterliegen den dortigen freien Lizenzen. In einem Anhang werden die einzelnen Bilder mit ihren Autoren und Lizenzen aufgeführt. Die CC-BY-SA 3.0 Lizenz ermöglicht es, dass das Skript in seinen Einzelteilen verwendet, verändert und weiterentwickelt werden darf. Ich bedanke mich bei der Wikimedia-Gemeinschaft und insbesondere bei Benutzer Exxu für die wichtigen Beiträge im Projekt semantische Vorlagen, die eine weitgehend automatische Erstellung des Latexcodes ermöglichen.

Ich bedanke mich bei Herrn Daniel Brinkmann für Korrekturen und die Koordination des Übungsbetriebs, ferner bei den Übungsgruppenleitern Georg Biedermann, Daniel Brinkmann, Alessio Caminata, Julio Moyano und bei den Tutoren Danny Gomez-Ramirez, Linda Kock, Henning Mähr, Attila Meeßen, Michael Robben, Kristina Volk, Sebastian Voß für die hervorragende Mitarbeit bei der Veranstaltung. Bei Frau Marianne Gausmann bedanke ich mich für die Erstellung der Pdf-Files und bei den Studierenden für einzelne Korrekturen. Bei Jonathan Steinbuch bedanke ich mich für Verlinkungen und Korrekturen.

Holger Brenner

## 31. VORLESUNG - EUKLIDISCHE VEKTORRÄUME

Im Anschauungsraum kann man nicht nur Vektoren addieren und skalieren, sondern ein Vektor hat auch eine Länge, und die Lagebeziehung von zwei Vektoren zueinander wird durch den Winkel zwischen ihnen ausgedrückt. Länge und Winkel werden beide durch den Begriff des *Skalarprodukts* präzisiert. Dafür muss ein reeller Vektorraum<sup>1</sup> vorliegen.

**Definition 31.1.** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* auf  $V$  ist eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) Es ist

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$$

für alle  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $x_1, x_2, y \in V$  und ebenso in der zweiten Komponente.

(2) Es ist

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

für alle  $v, w \in V$ .

(3) Es ist  $\langle v, v \rangle \geq 0$  für alle  $v \in V$  und  $\langle v, v \rangle = 0$  genau dann, wenn  $v = 0$  ist.

Die dabei auftretenden Eigenschaften heißen *Bilinearität* (das ist nur eine andere Bezeichnung für multilinear, wenn der Definitionsbereich das Produkt von zwei Vektorräumen ist), *Symmetrie* und *positive Definitheit*.

**Beispiel 31.2.** Auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (v, w) = ((v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^n v_i w_i,$$

ein Skalarprodukt, das man das *Standardskalarprodukt* nennt. Eine einfache Rechnung zeigt, dass dies in der Tat ein Skalarprodukt ist.

Beispielsweise ist im  $\mathbb{R}^3$  mit dem Standardskalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot (-1) - 5 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = -11.$$

**Definition 31.3.** Ein reeller, endlichdimensionaler Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt versehen ist, heißt *euklidischer Vektorraum*.

<sup>1</sup>Auch für komplexe Vektorräume gibt es Skalarprodukte, was wir aber nicht behandeln werden.

Zu einem euklidischen Vektorraum  $V$  ist jeder Untervektorraum  $U \subseteq V$  selbst wieder ein euklidischer Vektorraum, da man das Skalarprodukt auf  $U$  einschränken kann und dabei die definierenden Eigenschaften erhalten bleiben.

### Norm und Abstand

Mit einem Skalarprodukt kann man die Länge eines Vektors und damit auch den Abstand zwischen zwei Vektoren erklären.

**Definition 31.4.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Dann nennt man zu einem Vektor  $v \in V$  die reelle Zahl

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

die *Norm* von  $v$ .

**Satz 31.5.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und der zugehörigen Norm  $\| - \|$ . Dann gilt die Cauchy-Schwarzsche Abschätzung, nämlich

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

für alle  $v, w \in V$ .

*Beweis.* Bei  $w = 0$  ist die Aussage richtig. Sei also  $w \neq 0$  und damit auch  $\|w\| \neq 0$ . Damit hat man die Abschätzungen

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle v - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w, v - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \langle w, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \langle v, w \rangle + \frac{\langle v, w \rangle \langle v, w \rangle}{\|w\|^4} \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2}. \end{aligned}$$

Multiplikation mit  $\|w\|^2$  und Wurzelziehen ergibt das Resultat.  $\square$

**Bemerkung 31.6.** Für zwei von null verschiedene Vektoren  $v$  und  $w$  in einem euklidischen Vektorraum  $V$  folgt aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, dass

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$$

ist. Damit kann man mit Hilfe der trigonometrischen Funktion *Kosinus* bzw. der Umkehrfunktion den Winkel zwischen den beiden Vektoren definieren, nämlich durch

$$\angle(v, w) = \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

**Lemma 31.7.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Dann gelten für die zugehörige Norm folgende Eigenschaften.

- (1)  $\|v\| \geq 0$ ,
- (2)  $\|v\| = 0$  genau dann, wenn  $v = 0$  ist.
- (3) Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $v \in V$  gilt

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| .$$

- (4) Für  $v, w \in V$  gilt

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| .$$

*Beweis.* Die ersten beiden Eigenschaften folgen direkt aus der Definition des Skalarprodukts. Die Multiplikativität folgt aus

$$\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle = \lambda^2 \|v\|^2 .$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung schreiben wir

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|\langle v, w \rangle| \end{aligned}$$

Aufgrund von Satz 31.5 ist dies  $\leq (\|v\| + \|w\|)^2$ . Diese Abschätzung überträgt sich auf die Quadratwurzeln.  $\square$

**Lemma 31.8.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und der zugehörigen Norm  $\| - \|$ . Dann gilt die Beziehung

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} (\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2) .$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 31.2.  $\square$

**Definition 31.9.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zu zwei Vektoren  $v, w \in V$  nennt man

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

den *Abstand* zwischen  $v$  und  $w$ .

**Lemma 31.10.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Dann besitzt der zugehörige Abstand die folgenden Eigenschaften (dabei sind  $u, v, w \in V$ ).

- (1) Es ist  $d(v, w) \geq 0$ .
- (2) Es ist  $d(v, w) = 0$  genau dann, wenn  $v = w$ .
- (3) Es ist  $d(v, w) = d(w, v)$ .
- (4) Es ist

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w) .$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 31.4.  $\square$

Damit ist ein euklidischer Raum insbesondere ein *metrischer Raum*, womit wir uns in den nächsten Vorlesungen beschäftigen werden.

## Orthogonalität

Mit dem Skalarprodukt kann man die Eigenschaft zweier Vektoren, aufeinander senkrecht zu stehen, ausdrücken.

**Definition 31.11.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Man nennt zwei Vektoren  $v, w \in V$  *orthogonal* zueinander (oder *senkrecht*), wenn

$$\langle v, w \rangle = 0$$

ist.

**Definition 31.12.** Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Dann heißt

$$U^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von  $U$ .

**Beispiel 31.13.** Sei  $V = \mathbb{R}^n$  versehen mit dem Standardskalarprodukt. Zum eindimensionalen Untervektorraum  $\mathbb{R}e_i$  zum Standardvektor  $e_i$  besteht das

orthogonale Komplement aus allen Vektoren  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ 0 \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , deren  $i$ -ter Eintrag 0

ist. Zum eindimensionalen Untervektorraum  $\mathbb{R}v$  zu einem Vektor

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0$$

kann man das orthogonale Komplement bestimmen, indem man die Lösungsmenge der linearen Gleichung

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

bestimmt. Zu einem Untervektorraum  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , der durch eine Basis  $v_j =$

$\begin{pmatrix} a_{j1} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{pmatrix}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , gegeben ist, bestimmt man das orthogonale Komplement als Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

wobei  $A = (a_{ji})$  die aus den  $v_j$  gebildete Matrix ist.



**Definition 31.14.** Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum. Eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $V$  heißt *Orthonormalbasis*, wenn gilt

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1 \text{ für alle } i \text{ und } \langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j.$$

Die Elemente in einer Orthonormalbasis haben alle die Norm 1 und sie stehen senkrecht aufeinander. Im  $\mathbb{R}^n$  ist die Standardbasis eine Orthonormalbasis. Das folgende *Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren* erlaubt es, ausgehend von einer Basis eine Orthonormalbasis zu konstruieren.

**Satz 31.15.** *Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und es sei  $v_1, v_2, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Dann gibt es eine Orthonormalbasis  $u_1, u_2, \dots, u_n$  von  $V$  mit<sup>2</sup>*

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_i \rangle = \langle u_1, u_2, \dots, u_i \rangle$$

für alle  $i = 1, \dots, n$ .

*Beweis.* Die Aussage wird durch Induktion über  $i$  bewiesen, d.h. es wird sukzessive eine Familie von orthonormalen Vektoren konstruiert, die jeweils den gleichen Unterraum aufspannen. Für  $i = 1$  muss man lediglich  $v_1$  normieren, also durch  $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$  ersetzen. Sei die Aussage für  $i$  schon bewiesen und sei eine Familie von orthonormalen Vektoren  $u_1, \dots, u_i$  mit  $\langle u_1, \dots, u_i \rangle = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$  bereits konstruiert. Wir setzen

$$w_{i+1} = v_{i+1} - \langle v_{i+1}, u_1 \rangle u_1 - \dots - \langle v_{i+1}, u_i \rangle u_i.$$

Dieser Vektor steht senkrecht auf allen  $u_1, \dots, u_i$  und offenbar ist  $\langle u_1, \dots, u_i, w_{i+1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_i, v_{i+1} \rangle$ . Durch Normieren von  $w_{i+1}$  erhält man  $u_{i+1}$ .  $\square$

**Beispiel 31.16.** Es sei  $V$  der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto 2x + 3y - z.$$

Als Unterraum des  $\mathbb{R}^3$  trägt  $V$  ein Skalarprodukt. Wir möchten eine Orthonormalbasis von  $V$  bestimmen. Dazu betrachten wir die Basis bestehend aus den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Es ist  $\|v_1\| = \sqrt{5}$  und somit ist

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

---

<sup>2</sup>Hier bezeichnet  $\langle \rangle$  den von den Vektoren erzeugten Untervektorraum, nicht das Skalarprodukt.

der zugehörige normierte Vektor. Gemäß dem<sup>3</sup> Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren setzen wir

$$\begin{aligned}
 w_2 &= v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 0 \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Es ist

$$\|w_2\| = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{36}{25} + 1 + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{70}{25}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$$

und daher ist

$$u_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

der zweite Vektor der Orthonormalbasis.

## Isometrien

**Definition 31.17.** Es seien  $V$  und  $W$  zwei euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt  $\varphi$  eine *Isometrie*, wenn für alle  $v, w \in V$  gilt:

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

**Lemma 31.18.** *Es seien  $V$  und  $W$  zwei euklidische Vektorräume und sei*

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

*eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

- (1)  $\varphi$  ist eine Isometrie.
- (2) Für alle  $u, v \in V$  ist  $d(\varphi(u), \varphi(v)) = d(u, v)$ .

---

<sup>3</sup>Häufig ist es numerisch geschickter, zuerst nur zu orthogonalisieren und die Normierung erst zum Schluss durchzuführen, siehe Beispiel Anhang 1.1.

(3) Für alle  $v \in V$  ist  $\|\varphi(v)\| = \|v\|$ .

*Beweis.* Die Richtungen (1)  $\Rightarrow$  (2) und (2)  $\Rightarrow$  (3) sind Einschränkungen und (3)  $\Rightarrow$  (1) folgt aus Lemma 31.8.  $\square$

### 31. ARBEITSBLATT

#### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 31.1.** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und sei  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Zeige, dass die Einschränkung des Skalarproduktes auf  $U$  ebenfalls ein Skalarprodukt ist.

**Aufgabe 31.2.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und der zugehörigen Norm  $\| - \|$ . Zeige, dass die Beziehung

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} (\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

gilt.

**Aufgabe 31.3.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und der zugehörigen Norm  $\| - \|$ . Zeige, dass die sogenannte *Parallelogrammgleichung*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

gilt.

**Aufgabe 31.4.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zeige, dass der zugehörige Abstand die folgenden Eigenschaften besitzt (dabei sind  $u, v, w \in V$ ).

- (1) Es ist  $d(v, w) \geq 0$ .
- (2) Es ist  $d(v, w) = 0$  genau dann, wenn  $v = w$ .
- (3) Es ist  $d(v, w) = d(w, v)$ .
- (4) Es ist

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w).$$

**Aufgabe 31.5.** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und sei  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Zeige, dass das orthogonale Komplement ebenfalls ein Untervektorraum von  $V$  ist.

**Aufgabe 31.6.** Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von  $\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$  erzeugten Untervektorraum im  $\mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe 31.7.** Der  $\mathbb{R}^3$  sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto 3x + y + 7z,$$

versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für  $U$ .

**Aufgabe 31.8.** Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum der Dimension  $n$ . Zeige, dass eine Vektorfamilie  $u_1, \dots, u_n \in V$  genau dann eine Orthonormalbasis von  $V$  ist, wenn die zugehörige lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V, e_i \longmapsto u_i,$$

eine Isometrie zwischen  $\mathbb{R}^n$  und  $V$  ist.

**Aufgabe 31.9.** Man gebe ein Beispiel einer bijektiven linearen Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

an, die keine Isometrie ist, für die aber für alle  $u, v \in V$  die Beziehung

$$\langle u, v \rangle = 0 \text{ genau dann, wenn } \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = 0$$

gilt.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 31.10.** (2 Punkte)

Sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Beweise den *Satz des Pythagoras*: Für zwei Vektoren  $v, w \in V$ , die senkrecht aufeinander stehen, gilt die Beziehung

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 .$$

**Aufgabe 31.11.** (4 Punkte)

Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von  $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  erzeugten Untervektorraum im  $\mathbb{R}^4$ .

**Aufgabe 31.12.** (3 Punkte)

Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und sei  $u_1, \dots, u_n \in V$  eine Orthonormalbasis von  $V$ . Zeige, dass für jeden Vektor  $v \in V$  die Beziehung

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i$$

gilt.

**Aufgabe 31.13.** (3 Punkte)

Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des  $\mathbb{R}^3$ , versehen mit dem Standardskalarprodukt, an.

**Aufgabe 31.14.** (4 Punkte)

Der  $\mathbb{R}^4$  sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^4$  der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z, w) \longmapsto 4x - 3y + 2z - 5w,$$

versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für  $U$ .

**Aufgabe 31.15.** (6 Punkte)

Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1)  $\varphi$  ist eine Isometrie.
- (2) Für jeden Vektor  $v$  mit  $\|v\|=1$  ist auch  $\|\varphi(v)\|=1$ .
- (3) Für jede Orthonormalbasis  $u_i, i = 1, \dots, n$ , ist auch  $\varphi(u_i), i = 1, \dots, n$ , eine Orthonormalbasis.
- (4) Es gibt eine Orthonormalbasis  $u_i, i = 1, \dots, n$ , derart, dass auch  $\varphi(u_i), i = 1, \dots, n$ , eine Orthonormalbasis ist.

## 32. VORLESUNG - METRISCHE RÄUME

Euklidische Räume besitzen nach Definition ein Skalarprodukt. Darauf aufbauend kann man einfach die Norm eines Vektors und den Abstand zwischen zwei Vektoren definieren. Die wichtigsten Eigenschaften dieses euklidischen Abstandes werden im Begriff der *Metrik* bzw. des *metrischen Raumes* axiomatisiert.

**Definition 32.1.** Sei  $M$  eine Menge. Eine Abbildung  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Metrik* (oder *Distanzfunktion*), wenn für alle  $x, y, z \in X$  die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$  (Definitheit),
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie), und
- (3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (Dreiecksungleichung).

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar  $(M, d)$ , wobei  $M$  eine Menge und  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Metrik ist.

Man kann leicht aus den Bedingungen folgern, dass eine Metrik nur nichtnegative Werte annimmt. Der Wert  $d(x, y)$  gibt den Abstand der Punkte  $x$  und  $y$  bezüglich  $d$  an. Oft wird die Metrik nicht in der Notation erwähnt, obwohl es Situationen gibt, in denen verschiedene Metriken auf ein- und derselben Menge betrachtet werden.

**Beispiel 32.2.** Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und

$$d(v, w) := \|v - w\| := \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle}$$

der zugehörige Abstand. Dieser besitzt nach Lemma 31.10 die Eigenschaften einer Metrik. Insbesondere ist im  $\mathbb{R}^n$  der durch

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

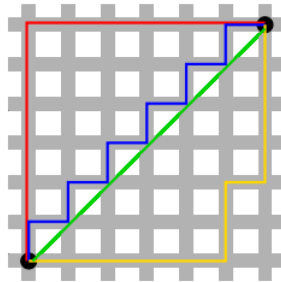
gegebene *euklidische Abstand* eine Metrik.

Wenn wir nichts anderes sagen, so verstehen wir den  $\mathbb{R}^n$  und den  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  stets mit dem euklidischen Abstand. Insbesondere sind die reellen Zahlen und die komplexen Zahlen  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  mit der durch den Betrag definierten Metrik ein metrischer Raum.

**Beispiel 32.3.** Auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

eine Metrik, die man die *Summenmetrik* nennt.



Die Summenmetrik heißt auch *Taxi-Metrik*. Die grüne Linie repräsentiert den euklidischen Abstand, die anderen den Summenabstand.

**Beispiel 32.4.** Auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist

$$d(x, y) = \max(|x_i - y_i|, i = 1, \dots, n)$$

eine Metrik, die man die *Maximumsmetrik* nennt.

**Beispiel 32.5.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Dann ist  $T$  ebenfalls ein metrischer Raum, wenn man

$$d_T(x, y) := d(x, y) \text{ für alle } x, y \in T$$

setzt. Diese Metrik heißt die *induzierte Metrik*.

**Beispiel 32.6.** Zu einer beliebigen Menge  $M$  kann man durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{bei } x = y, \\ 1 & \text{bei } x \neq y, \end{cases}$$

eine Metrik definieren, die die *diskrete Metrik* heißt.

**Definition 32.7.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $x \in M$  und  $\epsilon > 0$  eine positive reelle Zahl. Es ist

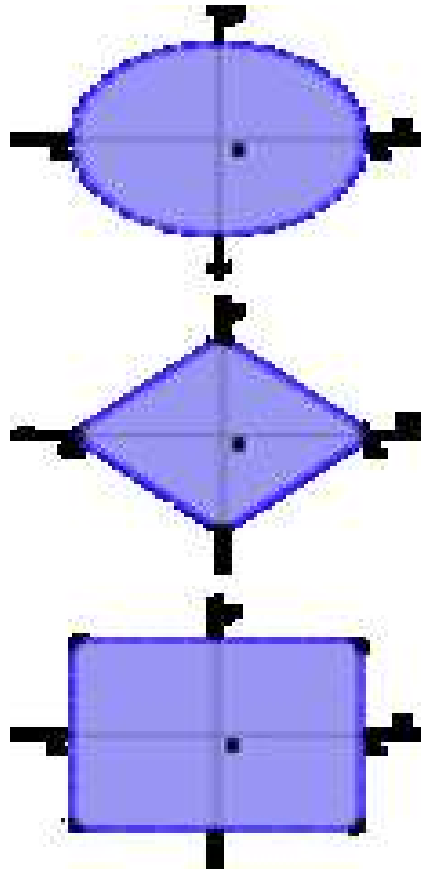
$$U(x, \epsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

die *offene* und

$$B(x, \epsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$$

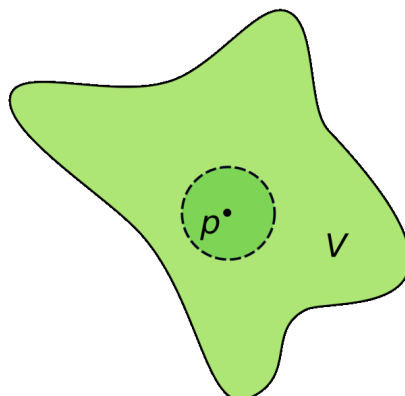
die *abgeschlossene  $\epsilon$ -Kugel* um  $x$ .

Natürlich müssen Kugeln nicht unbedingt kugelförmig aussehen, aber sie tun es in der euklidischen Metrik. Für  $x \in \mathbb{R}$  ist  $U(x, \epsilon)$  einfach das beidseitig offene Intervall  $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ .



Die Gestalt der Kugelumgebungen hängt von der Metrik ab.

### Offene Teilmengen



Eine Teilmenge ist offen, wenn jeder Punkt darin mit einer vollen Kugelumgebung drin liegt. Bei einer solchen Menge ist es entscheidend, ob die *Randpunkte* dazu gehören oder nicht.



**Definition 32.8.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $U \subseteq M$  heißt *offen* (in  $(M, d)$ ), wenn für jedes  $x \in U$  ein  $\epsilon > 0$  existiert mit

$$U(x, \epsilon) \subseteq U.$$

**Definition 32.9.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $A \subseteq M$  heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement  $M \setminus A$  offen ist.

Achtung! Abgeschlossen ist *nicht* das „Gegenteil“ von offen. Die „allermeisten“ Teilmengen eines metrischen Raumes sind weder offen noch abgeschlossen, es gibt aber auch Teilmengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, z.B. die leere Teilmenge und die Gesamtmenge.

**Lemma 32.10.** *Es sei  $M$  ein metrischer Raum und  $x \in M$  ein Punkt. Dann sind die offenen Kugeln  $U(x, \epsilon)$  offen und die abgeschlossenen Kugeln  $B(x, \epsilon)$  abgeschlossen.*

*Beweis.* Sei  $y \in U(x, \epsilon)$ , d.h. es ist  $d(x, y) < \epsilon$ . Wir setzen  $a = \epsilon - d(x, y) > 0$  und behaupten, dass  $U(y, a) \subseteq U(x, \epsilon)$  ist. Dazu sei  $z \in U(y, a)$ . Dann ist aufgrund der Dreiecksungleichung

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + a < \epsilon$$

und somit  $z \in U(x, \epsilon)$ . Für die zweite Behauptung siehe Aufgabe 32.21.  $\square$

**Lemma 32.11.** *Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

- (1) *Die leere Menge  $\emptyset$  und die Gesamtmenge  $M$  sind offen.*
- (2) *Es sei  $I$  eine beliebige Indexmenge und seien  $U_i, i \in I$ , offene Mengen. Dann ist auch die Vereinigung*

$$\bigcup_{i \in I} U_i$$

*offen.*

- (3) *Es sei  $I$  eine endliche Indexmenge und seien  $U_i, i \in I$ , offene Mengen. Dann ist auch der Durchschnitt*

$$\bigcap_{i \in I} U_i$$

*offen.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 32.7.  $\square$

## Folgen in metrischen Räumen

Wir besprechen die Konvergenz einer Folge in einem metrischen Raum. Eine Folge im  $\mathbb{R}^2$  ist beispielsweise durch

$$x_n = (\cos n, \sin n), n \in \mathbb{N}.$$

Es handelt sich um eine Folge, die sich auf dem Einheitskreis bewegt, und zwar dreht sich der Punkt um die Bogenlänge 1 (also um ca. 57,3 Grad). Die Folgenglieder nähern sich also nicht untereinander an, sodass keine Konvergenz zu erwarten ist. Bei der Folge

$$y_n = \left( \frac{1}{n} \cos n, \frac{1}{n} \sin n \right), n \in \mathbb{N},$$

bewegen sich die Glieder auf einer „gedachten Spirale“. Die Punkte drehen sich nach wie vor um den gleichen Winkel, allerdings wird der Abstand zum Nullpunkt immer kleiner, sodass man Konvergenz gegen 0 erwarten kann.

**Definition 32.12.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $M$ . Man sagt, dass die Folge gegen  $x \in M$  *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem  $\epsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$ , gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  derart, dass für alle  $n \geq n_0$  die Beziehung

$$d(x_n, x) \leq \epsilon$$

gilt. In diesem Fall heißt  $x$  der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert), andernfalls, dass sie *divergiert*.

Diese Definition stimmt natürlich für  $M = \mathbb{R}$  mit unserem bisherigen Begriff für konvergente Folge überein.

**Lemma 32.13.** *Der  $\mathbb{R}^m$  sei mit der euklidischen Metrik versehen und sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}^m$  mit*

$$z_n = (z_{1n}, \dots, z_{mn}).$$

*Dann konvergiert die Folge genau dann, wenn alle Komponentenfolgen  $(z_{in})_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  konvergieren.*

*Beweis.* Sei die Gesamtfolge konvergent gegen  $z = (z_1, \dots, z_m)$ . Wir behaupten, dass die  $i$ -te Komponentenfolge  $(z_{in})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $z_i$  konvergiert. Sei (ohne Einschränkung)  $i = 1$  und  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Wegen der Konvergenz der Gesamtfolge gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $d(z_n, z) \leq \epsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Daher ist

$$\begin{aligned} |z_{1n} - z_1| &= \sqrt{(z_{1n} - z_1)^2} \\ &\leq \sqrt{(z_{1n} - z_1)^2 + (z_{2n} - z_2)^2 + \dots + (z_{mn} - z_m)^2} \\ &= d(z_n, z) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Seien nun alle Komponentenfolgen konvergent, wobei die  $i$ -te Folge den Grenzwert  $z_i$  besitzen möge, und sei ein  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Wir setzen  $z = (z_1, \dots, z_m)$  und behaupten, dass die Folge gegen  $z$  konvergiert. Zu  $\epsilon/m$

gibt es für jede Komponentenfolge ein  $n_{0i}$  derart, dass  $|z_{in} - z_i| \leq \epsilon/m$  für alle  $n \geq n_{0i}$  gilt. Dann gilt für alle

$$n \geq n_0 = \max(n_{0i}, i = 1, \dots, m)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} d(z_n, z) &= \sqrt{(z_{1n} - z_1)^2 + \dots + (z_{mn} - z_m)^2} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{m}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\epsilon}{m}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon^2}{m}} \\ &= \frac{\epsilon}{\sqrt{m}} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

Insbesondere konvergiert eine Folge von komplexen Zahlen genau dann, wenn die zugehörigen Folgen der Realteile und der Imaginärteile konvergieren.

Für eine konvergente reelle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  haben wir im ersten Semester die Eigenschaft kennengelernt, dass wenn sämtliche Folgenglieder  $\geq a$  sind, dass dann auch der Limes  $\geq a$  ist (für „ $>$ “ gilt das nicht). Die Hinrichtung der folgenden Aussage ist eine wesentliche Verallgemeinerung dieses Sachverhalts.

**Satz 32.14.** *Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Dann ist  $T$  genau dann abgeschlossen, wenn jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$ , die in  $M$  konvergiert, bereits in  $T$  konvergiert.*

*Beweis.* Sei zunächst  $T$  abgeschlossen und eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$  gegeben, die in  $M$  gegen  $x \in M$  konvergiert. Wir müssen zeigen, dass  $x \in T$  ist. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann liegt  $x$  im offenen Komplement von  $T$  und daher gibt es ein  $\epsilon > 0$  derart, dass der gesamte  $\epsilon$ -Ball  $U(x, \epsilon)$  im Komplement von  $T$  liegt. Also ist

$$T \cap U(x, \epsilon) = \emptyset.$$

Da die Folge aber gegen  $x$  konvergiert, gibt es ein  $n_0$  derart, dass alle Folgenglieder  $x_n$ ,  $n \geq n_0$ , zu diesem Ball gehören. Da sie andererseits in  $T$  liegen, ist dies ein Widerspruch. Sei nun  $T$  nicht abgeschlossen. Wir müssen eine Folge in  $T$  konstruieren, die in  $X$  konvergiert, deren Grenzwert aber nicht zu  $T$  gehört. Da  $T$  nicht abgeschlossen ist, ist das Komplement  $U := X \setminus T$  nicht offen. D.h. es gibt einen Punkt  $x \in U$  derart, dass in jedem  $\epsilon$ -Ball von  $x$  auch Punkte außerhalb von  $U$ , also in  $T$  liegen. Insbesondere ist also für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_+$  der Durchschnitt

$$T \cap U\left(x, \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset.$$

Wir wählen aus dieser Schnittmenge ein Element  $x_n$  und behaupten, dass die sich ergebende Folge die gewünschten Eigenschaften besitzt. Zunächst liegen nach Konstruktion alle Folgenglieder in  $T$ . Die Folge konvergiert gegen  $x$ , da man sich hierzu auf  $\epsilon = 1/n$  beschränken kann und alle Folgenglieder  $x_m$ ,  $m \geq n$ , in  $U(x, \frac{1}{m}) \subseteq U(x, \frac{1}{n})$  liegen. Da der Grenzwert einer Folge im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist, und  $x \notin T$  ist, konvergiert die Folge in  $T$  nicht.  $\square$

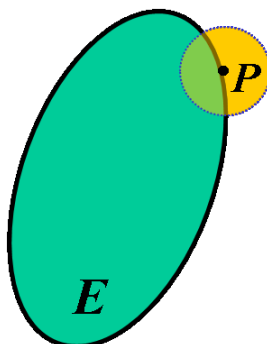
### Randpunkte

**Definition 32.15.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Ein Punkt  $x \in M$  heißt *Randpunkt* von  $T$ , wenn für jedes  $\epsilon > 0$  der offene Ball

$$U(x, \epsilon)$$

sowohl Punkte aus  $T$  als auch Punkte aus  $M \setminus T$  enthält.

Die Menge aller Randpunkte von  $T$  heißt *Rand* von  $T$ , geschrieben  $\text{Rand}(T)$ .



**Beispiel 32.16.** Zu einem offenen (oder abgeschlossenen) Intervall  $]a, b[ \subseteq \mathbb{R}$  sind  $a$  und  $b$  die beiden Randpunkte. Zu einer offenen (oder abgeschlossenen) Kreisscheibe

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < r \right\}$$

ist die Kreislinie

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = r \right\}$$

der Rand.

**Definition 32.17.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Ein Punkt  $a \in M$  heißt *Berührungspunkt* von  $T$ , wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  der Durchschnitt

$$T \cap U(a, \epsilon) \neq \emptyset.$$

Ein Punkt ist genau dann ein Randpunkt von  $T$ , wenn er sowohl von  $T$  als auch vom Komplement  $M \setminus T$  ein Berührungspunkt ist.

## 32. ARBEITSBLATT

**Aufwärmataufgaben**

**Aufgabe 32.1.** Zeige, dass die Summenmetrik im  $\mathbb{R}^n$  eine Metrik ist.

**Aufgabe 32.2.** Zeige, dass die Maximumsmetrik im  $\mathbb{R}^n$  eine Metrik ist.

**Aufgabe 32.3.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Zeige, dass die induzierte Metrik auf  $T$  in der Tat eine Metrik ist.

**Aufgabe 32.4.** Zeige, dass auf jeder Menge  $M$  die diskrete Metrik in der Tat eine Metrik ist.

**Aufgabe 32.5.\***

Es seien  $P = (\frac{3}{4}, -1)$  und  $Q = (2, \frac{1}{5})$  zwei Punkte im  $\mathbb{R}^2$ . Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in der

- a) euklidischen Metrik,
- b) der Summenmetrik,
- c) und der Maximumsmetrik.

Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

**Aufgabe 32.6.** Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum,  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum und  $v \in V$  ein Vektor. Zeige, dass der Abstand  $d(v, u)$  zu einem Vektor  $u \in U$  genau in dem (eindeutig bestimmten) Punkt  $u_0 \in U$  minimal wird, für den  $v - u_0$  orthogonal zu  $U$  ist.

**Aufgabe 32.7.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Zeige, dass folgende Eigenschaften gelten.

- (1) Die leere Menge  $\emptyset$  und die Gesamtmenge  $M$  sind offen.
- (2) Es sei  $I$  eine beliebige Indexmenge und seien  $U_i, i \in I$ , offene Mengen. Dann ist auch die Vereinigung

$$\bigcup_{i \in I} U_i$$

offen.

- (3) Es sei  $I$  eine endliche Indexmenge und seien  $U_i, i \in I$ , offene Mengen. Dann ist auch der Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} U_i$$

offen.

**Aufgabe 32.8.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Zeige, dass jede endliche Teilmenge  $T \subseteq M$  abgeschlossen ist.

**Aufgabe 32.9.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Zeige, dass in  $M$  die sogenannte *Hausdorff*-Eigenschaft gilt, d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten  $x$  und  $y$  gibt es offene Mengen  $U$  und  $V$  mit

$$x \in U \text{ und } y \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset.$$

**Aufgabe 32.10.** Sei  $M$  eine Menge, die mit der diskreten Metrik versehen sei. Zeige, dass jede Teilmenge von  $M$  sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

**Aufgabe 32.11.** Zeige, dass die Menge

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

abgeschlossen ist.

**Aufgabe 32.12.** Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen in  $\mathbb{C}$  abgeschlossen ist.

**Aufgabe 32.13.** Es seien  $P$  und  $Q$  zwei verschiedene Punkte im  $\mathbb{R}^2$  und  $G$  die dadurch definierte Gerade. Zeige, dass  $G$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}^2$  ist.

**Aufgabe 32.14.** Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  weder offen noch abgeschlossen ist.

**Aufgabe 32.15.** Sei  $z \in \mathbb{C}$  eine komplexe Zahl mit  $|z| < 1$ . Zeige, dass die Folge  $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen 0 konvergiert.

**Aufgabe 32.16.** Sei  $z \in \mathbb{C}$  eine komplexe Zahl mit  $|z| > 1$ . Zeige, dass die Folge  $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergiert.

**Aufgabe 32.17.** Zeige, dass eine Folge in einem metrischen Raum maximal einen Grenzwert besitzt.

**Aufgabe 32.18.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $M$ . Zeige, dass die Folge genau dann gegen einen Punkt  $x \in M$  konvergiert, wenn die reelle Folge  $d(x_n, x)$  gegen 0 konvergiert.

**Aufgabe 32.19.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von  $T$  abgeschlossen ist.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 32.20.** (2 Punkte)

Es seien  $P = (3, \frac{5}{2}, 0)$  und  $Q = (1, -6, \frac{2}{5})$  zwei Punkte im  $\mathbb{R}^3$ . Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in der

- euklidischen Metrik,
- der Summenmetrik,
- und der Maximumsmetrik.

Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

**Aufgabe 32.21.** (4 Punkte)

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Zeige, dass die abgeschlossenen Kugeln  $B(x, \epsilon)$  abgeschlossen sind.

**Aufgabe 32.22.** (4 Punkte)

Entscheide, ob im  $\mathbb{R}^3$  (versehen mit der euklidischen Metrik) die Folge

$$x_n = \left( \frac{n^5 - 4n^2}{e^n}, \frac{-5n^4 + n^3 - n^{-1}}{13n^4 - 9n^2 + 5n + 6}, \frac{4 \cos^3 n + 6n^2 + 5n - 2}{2n^2 - \sin^7 n} \right)$$

konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

**Aufgabe 32.23.** (3 Punkte)

Bestimme den minimalen Abstand von  $(4, 1, -5)$  zu einem Punkt der Ebene  $E$ , die durch die Gleichung  $2x - 7y + 3z = 0$  gegeben ist.

**Aufgabe 32.24.** (5 Punkte)

Für welche Punkte  $(t, t^2)$  der Standardparabel wird der Abstand zum Punkt  $(0, 1)$  minimal?

**Aufgabe 32.25.** (5 Punkte)

Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass eine Teilmenge  $Z \subseteq T$  genau dann offen in  $T$  ist, wenn es eine in  $M$  offene Menge  $U$  gibt mit  $Z = T \cap U$ .

## 33. VORLESUNG - STETIGE ABBILDUNGEN

Ein metrischer Raum ist dadurch ausgezeichnet, dass es in ihm eine Abstandsfunktion gibt, und dass dadurch zwei Punkte „näher“ zueinander liegen können als zwei andere Punkte. Bei einer Abbildung

$$f: L \longrightarrow M$$

zwischen zwei metrischen Räumen kann man sich fragen, inwiefern der Abstand im Werteraum  $M$  durch den Abstand im Definitionsraum  $L$  kontrollierbar ist. Sei  $x \in L$  und  $y = f(x)$  der Bildpunkt. Man möchte, dass für Punkte  $x'$ , die „nahe“ an  $x$  sind, auch die Bildpunkte  $f(x')$  „nahe“ an  $f(x)$  sind. Um diese intuitive Vorstellung zu präzisieren, sei ein  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Dieses  $\epsilon$  repräsentiert eine „gewünschte Zielgenauigkeit“ (oder „Zieltoleranz“). Die Frage ist dann, ob man ein  $\delta > 0$  finden kann (eine „Startgenauigkeit“ oder „Starttoleranz“) mit der Eigenschaft, dass für alle  $x'$  mit  $d(x, x') \leq \delta$  die Beziehung  $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$  gilt. Dies führt zum Begriff der stetigen Abbildung.

**Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen**

**Definition 33.1.** Seien  $(L, d_1)$  und  $(M, d_2)$  metrische Räume,

$$f: L \longrightarrow M$$

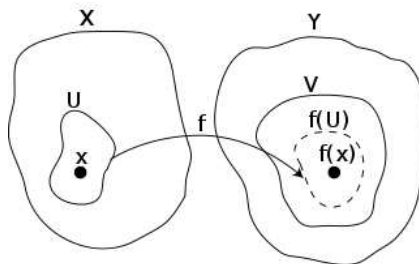
eine Abbildung und  $x \in L$ . Die Abbildung  $f$  heißt *stetig in  $x$* , wenn für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass

$$f(U(x, \delta)) \subseteq U(f(x), \epsilon)$$

gilt. Die Abbildung  $f$  heißt *stetig*, wenn sie stetig in  $x$  ist für jedes  $x \in L$ .

Statt mit den offenen Ballumgebungen könnte man hier genauso gut mit den abgeschlossenen Ballumgebungen arbeiten. Die einfachsten Beispiele für stetige Abbildungen sind konstante Abbildungen, die Identität eines metrischen Raumes und die Inklusion  $T \subseteq M$  einer mit der induzierten Metrik versehenen Teilmenge eines metrischen Raumes. Siehe dazu die Aufgaben. Bei  $L = M = \mathbb{R}$  stimmt diese Definition mit der bisherigen überein.





**Lemma 33.2.** *Es sei*

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen  $L$  und  $M$  und sei  $x \in L$  ein Punkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1)  $f$  ist stetig im Punkt  $x$ .
- (2) Für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft, dass aus  $d(x, x') \leq \delta$  folgt, dass  $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$  ist.
- (3) Für jede konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ist auch die Bildfolge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent mit dem Grenzwert  $f(x)$ .

*Beweis.* Die Äquivalenz von (1) und (2) ist klar. Sei nun (2) erfüllt und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $L$ , die gegen  $x$  konvergiert. Wir müssen zeigen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$  ist. Dazu sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Wegen (2) gibt es ein  $\delta$  mit der angegebenen Eigenschaft und wegen der Konvergenz von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$  gibt es eine natürliche Zahl  $n_0$  derart, dass für alle  $n \geq n_0$  gilt

$$d(x_n, x) \leq \delta.$$

Nach der Wahl von  $\delta$  ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0,$$

so dass die Bildfolge gegen  $f(x)$  konvergiert. Sei (3) erfüllt und  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Wir nehmen an, dass es für alle  $\delta > 0$  Elemente  $z \in L$  gibt, deren Abstand zu  $x$  maximal gleich  $\delta$  ist, deren Wert  $f(z)$  unter der Abbildung aber zu  $f(x)$  einen Abstand größer als  $\epsilon$  besitzt. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche  $\delta = 1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . D.h. für jede natürliche Zahl gibt es ein  $x_n \in L$  mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon.$$

Diese so konstruierte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $x$ , aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen  $f(x)$ , da der Abstand der Bildfolgenwerte zumindest  $\epsilon$  ist. Dies ist ein Widerspruch zu (3).  $\square$

**Satz 33.3.** *Es sei*

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen  $L$  und  $M$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1)  $f$  ist stetig in jedem Punkt  $x \in L$ .
- (2) Für jeden Punkt  $x \in L$  und jedes  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft, dass aus  $d(x, x') \leq \delta$  folgt, dass  $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$  ist.
- (3) Für jeden Punkt  $x \in L$  und jede konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ist auch die Bildfolge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent mit dem Grenzwert  $f(x)$ .
- (4) Für jede offene Menge  $V \subseteq M$  ist auch das Urbild

$$f^{-1}(V) = \{x \in L \mid f(x) \in V\}$$

offen.

*Beweis.* Die Äquivalenz der ersten drei Formulierungen folgt direkt aus Lemma 33.2. Sei (1) erfüllt und eine offene Menge  $V \subseteq M$  gegeben mit dem Urbild  $U := f^{-1}(V)$ . Sei  $x \in U$  ein Punkt mit dem Bildpunkt  $y = f(x) \in V$ . Da  $V$  offen ist, gibt es nach Definition ein  $\epsilon > 0$  mit  $U(y, \epsilon) \subseteq V$ . Nach (2) gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $f(U(x, \delta)) \subseteq U(y, \epsilon)$ . Daher ist

$$x \in U(x, \delta) \subseteq U$$

und wir haben eine offene Ballumgebung von  $x$  innerhalb des Urbilds gefunden. Sei (4) erfüllt und  $x \in L$  mit  $y = f(x)$  und  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Da der offene Ball  $U(y, \epsilon)$  offen ist, ist wegen (4) auch das Urbild  $f^{-1}(U(y, \epsilon))$  offen. Da  $x$  zu dieser Menge gehört, gibt es ein  $\delta > 0$  mit

$$U(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U(y, \epsilon)),$$

so dass (1) erfüllt ist. □

**Lemma 33.4.** Seien  $L, M, N$  metrische Räume und seien

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

stetige Abbildungen. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N, x \longmapsto g(f(x)),$$

stetig.

*Beweis.* Dies folgt am einfachsten aus der Charakterisierung von stetig mit offenen Mengen, siehe Satz 33.3. □

## Verknüpfungen und stetige Abbildungen

Wir verwenden das Symbol  $\mathbb{K}$  als gemeinsame Bezeichnung für  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ . Wegen  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  existiert auf  $\mathbb{C}$  eine Metrik, die durch den komplexen Betrag gegeben ist.

**Lemma 33.5.** *Die Negation*

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto -x,$$

und die Inversenbildung

$$\mathbb{K} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}, x \longmapsto x^{-1},$$

sind stetig.

*Beweis.* Die erste Aussage folgt direkt aus

$$|-x - (-y)| = |-x + y|.$$

Zur zweiten Aussage sei  $x \neq 0$  und  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Sei  $b = |x| > 0$ . Wir setzen  $\delta = \min\left(\frac{b^2\epsilon}{2}, \frac{b}{2}\right)$ . Dann gilt für jedes  $y$  mit  $|x - y| \leq \delta$  die Abschätzung (wegen  $|y| \geq b/2$ )

$$|x^{-1} - y^{-1}| = \left| \frac{y - x}{xy} \right| \leq \frac{b^2\epsilon/2}{b^2/2} = \epsilon.$$

□

**Lemma 33.6.** *Die Addition*

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

sind stetig.

*Beweis.* Siehe Aufgabe 33.7. □

**Lemma 33.7.** *Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und seien für  $i = 1, \dots, m$  Funktionen*

$$f_i: M \longrightarrow \mathbb{K},$$

gegeben mit der zusammengesetzten Abbildung

$$f: M \longrightarrow \mathbb{K}^m, x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

Dann ist  $f$  genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen  $f_i$  stetig sind.

*Beweis.* Es genügt, diese Aussage für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  zu zeigen. Dafür folgt sie direkt aus Satz 32.13 unter Verwendung von Lemma 33.2. □

**Beispiel 33.8.** Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises*,<sup>4</sup> also die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto f(t) = (\cos t, \sin t).$$

---

<sup>4</sup>Eine Abbildung  $I \rightarrow M$ , wobei  $I$  ein reelles Intervall ist, deren Bild gleich einer „Kurve“  $C \subseteq M$  ist, nennt man eine *Parametrisierung* von  $C$ .

Einer reellen Zahl  $t$  (im Bogenmaß) wird dabei der zugehörige Punkt auf dem Einheitskreis

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

zugeordnet. Diese Abbildung ist periodisch mit der Periode  $2\pi$ . Sie ist stetig, da die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus nach Satz 17.2 stetig sind und daraus nach Lemma 33.7 die Stetigkeit der Gesamtabbildung folgt.

**Lemma 33.9.** *Es sei  $M$  ein metrischer Raum und seien*

$$f, g: M \longrightarrow \mathbb{K}$$

*stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen*

$$f + g: M \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(x) + g(x),$$

$$f - g: M \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(x) - g(x),$$

$$f \cdot g: M \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(x) \cdot g(x),$$

*stetig. Für eine Teilmenge  $U \subseteq M$ , auf der  $g$  keine Nullstelle besitzt, ist auch die Funktion*

$$f/g: U \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(x)/g(x),$$

*stetig.*

*Beweis.* Wir betrachten Abbildungsdiagramme der Form

$$M \xrightarrow{f, g} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{+} \mathbb{K}.$$

Die Abbildung links ist stetig aufgrund von Lemma 33.7. Die rechte Abbildung ist stetig aufgrund von Lemma 33.6. Daher ist wegen Lemma 33.4 auch die Gesamtabbildung stetig. Die Gesamtabbildung ist aber die Addition der beiden Funktionen. Für die Multiplikation verläuft der Beweis gleich, für die Negation und die Division muss man zusätzlich Lemma 33.5 heranziehen und (für die Division) das Diagramm

$$U \xrightarrow{f, g^{-1}} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{K}$$

betrachten. □

**Satz 33.10.** *Es sei  $\mathbb{K}^n$  mit der euklidischen Metrik versehen und sei*

$$\varphi: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

*eine lineare Abbildung. Dann ist  $\varphi$  stetig.*

*Beweis.* Eine komplex-lineare Abbildung ist auch reell-linear, und die euklidische Metrik hängt nur von der reellen Struktur ab. Wir können also  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  annehmen. Aufgrund von Lemma 33.7 können wir  $m = 1$  annehmen. Die Abbildung sei durch

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

mit  $a_i \in \mathbb{R}$  gegeben. Die Nullabbildung ist konstant und daher stetig, also sei  $a = \max(|a_i|, i = 1, \dots, n) > 0$ . Es sei  $x \in \mathbb{R}^n$  und ein  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Für alle  $y \in \mathbb{R}^n$  mit  $d(x, y) \leq \frac{\epsilon}{na}$  ist insbesondere  $|x_i - y_i| \leq \frac{\epsilon}{na}$  für alle  $i$  und daher ist

$$\begin{aligned} d(\varphi(x), \varphi(y)) &= \left| \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n a_i y_i \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n a_i (x_i - y_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i (x_i - y_i)| \\ &\leq na |x_i - y_i| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

### Polynome in mehreren Variablen

Wir haben schon Polynome in einer Variablen verwendet. Die folgende Definition verwendet eine Multiindex-Schreibweise, um Polynomfunktionen in beliebig (endlich) vielen Variablen einzuführen. Dabei steht ein Index  $\nu$  für ein Tupel

$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$$

und für Variablen  $x_1, \dots, x_n$  verwendet man die Schreibweise

$$x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}.$$

Ein solcher Ausdruck heißt ein *Monom* in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$ .

**Definition 33.11.** Eine Funktion

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n),$$

die man als eine Summe der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n}$$

mit  $a_\nu \in \mathbb{K}$  schreiben kann, wobei nur endlich viele  $a_\nu \neq 0$  sind, heißt *polynomiale Funktion*.

Ein Polynom ist also eine endliche Summe aus mit Konstanten multiplizierten Monomen. In den zwei Variablen  $x$  und  $y$  ist z.B.

$$5 + 3x + 7y + 4x^2 - xy - 2y^2 + 4x^3 - 6x^2y + 5xy^2 - 11y^3 + 8x^4 - 6x^2y^2 + xy^3$$

ein Polynom. Bei diesem Beispiel ist  $a_{0,0} = 5$ ,  $a_{1,0} = 3$ ,  $a_{2,1} = -6$ ,  $a_{3,1} = 0$ , u.s.w. Ein Beispiel in den drei Variablen  $x, y, z$  ist

$$2 + 6x - 4y - 3z + 5x^2 + y^2 - 2z^2 - xy - 4xz + 3yz + 7x^3 + 4y^3 - 5z^3 - x^2y + 5xy^2 - 11xz^2 + 4x^2y + 8y^2z + 3yz^2 + 5xyz + 17x^3y^6z^5.$$

Offenbar sind die Summe und die Produkte von polynomialen Funktionen wieder polynomial. Dies gilt auch, wenn man Polynome in andere Polynome einsetzt.

**Satz 33.12.** *Eine polynomiale Funktion*

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

*ist stetig.*

*Beweis.* Die einzelnen Variablen  $x_i$  repräsentieren die  $i$ -te lineare Projektion

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow x_i.$$

Nach Satz 33.10 sind diese stetig. Aufgrund von Lemma 33.9 sind dann auch die monomialen Funktionen

$$x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n}: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetig und damit aus dem gleichen Grund überhaupt alle polynomialen Funktionen.  $\square$

### 33. ARBEITSBLATT

#### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 33.1.** Es seien  $L$  und  $M$  metrische Räume und  $m \in M$ . Zeige, dass die konstante Abbildung

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto m,$$

stetig ist.

**Aufgabe 33.2.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Zeige, dass die Identität

$$M \longrightarrow M, x \longmapsto x,$$

stetig ist.

**Aufgabe 33.3.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass die Inklusion  $T \subseteq M$  stetig ist.

**Aufgabe 33.4.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und seien  $a < b < c$  reelle Zahlen. Es seien

$$f: [a, b] \longrightarrow M$$

und

$$g: [b, c] \longrightarrow M$$

stetige Abbildungen mit  $f(b) = g(b)$ . Zeige, dass dann die Abbildung

$$h: [a, c] \longrightarrow M$$

mit

$$h(t) = f(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } h(t) = g(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

**Aufgabe 33.5.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und sei

$$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei  $x \in X$  ein Punkt mit  $f(x) > 0$ . Zeige, dass dann auch  $f(y) > 0$  gilt für alle  $y$  aus einer offenen Ballumgebung von  $x$ .

**Aufgabe 33.6.** Es seien  $L$  und  $M$  metrische Räume und es seien

$$f, g: L \longrightarrow M$$

zwei stetige Abbildungen. Zeige, dass die Menge

$$N = \{x \in L \mid f(x) = g(x)\}$$

abgeschlossen in  $L$  ist.

**Aufgabe 33.7.** Zeige, dass die Addition

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

stetig sind.

**Aufgabe 33.8.** Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, x \longmapsto |x|,$$

stetig ist.

**Aufgabe 33.9.** Es sei  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Untervektorraum im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$ . Zeige, dass  $V$  abgeschlossen im  $\mathbb{R}^n$  ist.

**Aufgabe 33.10.** Zeige, dass auf dem  $\mathbb{R}^n$  die euklidische Metrik, die Summenmetrik und die Maximumsmetrik dieselben offenen Mengen definieren.

**Aufgabe 33.11.** Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises*, also die Abbildung

$$\varphi: [0, 2\pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos t, \sin t).$$

Zeige, dass  $\varphi$  eine Bijektion zwischen  $[0, 2\pi[$  und dem Einheitskreis definiert, die stetig ist, deren Umkehrabbildung aber nicht stetig ist.

**Aufgabe 33.12.** Es sei  $X = \mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Metrik und  $Y = \mathbb{R}^n$  mit der diskreten Metrik. Es sei

$$f: Y \longrightarrow X$$

die Identität. Zeige, dass  $f$  stetig ist, die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  aber nicht.

**Aufgabe 33.13.** Es sei

$$f: \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

eine Abbildung, die in jeder Komponente polynomial sei und sei

$$g: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine polynomiale Funktion. Zeige, dass dann auch die Hintereinanderschaltung  $g \circ f$  eine polynomiale Funktion ist.

**Aufgabe 33.14.** Sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion und  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  mit den zugehörigen Koordinatenfunktionen  $z_i, i = 1, \dots, n$ . Zeige, dass  $f$  auch eine Polynomfunktion in diesen Koordinaten ist.

**Aufgabe 33.15.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Zeige, dass die Determinante

$$\mathbb{K}^{n^2} \cong \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, M \longmapsto \det M,$$

eine polynomiale Funktion ist.



### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 33.16.** (4 Punkte)

Es seien  $a, b, r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ , und sei

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$$

der Kreis mit dem Mittelpunkt  $M = (a, b)$  und dem Radius  $r$ . Es sei  $G$  eine Gerade in  $\mathbb{R}^2$  mit der Eigenschaft, dass es auf  $G$  mindestens einen Punkt  $P$  gibt mit  $d(M, P) \leq r$ . Zeige, dass  $K \cap G \neq \emptyset$  ist.

**Aufgabe 33.17.** (5 Punkte)

Im Nullpunkt  $0 \in \mathbb{R}^3$  befinde sich die Pupille eines Auges (oder eine Linse) und die durch  $x = -1$  bestimmte Ebene sei die Netzhaut  $N \cong \mathbb{R}^2$  (oder eine Fotoplatte). Bestimme die Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die das Sehen (oder Fotografieren) beschreibt (d.h. einem Punkt des Halbraumes wird durch den Lichtstrahl ein Punkt der Netzhaut zugeordnet). Ist diese Abbildung stetig, ist sie linear?

**Aufgabe 33.18.** (8 Punkte)

Ein Billardtisch sei 127 cm breit und 254 cm lang, die Kugeln haben einen Radius von 3 cm und die Ecklöcher seien ein Viertelkreis<sup>5</sup> mit Radius 5 cm um einen Eckpunkt. An den Tisch sei ein Koordinatensystem angelegt, das parallel zu den Tischseiten verläuft und bei dem die linke untere Ecke der Nullpunkt sei.

Berechne für die linke untere Ecke die Koordinaten der beiden Punkte des Lochrandes, durch die der Mittelpunkt einer Kugel hindurch muss, wenn sie eingelocht werden soll. Wie lang ist der Abstand zwischen diesen beiden Punkten, wie lang ist die Lochberandung zwischen diesen Punkten?

Eine Kugel soll nun direkt (ohne Verwendung von Bande oder anderen Kugeln) in dieses Loch versenkt werden, wobei der Queuestoß stets in Richtung der Kugelmitte und an deren „Äquator“ durchgeführt wird. Welche Winkeltoleranz zum Versenken der Kugel liegt vor, wenn der Kugelmittelpunkt die folgende Position besitzt:

- a) (63.5, 63.5)
- b) (100, 100)
- c) (63.5, 192,5)

<sup>5</sup>Diese Aufgabe macht auch Sinn, wenn die Löcher volle Kreise um die Eckpunkte sind, hat aber ein anderes Ergebnis.

d) (63.5, 10)

Welche Länge hat das zugehörige Kreissegment auf der Kugel?

Welche Winkeltoleranz liegt in a) bis d) vor, wenn man die anliegenden Banden mitberücksichtigt?

**Aufgabe 33.19.** (4 Punkte)

Es seien  $L, M, N$  metrische Räume und seien

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen. Es sei  $f$  stetig in  $x \in L$  und es sei  $g$  stetig in  $f(x) \in M$ . Zeige, dass die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N, x \longmapsto g(f(x)),$$

stetig in  $x$  ist.

**Aufgabe 33.20.** (4 Punkte)

Es sei  $V$  ein euklidischer Raum. Zeige, dass die Norm

$$V \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto \|v\|,$$

eine stetige Abbildung ist.

**Aufgabe 33.21.** (5 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

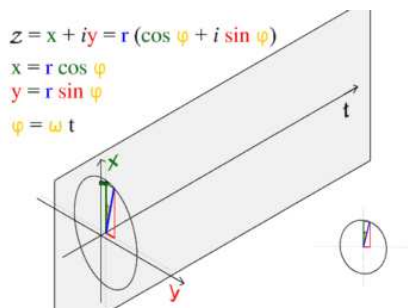
eine stetige Funktion. Zeige, dass der Graph von  $f$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}^2$  ist.

### Aufgabe zum Hochladen

**Aufgabe 33.22.** (8 Punkte)

Fertige in der Situation der Aufgabe 33.18 eine hochladbare Grafik an, die auf dem Billardtisch die Linien von gleichem Schwierigkeitsgrad (also gleicher Winkeltoleranz zum Einlochen) zeigt.

## 34. VORLESUNG - DIFFERENZIERBARE KURVEN



Eine Animation des Graphen der trigonometrischen Parametrisierung des Einheitskreises. Die grünen Punkte sind Punkte des Graphen.

Es sei  $I$  ein reelles Intervall,  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und

$$f: I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Eine solche Abbildung nennen wir auch eine *Kurve* oder einen *Weg* in  $V$ . Häufig stellt man sich dabei  $I$  als ein Zeitintervall und die Abbildung als einen Bewegungsprozess im Raum  $V$  vor. Jedem Zeitpunkt  $t \in I$  wird also ein Ortspunkt  $f(t) \in V$  zugeordnet. Es gibt mehrere Möglichkeiten, sich eine solche Abbildung zu veranschaulichen. Bei eindimensionalem  $V$ , also  $V \cong \mathbb{R}$ , ist der Graph die übliche Darstellungsweise. Einen Graphen gibt es bekanntlich zu jeder Abbildung. Bei  $V \cong \mathbb{R}^2$  ist der Graph eine Teilmenge von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$ . Häufig skizziert man bei einer Kurve bei  $V = \mathbb{R}^2$  oder  $V = \mathbb{R}^3$  nur das Bild (man spricht auch von der *Bahn* oder der *Spur* der Kurve) der Kurve. Man beachte aber, dass das Bild nur eine Teilinformation der Abbildung aufzeigt.

Bei einem Bewegungsprozess interessiert man sich natürlich für die „Geschwindigkeit“ zu einem bestimmten Zeitpunkt. Dabei versteht man unter Geschwindigkeit nicht nur deren Betrag (oder Norm), sondern auch deren Richtung (die Sprechweisen sind uneinheitlich).

Eine gleichmäßige Bewegung auf einem Kreis mit Mittelpunkt  $(0, 0)$  und Radius  $r$ , bei der eine volle Kreisbewegung die Zeit  $a$  benötigt, die zum Zeitpunkt 0 im Punkt  $(r, 0)$  startet und gegen den Uhrzeigersinn verläuft, wird durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \left( r \cos \frac{2\pi}{a}t, r \sin \frac{2\pi}{a}t \right)$$

beschrieben. Der Geschwindigkeitsvektor der Kreisbewegung ist zu jedem Zeitpunkt  $t$  *tangential* an den Ortspunkt auf dem Kreis (und steht senkrecht zum Ortsvektor). Die Norm der Geschwindigkeit ist bei einer Kreisbewegung konstant, aber die Richtung ändert sich kontinuierlich.

Die Vorstellung der *Momentangeschwindigkeit* wird durch den Begriff der *differenzierbaren Kurve* und ihrer Ableitung präzisiert, der eine direkte Verallgemeinerung von differenzierbaren Funktionen ist. Die Idee ist wieder, zu zwei Zeitpunkten  $t < t'$  den Durchschnittsgeschwindigkeitsvektor (die wir den *Differenzenquotienten* nennen)

$$\frac{f(t') - f(t)}{t' - t} \in V$$

zu betrachten und davon den Limes für  $t' \mapsto t$  zu bestimmen.

Um einen Limes bilden zu können, brauchen wir, wie schon im Eindimensionalen, eine Metrik (eine Abstandsfunktion) auf  $V$ . Wir werden daher euklidische Vektorräume betrachten, also reelle endlichdimensionale Vektorräume, für die ein Skalarprodukt erklärt ist. Ein Skalarprodukt auf  $V$  definiert über

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

eine Norm und über

$$d(u, v) := \|u - v\|$$

eine Metrik. Für einen Vektor  $v$ , der bezüglich einer Orthonormalbasis durch die Koordinaten

$$v = (v_1, \dots, v_n)$$

gegeben ist, lautet die Formel für die Norm

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

Da es auf jedem endlichdimensionalen Vektorraum  $V$  eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  und damit eine dadurch induzierte bijektive lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V, e_i \longmapsto v_i,$$

gibt, gibt es auch auf jedem reellen endlichdimensionalen Vektorraum ein Skalarprodukt und damit eine euklidische Metrik. Diese hängt jedoch von der gewählten Basis ab. Allerdings hängen die offenen Mengen,<sup>6</sup> der Konvergenzbegriff und Grenzwerteigenschaften nicht von einer solchen Wahl ab, wie das folgende Lemma zeigt.

**Lemma 34.1.** *Es sei  $V$  ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum. Es seien zwei Skalarprodukte  $\langle -, - \rangle_1$  und  $\langle -, - \rangle_2$  auf  $V$  gegeben. Dann stimmen die über die zugehörigen Normen  $\| - \|_1$  und  $\| - \|_2$  definierten Topologien überein, d.h. eine Teilmenge  $U \subseteq V$  ist genau dann offen bezüglich der einen Metrik, wenn sie offen bezüglich der anderen Metrik ist.*

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

---

<sup>6</sup>Die Menge der offenen Mengen eines metrischen Raumes wird als *Topologie* bezeichnet. Wesentliche Begriffe wie Konvergenz und Stetigkeit hängen nur von der Topologie ab.

Für uns bedeutet das, dass die im Folgenden zu entwickelnden Differenzierbarkeitsbegriffe nicht vom gewählten Skalarprodukt abhängen. Mit etwas mehr Aufwand kann man auch zeigen, dass eine beliebige (nicht notwendigerweise euklidische) Norm auf einem reellen endlichdimensionalen Vektorraum ebenfalls die gleiche Topologie definiert, und man genauso gut mit einer beliebigen Norm arbeiten könnte. Zunächst müssen wir den Grenzwertbegriff für Abbildungen zwischen metrischen Räumen erweitern.

**Definition 34.2.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum, sei  $T \subseteq M$  eine Teilmenge und sei  $a \in M$  ein Berührungspunkt von  $T$ . Es sei

$$g: T \longrightarrow L$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum  $L$ . Dann heißt  $b \in L$  der *Grenzwert* (oder *Limes*) von  $g$  in  $a$ , wenn es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes  $x \in T \cap U(a, \delta)$  ist  $g(x) \in U(b, \epsilon)$ . In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b.$$

Eine alternative Bedingung ist, dass für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $T$ , die gegen  $a$  konvergiert, die Bildfolge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $b$  konvergiert.

Diese Definition werden wir hauptsächlich in der Situation  $M = I$  ein reelles Intervall,  $T = I \setminus \{t\}$ ,  $a = t$ ,  $L = V$  ein euklidischer Vektorraum und den Differenzenquotienten

$$g: t' \longrightarrow \frac{f(t') - f(t)}{t' - t}$$

anwenden. Dieser ist für  $t' = t$  nicht definiert, wir suchen aber dennoch einen sinnvollen Wert für ihn.

**Definition 34.3.** Es sei  $I$  ein reelles Intervall,  $V$  ein euklidischer Vektorraum und

$$f: I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Dann heißt  $f$  in  $t \in I$  *differenzierbar*, wenn der Limes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

existiert. Dieser Limes heißt dann die *Ableitung* von  $f$  in  $t$  und wird mit

$$f'(t)$$

bezeichnet.

Die Ableitung ist selbst wieder ein Vektor in  $V$ . Statt Ableitung spricht man auch vom *Differentialquotienten* in einem (Zeit)-Punkt  $t$ . Bei  $f'(t) \neq 0$  versteht man unter der *Tangente* an  $f(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  die durch

$$\{f(t) + s \cdot f'(t) \mid s \in \mathbb{R}\}$$

gegebene Gerade.

**Definition 34.4.** Es sei  $I$  ein reelles Intervall,  $V$  ein euklidischer Vektorraum und

$$f: I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Dann heißt  $f$  *differenzierbar*, wenn  $f$  in jedem Punkt  $t \in I$  differenzierbar ist. Die Abbildung

$$I \longrightarrow V, t \longmapsto f'(t),$$

heißt dann die *Ableitung* von  $f$ .

Die Ableitung einer differenzierbaren Kurve ist damit selbst wieder eine Kurve. Wenn die Ableitung stetig ist, so nennt man die Kurve *stetig differenzierbar*. Wenn die Ableitung selbst differenzierbar ist, so nennt man die Ableitung der Ableitung die zweite Ableitung der Ausgangskurve.

Das folgende Lemma zeigt, dass dieser Differenzierbarkeitsbegriff nichts wesentlich neues ist, da er auf die Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen zurückgeführt werden kann.

**Lemma 34.5.** *Es sei  $I$  ein reelles Intervall,  $V$  ein euklidischer Vektorraum und*

$$f: I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. *Es sei  $v_1, v_2, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  und es seien*

$$f_j: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

die zugehörigen *Komponentenfunktionen* von  $f$ . *Es sei  $t \in I$ . Dann ist  $f$  genau dann differenzierbar in  $t$ , wenn sämtliche Funktionen  $f_j$  in  $t$  differenzierbar sind. In diesem Fall gilt*

$$f'(t) = f'_1(t) \cdot v_1 + f'_2(t) \cdot v_2 + \dots + f'_n(t) \cdot v_n.$$

*Beweis.* Sei  $t_0 \in I$  und  $t \in I, t \neq t_0$ . Es ist

$$\begin{aligned} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} &= \frac{\sum_{j=1}^n f_j(t) \cdot v_j - \sum_{j=1}^n f_j(t_0) \cdot v_j}{t - t_0} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{f_j(t) - f_j(t_0)}{t - t_0} \cdot v_j. \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 34.5 existiert der Limes links für  $t \rightarrow t_0$  genau dann, wenn der entsprechende Limes rechts komponentenweise existiert.  $\square$

Die vorstehende Aussage wird hauptsächlich für die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  angewendet.

**Beispiel 34.6.** Die Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2 - t^3, t \cdot \sin t, e^{-t})$$

ist in jedem Punkt  $t \in \mathbb{R}$  differenzierbar, und zwar ist

$$f'(t) = (2t - 3t^2, \sin t + t \cdot \cos t, -e^{-t}).$$

**Beispiel 34.7.** Die trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos t, \sin t)$$

besitzt nach Lemma 34.5 und nach Satz 21.5 die Ableitung

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Wegen

$$\left\langle \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle = -\cos t \sin t + \sin t \cos t = 0$$

steht der Geschwindigkeitsvektor stets senkrecht auf dem Ortsvektor.

**Lemma 34.8.** *Es sei  $I$  ein reelles Intervall und  $V$  ein euklidischer Vektorraum. Es seien*

$$f, g: I \longrightarrow V$$

*zwei in  $t_0 \in I$  differenzierbare Kurven und es sei*

$$h: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine in  $t_0$  differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Summe*

$$f + g: I \longrightarrow V, t \longmapsto f(t) + g(t),$$

*ist in  $t_0$  differenzierbar mit*

$$(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0).$$

(2) *Das Produkt*

$$hf: I \longrightarrow V, t \longmapsto h(t) \cdot f(t),$$

*ist differenzierbar in  $t_0$  mit*

$$(hf)'(t_0) = h(t_0) \cdot f'(t_0) + h'(t_0) \cdot f(t_0).$$

*Insbesondere ist für  $c \in \mathbb{R}$  auch  $cf$  differenzierbar in  $t_0$  mit*

$$(cf)'(t_0) = cf'(t_0).$$

(3) *Wenn  $h$  nullstellenfrei ist, so ist auch die Quotientenfunktion*

$$\frac{f}{h}: I \longrightarrow V, t \longmapsto \frac{f(t)}{h(t)},$$

*in  $t_0$  differenzierbar mit*

$$\left(\frac{f}{h}\right)'(t_0) = \frac{h(t_0)f'(t_0) - h'(t_0)f(t_0)}{(h(t_0))^2}.$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 34.4. □

Man kann natürlich zwei Abbildungen  $f, g: I \rightarrow V$  nicht miteinander multiplizieren, so dass in der obigen Produktregel eine differenzierbare Kurve und eine differenzierbare Funktion auftritt. Ebenso muss die Kettenregel mit Bedacht formuliert werden. Später werden wir noch eine allgemeinere Kettenregel kennenlernen.

**Lemma 34.9.** *Es seien  $I$  und  $J$  zwei reelle Intervalle, es sei*

$$h: I \longrightarrow J, s \longmapsto h(s),$$

*eine in  $s_0 \in I$  differenzierbare Funktion und es sei*

$$f: J \longrightarrow V, t \longmapsto f(t),$$

*eine in  $t_0 = h(s_0)$  differenzierbare Kurve in einen euklidischen Vektorraum  $V$ . Dann ist auch die zusammengesetzte Kurve*

$$f \circ h: I \longrightarrow V, s \longmapsto f(h(s)),$$

*in  $s_0$  differenzierbar und es gilt*

$$(f \circ h)'(s_0) = h'(s_0) \cdot f'(h(s_0)).$$

*Beweis.* Es seien  $f_1, \dots, f_n$  die Komponentenfunktionen von  $f$  bezüglich einer Basis von  $V$ . Nach der Kettenregel in einer Variablen gilt

$$(f_i \circ h)'(s_0) = h'(s_0) \cdot f'_i(h(s_0))$$

für jedes  $i = 1, \dots, n$ . Dies ist wegen Lemma 34.5 die Behauptung.  $\square$

In der vorstehenden Situation sollte man sich  $h$  als eine Umparametrisierung der Zeit vorstellen. Die Bahn der Kurve bleibt erhalten, es ändert sich aber die Geschwindigkeit und die Richtung, mit der die Bahn durchlaufen wird. Wenn  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Negation ist, so wird die Kurve mit umgekehrter Zeitrichtung durchlaufen. Die Aussage besagt in diesem Fall, dass die Ableitung der umgekehrten Kurve negiert werden muss.

**Lemma 34.10.** *Es sei  $I$  ein reelles Intervall,  $V$  und  $W$  seien euklidische Vektorräume und es sei*

$$f: I \longrightarrow V$$

*eine differenzierbare Kurve. Es sei*

$$L: V \longrightarrow W$$

*eine lineare Abbildung. Dann ist auch die zusammengesetzte Abbildung*

$$L \circ f: I \longrightarrow W, t \longmapsto L(f(t)),$$

*differenzierbar und es gilt*

$$(L \circ f)'(t) = L(f'(t)).$$



*Beweis.* Sei  $t_0 \in I$  fixiert und sei  $t \in I$ ,  $t \neq t_0$ . Wegen der Linearität ist

$$L\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\right) = \frac{L(f(t)) - L(f(t_0))}{t - t_0}.$$

D.h. der Differenzenquotient zu  $L \circ f$  ist gleich dem Wert unter  $L$  des Differenzenquotienten zu  $f$ . Wegen der Voraussetzung und der Stetigkeit einer linearen Abbildung existiert der Limes links für  $t \rightarrow t_0$ , also existiert auch der Limes rechts, und das bedeutet, dass der Differentialquotient der zusammengesetzten Abbildung  $L \circ f$  existiert und mit dem Wert unter  $L$  des Differentialquotienten zu  $f$  übereinstimmt.  $\square$

**Beispiel 34.11.** Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine differenzierbare Bewegung im Raum, bei der man sich nur für die lineare Projektion der Bewegung auf eine Ebene interessiert. Eine solche Situation liegt beispielsweise vor, wenn man zu einer Flugbewegung nur die Bewegung des Schattens des Flugkörpers auf der Erdoberfläche beschreiben möchte (bei parallel gedachten Lichtstrahlen). Die Projektion wird (in geeigneten Koordinaten) durch eine lineare Abbildung

$$L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

beschrieben. Lemma 34.10 besagt in dieser Situation, dass der Geschwindigkeitsvektor der Schattenbewegung einfach die Projektion des Geschwindigkeitsvektors der Flugbewegung ist.

## 34. ARBEITSBLATT

### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 34.1.** Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto f(t) = \left( t^2 - \sin t, e^{-t} + 2t^3, t \cdot \sinh t + \frac{1}{t^2 + 1} \right),$$

in jedem Punkt  $t \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 34.2.** Skizziere die Bilder und die Graphen der folgenden Kurven im  $\mathbb{R}^2$ .

- (1)  $t \longmapsto (t^2, t^2)$ ,
- (2)  $t \longmapsto (t^2, -t^2)$ ,
- (3)  $t \longmapsto (t^2, t)$ ,
- (4)  $t \longmapsto (2t, 3t)$ ,
- (5)  $t \longmapsto (t^2, t^3)$ .

**Aufgabe 34.3.** Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und  $v, w \in W$ . Zeige, dass die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow V, t \longmapsto tv + w,$$

differenzierbar ist mit der Ableitung  $f'(t) = v$ .

**Aufgabe 34.4.** Es sei  $I$  ein reelles Intervall und  $V$  ein euklidischer Vektorraum. Es seien

$$f, g: I \longrightarrow V$$

zwei in  $t_0 \in I$  differenzierbare Kurven und es sei

$$h: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in  $t_0$  differenzierbare Funktion. Zeige, dass folgende Aussagen gelten.

(1) Die Summe

$$f + g: I \longrightarrow V, t \longmapsto f(t) + g(t),$$

ist in  $t_0$  differenzierbar mit

$$(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0).$$

(2) Das Produkt

$$hf: I \longrightarrow V, t \longmapsto h(t)f(t),$$

ist differenzierbar in  $t_0$  mit

$$(hf)'(t_0) = h(t_0)f'(t_0) + h'(t_0)f(t_0).$$

Insbesondere ist für  $c \in \mathbb{R}$  auch  $cf$  differenzierbar in  $t_0$  mit

$$(cf)'(t_0) = cf'(t_0).$$

(3) Wenn  $h$  nullstellenfrei ist, so ist auch die Quotientenfunktion

$$\frac{f}{h}: I \longrightarrow V, t \longmapsto \frac{f(t)}{h(t)},$$

in  $t_0$  differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{h}\right)'(t_0) = \frac{h(t_0)f'(t_0) - h'(t_0)f(t_0)}{(h(t_0))^2}.$$

**Aufgabe 34.5.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum, sei  $T \subseteq M$  eine Teilmenge und sei  $a \in M$  ein Berührungspunkt von  $T$ . Es sei

$$f: T \longrightarrow V$$

eine Abbildung in einen euklidischen Vektorraum  $V$  mit den Komponentenfunktionen

$$f_1, \dots, f_n: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

bezüglich einer Basis von  $V$ . Zeige, dass der Limes

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

genau dann existiert, wenn sämtliche Limiten

$$\lim_{x \rightarrow a} f_j(x)$$

existieren.

**Aufgabe 34.6.** Es seien

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

zwei differenzierbare Kurven. Berechne die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle.$$

**Aufgabe 34.7.** Betrachte die differenzierbare Kurve

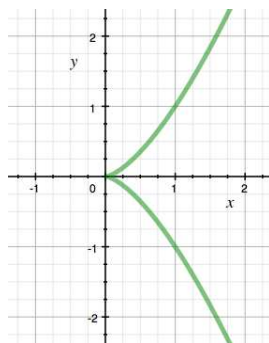
$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^3, e^t).$$

Bestimme einen Kreis (mit Mittelpunkt und Radius) und eine Parametrisierung  $\psi$  dieses Kreises derart, dass  $\psi$  und  $\varphi$  für  $t = 1$  bis zur zweiten Ableitung übereinstimmen.

**Aufgabe 34.8.** Das Bild der durch

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2, t^3),$$

definierten Kurve heißt *Neilsche Parabel*. Zeige, dass ein Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  genau dann zu diesem Bild gehört, wenn er die Gleichung  $x^3 = y^2$  erfüllt.



**Aufgabe 34.9.** (4 Punkte)

Es seien  $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$  endlich viele Punkte und sei  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$ . Zeige, dass es zu je zwei Punkten  $P, Q \in M$  eine differenzierbare Kurve

$$\varphi: [0, 1] \rightarrow M$$

mit  $\varphi(0) = P$  und  $\varphi(1) = Q$  gibt.

### Aufgaben zum Abgeben

#### Aufgabe 34.10. (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Kurve

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto \left( \frac{\sin t^2}{t^5}, 4^t, \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \right),$$

für jeden Punkt  $t \in \mathbb{R}_+$ .

#### Aufgabe 34.11. (4 Punkte)

Betrachte die Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, x \longmapsto (x^2 - x, x^3 + \sinh x, \sin(x^2)).$$

- a) Bestimme die Ableitung von  $f$  in jedem Punkt  $x$ .
- b) Bestimme die Komponentenfunktionen von  $f$  bezüglich der neuen Basis

$$(1, 0, 3), (2, 4, 6), (1, -1, 0)$$

von  $\mathbb{R}^3$ .

- c) Berechne die Ableitung in der neuen Basis direkt und mit Hilfe von Lemma 34.9.

#### Aufgabe 34.12. (4 (2+1+1) Punkte)

Auf einem Jahrmarkt befindet sich ein „Doppel-Karussell“, bei dem sich ein Sitz alle 2 Sekunden um einen kleinen Kreis mit Radius 3 Meter dreht, wobei sich der Mittelpunkt dieses Kreises seinerseits alle 8 Sekunden um einen großen Kreis mit Radius 10 Meter dreht. Beide Drehungen sind im Uhrzeigersinn. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  besitzt der Sitz zum Mittelpunkt den Abstand 13 Meter.

- a) Beschreibe diesen Bewegungsvorgang (in einem geeigneten Koordinatensystem) als eine differenzierbare Kurve.<sup>7</sup>
- b) Berechne den Geschwindigkeitsvektor dieser Bewegung zu jedem Zeitpunkt.
- c) Berechne die Geschwindigkeit (den Betrag des Geschwindigkeitsvektors) dieser Bewegung zu jedem Zeitpunkt.

<sup>7</sup>Gefragt ist hier nach der mathematischen Überlagerung der beiden Bewegungen, d.h. die große Bewegung verdreht nicht das Koordinatensystem der kleinen Bewegung. Eine volle Umdrehung des kleinen Kreises liegt vor, wenn der Verbindungspfeil aus dem äußeren Drehmittelpunkt und dem Sitz wieder in die gleiche Himmelsrichtung zeigt. Bei der mechanischen Überlagerung, die vorliegt, wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit des äußeren montierten Motors feststeht, sieht dies anders aus.

**Aufgabe 34.13.** (6 Punkte)

Bestimme in der Situation von Aufgabe 34.12 die Zeitpunkte, an denen die Geschwindigkeit maximal oder minimal wird.

**Aufgabe 34.14.** (4 Punkte)

Sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2, t^3).$$

Bestimme die Punkte  $t_0 \in \mathbb{R}$ , für die der Abstand der zugehörigen Kurvenpunkte  $f(t) = (t^2, t^3)$  zum Punkt  $(1, 0)$  minimal wird.

**Aufgabe 34.15.** (4 Punkte)

Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine differenzierbare Kurve und  $P \in \mathbb{R}^n$  ein Punkt. Es sei  $t_0 \in \mathbb{R}$  derart, dass der Abstand  $d(P, f(t))$  (zwischen  $P$  und einem Kurvenpunkt) in  $t_0$  minimal werde. Zeige, dass  $P - f(t_0)$  senkrecht zu  $f'(t_0)$  ist.

### Aufgabe zum Hochladen

**Aufgabe 34.16.** (6 Punkte)

Erstelle eine Animation zu Aufgabe 34.12.

## 35. VORLESUNG - KURVENLÄNGE

### Die Mittelwertabschätzung für differenzierbare Kurven

Die folgende Aussage vergleicht die Durchschnittsgeschwindigkeit einer differenzierbaren Kurve mit der Momentangeschwindigkeit, also der Ableitung.

**Satz 35.1.** *Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und*

$$f: [a, b] \longrightarrow V, t \longmapsto f(t),$$

*eine differenzierbare Kurve. Dann gibt es ein  $c \in [a, b]$  mit*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a) \cdot \|f'(c)\|.$$

*Beweis.* Wenn  $f(a) = f(b)$  ist, so ist die Aussage trivialerweise richtig. Sei also  $f(a) \neq f(b)$ . Dann ist  $u_1 = \frac{f(b)-f(a)}{\|f(b)-f(a)\|}$  nach dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren Teil einer Orthonormalbasis von  $V$ . Es seien  $f_1, \dots, f_n$  die Komponentenfunktionen von  $f$  bezüglich dieser Basis. Wir wenden den Mittelwertsatz für eine Variable auf die erste Komponentenfunktion  $f_1$  an. Es gibt also ein  $c \in I$  mit der Eigenschaft

$$f_1(b) - f_1(a) = (b - a) \cdot f_1'(c)$$

und damit auch

$$|f_1(b) - f_1(a)| = |b - a| \cdot |f_1'(c)|.$$

Da man die Längenmessung mit jeder Orthonormalbasis durchführen kann, gilt

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\| &= \|(f_1(b) - f_1(a))u_1\| \\ &= |f_1(b) - f_1(a)| \\ &= |b - a| \cdot |f_1'(c)| \\ &\leq |b - a| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i'(c))^2} \\ &= |b - a| \cdot \|f'(c)\|. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 35.2.** Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung* des *Einheitskreises*, also die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos t, \sin t).$$

Diese Abbildung ist für jedes  $t \in \mathbb{R}$  differenzierbar mit der Ableitung

$$\|f'(t)\| = (-\sin t, \cos t).$$

Die Norm dieser Ableitung ist zu jedem Zeitpunkt gleich

$$f'(t) = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1.$$

Wählen wir das Intervall  $[0, 2\pi]$ , so ist

$$f(0) = (0, 0) = f(2\pi).$$

Dies bedeutet, dass in der Mittelwertabschätzung nicht Gleichheit gelten kann.

## Länge von Kurven

Wir arbeiten im  $\mathbb{R}^n$ , versehen mit der euklidischen Metrik. Zu einer Kurve

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto f(t),$$

die wir uns als einen von der Zeit abhängigen Bewegungsvorgang im Raum vorstellen, wollen wir die Länge der Kurve definieren. Die Länge soll dabei

den insgesamt zurückgelegten Weg beschreiben, nicht die Länge der zurückgelassenen Spur oder den Abstand von Start- und Zielpunkt.

**Definition 35.3.** Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall und

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Zu einer Unterteilung

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k = b$$

nennt man

$$[P_0, P_1, \dots, P_k] = [f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_k)]$$

den zugehörigen *Streckenzug*.

Dabei sollte man sich die Unterteilung als eine Zeiteinteilung vorstellen und die Punkte  $P_i = f(t_i)$  als die zugehörigen Ortspunkte der durch  $f$  beschriebenen Bewegung im  $\mathbb{R}^n$ . Strenggenommen ist der Streckenzug einfach die geordnete Folge der Punkte, es ist aber suggestiver, sich darunter die stückweise lineare Verbindung dieser Punkte vorzustellen.

**Definition 35.4.** Zu einer Punktfolge

$$P_0, P_1, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$$

nennt man

$$\sum_{i=1}^k d(P_i, P_{i-1})$$

die *Gesamtlänge* des *Streckenzugs*  $[P_0, P_1, \dots, P_k]$ .

**Definition 35.5.** Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall und

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Dann nennt man

$$L(f) = \sup (L(f(t_0), \dots, f(t_k))),$$

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k = b \text{ Unterteilung, } k \in \mathbb{N}$$

die *Kurvenlänge* von  $f$ . Wenn  $L(f)$  endlich ist, so heißt die Kurve  $f$  *rektifizierbar*.

Man nimmt hier also das Supremum über alle möglichen Unterteilungen des Definitionsintervalls. Ohne zusätzliche Eigenschaften der Kurve kann man nicht erwarten, dass man die Kurvenlänge effektiv bestimmen kann. Wenn die Kurve aber stetig differenzierbar ist, so lässt sich die Länge über ein Integral berechnen, wie die folgende Aussage zeigt. Inhaltlich gesprochen bedeutet sie, dass wenn sich beispielsweise ein Fahrzeug in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  bewegt, man die Gesamtlänge der zurückgelegten Strecke kennt, sobald man nur zu jedem Zeitpunkt die momentane Geschwindigkeit (und zwar lediglich ihren Betrag, die Richtung muss man nicht kennen) kennt. Die Länge ist dann das Integral über den Betrag der Geschwindigkeit.

**Satz 35.6.** *Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall und*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*eine Abbildung, die stetig differenzierbar sei. Dann ist  $f$  rektifizierbar und es gilt für die Kurvenlänge*

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Die Rektifizierbarkeit ist schon in einer Variablen ein interessanter Begriff. Es lässt sich sogar die Rektifizierbarkeit darauf zurückführen. Dies bedeutet aber nicht, dass man die Berechnung der Kurvenlänge auf die Berechnung der Kurvenlängen der einzelnen Komponenten zurückführen könnte.

**Lemma 35.7.** *Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall und*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*eine Abbildung. Dann ist  $f$  genau dann rektifizierbar, wenn sämtliche Komponentenfunktionen rektifizierbar sind.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 35.18. □

**Beispiel 35.8.** Die Rektifizierbarkeit ist schon für Funktionen

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t),$$

ein nicht-trivialer Begriff, siehe Beispiel 35.9. Wenn allerdings  $f$  wachsend (oder fallend) ist, so lässt sich die Länge einfach ausrechnen. Zu einer beliebigen Unterteilung  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b$  ist dann nämlich

$$\sum_{i=1}^k |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^k (f(t_i) - f(t_{i-1})) = f(b) - f(a),$$

d.h. die Länge ist einfach die Differenz der Werte an den Randpunkten des Intervalls. Insbesondere existiert die Länge, d.h. monotone Funktionen sind rektifizierbar. Wenn  $f$  wachsend ist und stetig differenzierbar, so ergibt sich dies natürlich auch aus Satz 35.6 und aus Korollar 24.7. Wenn  $f$  allerdings nicht monoton ist, so müssen bei der Längenberechnung auch die Richtungsänderungen mitberücksichtigt werden. Für das Integral  $\int_a^b |f'(t)| dt$  gibt es keine direkte Berechnung, da dann  $f'(t)$  das Vorzeichen ändert. Man kann aber das Intervall in Abschnitte unterteilen, wo die Funktion wachsend oder fallend, bzw. wo die Ableitung positiv oder negativ ist, und dann abschnittsweise die Länge berechnen.

**Beispiel 35.9.** Die Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{bei } x > 0, \\ 0 & \text{bei } x = 0, \end{cases}$$



ist stetig, aber nicht rektifizierbar. Für jedes  $x_n = \frac{1}{n\pi + \frac{1}{2}\pi}$  ist  $f(x_n) = \pm x_n$ , wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob  $n$  gerade oder ungerade ist. Für jedes  $n$  ist daher  $|f(x_n) - f(x_{n-1})| \geq 2x_n$ . Wählt man dann die Unterteilungspunkte

$$0 < x_k < x_{k-1} < \dots < x_1 < x_0 = \frac{2}{\pi} < 1,$$

so ist die Länge des zugehörigen Streckenzugs mindestens gleich

$$\sum_{n=1}^k 2x_n = 2 \cdot \sum_{n=1}^k \frac{1}{n\pi + \frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^k \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \geq \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^k \frac{1}{n+1}.$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe ist dieser Ausdruck für  $k \rightarrow \infty$  nicht beschränkt. Daher kann das Supremum über alle Streckenzüge nicht existieren und die Kurve ist nicht rektifizierbar.

**Korollar 35.10.** *Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall und es sei*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist die Länge des Graphen von  $f$  gleich*

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

*Beweis.* Mit der Länge des Graphen ist die Länge der durch  $x \mapsto g(x) = (x, f(x))$  definierten Kurve gemeint. Die Ableitung dieser Kurve ist  $g'(x) = (1, f'(x))$ . Daher ist die Länge dieser Kurve nach Satz 35.6 gleich

$$L = \int_a^b \|g'(x)\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dt.$$

□

**Beispiel 35.11.** Wir wollen die Länge der *Standardparabel* berechnen, also die Länge der durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t, t^2)$$

gegebenen Kurve. Nach Korollar 35.10 ist die Länge von 0 nach  $b$  gleich

$$\begin{aligned} \int_0^b \sqrt{1 + 4x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2b} \sqrt{1 + u^2} du \\ &= \frac{1}{4} \left( u\sqrt{1 + u^2} + \operatorname{arsinh} u \right) \Big|_0^{2b} \\ &= \frac{1}{2} b\sqrt{1 + 4b^2} + \frac{1}{4} \operatorname{arsinh} (2b). \end{aligned}$$

**Beispiel 35.12.** Wir betrachten die Funktion

$$f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

die die obere Kreislinie des Einheitskreises beschreibt. Wir wollen die Länge dieses Graphen bestimmen. Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

wobei diese Gleichheit nur im Innern  $] -1, 1[$  Sinn ergibt, in den Randpunkten ist die Funktion nicht differenzierbar. Dennoch kann man hier Satz 35.6 zunächst im Innern anwenden und anschließend einen Grenzübergang durchführen. Es geht somit um das Integral von

$$\sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Stammfunktion davon ist  $\arcsin x$ . Daher ist<sup>8</sup>

$$L = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

**Beispiel 35.13.** Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises*, also die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto f(t) = (\cos t, \sin t).$$

Die Ableitung davon ist

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Daher ist die Kurvenlänge eines von  $a$  bis  $b$  durchlaufenen Teilstückes nach Satz 35.6 gleich

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_a^b 1 dt = b - a.$$

Aufgrund der Periodizität der trigonometrischen Funktionen wird der Einheitskreis von 0 bis  $2\pi$  genau einmal durchlaufen. Die Länge des Kreisbogens ist daher  $2\pi$ .

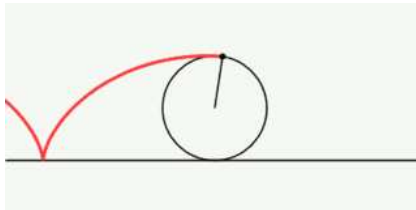
**Beispiel 35.14.** Es sei ein Punkt  $V$  auf der Peripherie des Einheitskreises fixiert (beispielsweise ein Ventil). Die *Zykloide* ist diejenige Kurve, die der Punkt beschreibt, wenn der Einheitskreis sich gleichmäßig auf einer Geraden bewegt, wie wenn ein Rad auf der Straße fährt. Wenn  $t$  den Winkel bzw. die abgerollte Strecke repräsentiert, und der Punkt  $V$  sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  in  $(0, 0)$  befindet, so wird die Bewegung des Ventils durch

$$W: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto W(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

beschrieben.

---

<sup>8</sup>Hier steht ein uneigentliches Integral, die Gleichheit gilt, da der Arkussinus auf ganz  $[-1, 1]$  stetig ist.



Nach einer Volldrehung befindet sich das Ventil wieder in seiner Ausgangsposition am Rad, aber verschoben um  $2\pi$ . Die Ableitung dieser Kurve ist

$$W'(t) = (1 - \cos t, \sin t) .$$

Die Länge der Zykloide (also die Länge des vom Ventil beschriebenen Weges) ist nach Satz 35.6 im Zeitintervall von 0 nach  $s$  gleich

$$\begin{aligned} \int_0^s \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} \, dt &= \int_0^s \sqrt{2 - 2 \cos t} \, dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^s \sqrt{1 - \cos t} \, dt \\ &= 2\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{s-\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos(\pi + 2u)} \, du \\ &= 2\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{s-\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos 2u} \, du \\ &= 2\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{s-\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 u - \sin^2 u} \, du \\ &= 2\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{s-\pi}{2}} \sqrt{2 \cos^2 u} \, du \\ &= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{s-\pi}{2}} \cos u \, du \\ &= 4 \left( \sin u \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{s-\pi}{2}} \right) . \end{aligned}$$

Für  $s = 2\pi$  ist dies  $4 \cdot 2 = 8$ .

### 35. ARBEITSBLATT

#### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 35.1.** Seien  $v, w \in \mathbb{R}^n$ . Bestimme die Länge der affin-linearen Kurve

$$[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto tv + w.$$

**Aufgabe 35.2.** Sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Kurve und  $c \in [a, b]$ . Zeige, dass  $f$  genau dann rektifizierbar ist, wenn die beiden Einschränkungen von  $f$  auf  $[a, c]$  und auf  $[c, b]$  rektifizierbar sind, und dass in diesem Fall

$$L_a^b(f) = L_a^c(f) + L_c^b(f)$$

gilt.

**Aufgabe 35.3.** Bestimme die Länge der differenzierbaren Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3 - 5x^2 + 3x - 2,$$

von  $-5$  nach  $5$ .

**Aufgabe 35.4.** Bestimme die Länge der durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (\cos t, \sin t, t),$$

gegebenen *Schraubenlinie* für  $t$  zwischen  $0$  und  $b$ , wobei  $b \in \mathbb{R}_{>0}$ .



**Aufgabe 35.5.** Wir betrachten die Kurve

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2 - 1, t^3 - t).$$

a) Zeige, dass die Bildpunkte  $(x, y)$  der Kurve die Gleichung

$$y^2 = x^2 + x^3$$

erfüllen.

b) Zeige, dass jeder Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit  $y^2 = x^2 + x^3$  zum Bild der Kurve gehört.

c) Zeige, dass es genau zwei Punkte  $t_1$  und  $t_2$  gibt mit identischem Bildpunkt, und dass ansonsten die Abbildung injektiv ist.

**Aufgabe 35.6.** Bestimme die Länge der Neilschen Parabel

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2, t^3),$$

von 0 bis  $b$ , wobei  $b \in \mathbb{R}_{>0}$ .

**Aufgabe 35.7.** Bestimme die Länge des Graphen des cosinus hyperbolicus  $\cosh t$  von  $a$  nach  $b$ .

**Aufgabe 35.8.\***

Berechne die Länge des Graphen der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - x + 13,$$

zwischen 4 und 8.

**Aufgabe 35.9.\***

Wir betrachten die differenzierbare Kurve

$$f: [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t, \sin t).$$

- Skizziere das Bild dieser Kurve und den Streckenzug, der sich ergibt, wenn man das Definitionsintervall in vier gleichlange Teilintervalle unterteilt.
- Berechne die Gesamtlänge des in a) beschriebenen Streckenzugs.
- Zeige, dass für die Länge  $L$  dieser Kurve die Abschätzung

$$L \leq \sqrt{2}\pi$$

gilt.

**Aufgabe 35.10.\***

Es sei

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Kurve und sei

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Isometrie. Beweise die Längengleichheit

$$L(\gamma) = L(\varphi \circ \gamma).$$

**Aufgabe 35.11.** Es sei  $G = \{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$  der Graph der reellen Betragsfunktion. Man gebe eine differenzierbare Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

an, deren Bild genau  $G$  ist.

Die folgenden Aufgaben (einschließlich Aufgabe 35.21) diskutieren, inwiefern höherdimensional ein „Mittelwertsatz“ gelten kann.

**Aufgabe 35.12.** Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit  $f(a) \neq f(b)$ . Zeige, dass es kein  $c \in [a, b]$  geben muss derart, dass

$$f'(c) = s \cdot (f(b) - f(a))$$

mit einem  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s \neq 0$ , gilt.

**Aufgabe 35.13.** Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit  $f'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$  und mit  $f(a) \neq f(b)$ . Zeige, dass es kein  $c \in [a, b]$  geben muss derart, dass

$$f'(c) = s \cdot (f(b) - f(a))$$

mit einem  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s > 0$ , gilt.

**Aufgabe 35.14.** Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit  $f'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$  und mit  $f(a) \neq f(b)$ . Zeige, dass es kein  $c \in [a, b]$  geben muss derart, dass  $f'(c)$  und  $f(b) - f(a)$  linear abhängig sind.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 35.15.** (4 Punkte)

Ein Massenteil werde zum Zeitpunkt 0 von einem Berggipfel (der als Nullpunkt der Ebene angesetzt wird) mit konstanter horizontaler Geschwindigkeit  $v$  abgeschossen und bewege sich danach luftwiderstandsfrei unter der (konstanten) Schwerkraft der Erde. Berechne die Bahnkurve  $f(t)$  des Körpers und die zurückgelegte Strecke  $s(t)$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ .

**Aufgabe 35.16.** (4 Punkte)

Berechne die Länge des Graphen der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{3}x^2 - 4x + 11,$$

zwischen 2 und 9.

**Aufgabe 35.17.** (3 Punkte)

Bestimme die Länge der differenzierbaren Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto \left( \frac{t^3}{3}, \frac{4t^5}{5}, \frac{8t^7}{7} \right),$$

von  $a$  nach  $b$ .

**Aufgabe 35.18.** (3 Punkte)

Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall und

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Zeige, dass  $f$  genau dann rektifizierbar ist, wenn sämtliche Komponentenfunktionen rektifizierbar sind.

**Aufgabe 35.19.** (5 Punkte)

Bestimme die Länge des Graphen der Exponentialfunktion  $\exp t$  von  $a$  nach  $b$ .

**Aufgabe 35.20.** (5 Punkte)

Man gebe eine differenzierbare Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

an, deren Bild genau das Achsenkreuz ist.

### Die Maiaufgabe

Die folgende Sonderaufgabe ist bis Ende Mai abzugeben.

**Aufgabe 35.21.** (8 Punkte)

Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit  $f'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ . Zeige, dass es ein  $c \in [a, b]$  gibt derart, dass  $f'(c)$  und  $f(b) - f(a)$  linear abhängig sind.

### Integration von stetigen Wegen

Für eine stetige Kurve

$$g: I \longrightarrow V$$

in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum definieren wir für  $a, b \in I$  das *Integral*  $\int_a^b g(s) ds$  komponentenweise, d.h. man wählt eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $V$  und drückt die stetige Kurve durch ihre Komponentenfunktionen  $g_1, \dots, g_n$  aus. Dann setzt man

$$\int_a^b g(s) ds := \left( \int_a^b g_1(s) ds \right) v_1 + \dots + \left( \int_a^b g_n(s) ds \right) v_n.$$

Das Ergebnis ist ein Vektor in  $V$ , der unabhängig von der gewählten Basis ist. Wenn man die untere Intervallgrenze  $a$  fixiert und die obere Intervallgrenze  $b = t$  variiert, so bekommt man eine *Integralkurve*

$$I \longrightarrow V, t \longmapsto \int_a^t g(s) ds.$$

Diese Integralkurve kann man wieder ableiten und erhält die Ausgangskurve zurück, d.h. es gilt wieder der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.

Es gilt die folgende Integralabschätzung.

**Satz 36.1.** *Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und*

$$g: [a, b] \longrightarrow V$$

*eine stetige Abbildung. Dann gilt*

$$\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\| dt.$$

*Beweis.* Wenn  $\int_a^b g(t) dt = 0$  ist, so ist nichts zu zeigen. Sei also

$$\int_a^b g(t) dt = v \neq 0.$$

Es sei  $u_1 := \frac{v}{\|v\|}$ . Das ergänzen wir zu einer Orthonormalbasis  $u_1, u_2, \dots, u_n$  von  $V$ . Es seien  $g_1, g_2, \dots, g_n$  die Koordinatenfunktionen von  $g$  bezüglich dieser Basis. Dann besteht aufgrund unserer Basiswahl die Beziehung

$$\begin{aligned} v &= \int_a^b g(t) dt \\ &= \left( \int_a^b g_1(t) dt \right) u_1 + \dots + \left( \int_a^b g_n(t) dt \right) u_n \\ &= \left( \int_a^b g_1(t) dt \right) u_1. \end{aligned}$$



Daher ist

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_a^b g(t) dt \right\| &= \left| \int_a^b g_1(t) dt \right| \\
 &\leq \int_a^b |g_1(t)| dt \\
 &\leq \int_a^b \sqrt{(g_1(t))^2 + \dots + (g_n(t))^2} dt \\
 &= \int_a^b \|g_1(t)u_1 + \dots + g_n(t)u_n\| dt \\
 &= \int_a^b \|g(t)\| dt.
 \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 36.2.** Die Abschätzung aus Satz 36.1 ist im Allgemeinen recht grob. Wenn beispielsweise  $g = f'$  die Ableitung einer stetig differenzierbaren Kurve

$$f: [a, b] \longrightarrow V$$

ist, so ist die rechte Seite gleich

$$\int_a^b \|g(t)\| dt = \int_a^b \|f'(t)\| dt = L_a^b(f),$$

also nach Satz 35.6 die Kurvenlänge von  $f$ . Die linke Seite ist hingegen

$$\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| = \|f(b) - f(a)\|.$$

Die Abschätzung ist also in diesem Fall trivial, da ja die Kurvenlänge nach Definition das Supremum der Längen der interpolierenden Streckenzüge ist, und  $\|f(b) - f(a)\|$  ist die Länge der direkten Strecke.

**Bemerkung 36.3.** Aus Satz 36.1 kann man Satz 35.1 für eine stetig differenzierbare Kurve

$$f: I \longrightarrow V$$

gewinnen. Mit  $g = f'$  ist nämlich

$$\begin{aligned}
 \|f(b) - f(a)\| &= \left\| \int_a^b g(t) dt \right\| \\
 &\leq \int_a^b \|g(t)\| dt \\
 &= (b - a) \|g(c)\| \\
 &= (b - a) \|f'(c)\|
 \end{aligned}$$

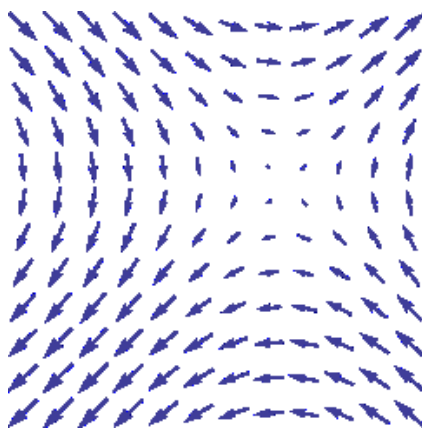
für ein gewisses  $c \in [a, b]$ , dessen Existenz aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (in einer Variablen) folgt.

## Vektorfelder

**Definition 36.4.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall und  $U \subseteq V$  eine offene Menge. Dann nennt man eine Abbildung

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein *Vektorfeld* (auf  $U$ ).



Die übliche physikalische Interpretation ist hierbei, dass  $t$  die Zeit repräsentiert,  $v$  den Ort und  $f(t, v) \in V$  einen Vektor, der zum Zeitpunkt  $t$  an den Ortspunkt  $v$  angeheftet ist und dort eine Richtung vorgibt. Manchmal spricht man auch von einem *Richtungsfeld*. Im physikalischen Kontext werden die Vektoren als Geschwindigkeitsvektoren, als Kraftvektoren oder als Beschleunigungsvektoren interpretiert.

Wenn das Vektorfeld nicht von  $t$  abhängt, so spricht man von einem *zeitunabhängigen* oder *autonomen Vektorfeld*.

Wir werden im Rahmen der Differentialgleichungen auf zeitabhängige Vektorfelder zurückkommen. Zuerst untersuchen wir zeitunabhängige Vektorfelder und Wegintegrale.

## Wegintegrale

**Definition 36.5.** Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge,

$$F: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetiges Vektorfeld und

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$$

eine stetig differenzierbare Kurve. Dann heißt

$$\int_{\gamma} F := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

das *Wegintegral* zum Vektorfeld  $F$  längs des Weges  $\gamma$ .

Statt Wegintegral sagt man auch *Kurvenintegral*. Die stetige Differenzierbarkeit sichert dabei, dass die Ableitung  $\gamma'$  und damit auch der Integrand  $t \mapsto \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$  stetig sind, sodass das Integral existiert.

Wenn der Weg  $\gamma$  nur (stetig und) stückweise stetig differenzierbar ist, wenn es also eine Unterteilung  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$  gibt derart, dass die Einschränkungen<sup>9</sup>  $\gamma_i := \gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$  stetig differenzierbar sind, so setzt man

$$\int_{\gamma} F := \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F + \dots + \int_{\gamma_n} F.$$

**Bemerkung 36.6.** Das Vektorfeld

$$F: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

sei durch die Komponentenfunktionen

$$F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)$$

und die Kurve durch die Komponentenfunktionen

$$(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

mit der Ableitung

$$(\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

gegeben. Dann wird das Wegintegral durch

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_a^b F_1(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \cdot \gamma'_1(t) + \dots + F_n(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \cdot \gamma'_n(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^b F_i(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \end{aligned}$$

berechnet.

**Beispiel 36.7.** Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2 - y^3, xy)$$

und den Weg

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2, t^3 - 5t).$$

Die Ableitung von  $\gamma$  ist

$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2 - 5).$$

<sup>9</sup>Hier haben die  $\gamma_i$  eine andere Bedeutung wie in der folgenden Bemerkung, wo sie die Komponentenfunktionen bezeichnen.

Daher ist das Wegintegral zu diesem Vektorfeld längs dieser Kurve gleich

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} F &= \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
&= \int_0^1 (\gamma_1(t)^2 - \gamma_2(t)^3) \cdot \gamma_1'(t) + \gamma_1(t)\gamma_2(t) \cdot \gamma_2'(t) dt \\
&= \int_0^1 (t^4 - (t^3 - 5t)^3) \cdot 2t + t^2(t^3 - 5t) \cdot (3t^2 - 5) dt \\
&= \int_0^1 (t^4 - t^9 + 15t^7 - 75t^5 + 125t^3)2t + t^2(3t^5 - 5t^3 - 15t^3 + 25t) dt \\
&= \int_0^1 2t^5 - 2t^{10} + 30t^8 - 150t^6 + 250t^4 + 3t^7 - 20t^4 + 25t^3 dt \\
&= \int_0^1 -2t^{10} + 30t^8 + 3t^7 - 150t^6 + 2t^5 + 230t^4 + 25t^3 dt \\
&= \left( -\frac{2}{11}t^{11} + \frac{10}{3}t^9 + \frac{3}{8}t^8 - \frac{150}{7}t^7 + \frac{1}{3}t^6 + 46t^5 + \frac{25}{4}t^4 \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{-336 + 6160 + 693 - 39600 + 616 + 85008 + 11550}{1848} \\
&= \frac{64091}{1848}.
\end{aligned}$$

**Beispiel 36.8.** Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (-3x, 5y).$$

Für einen stetig differenzierbaren Weg

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \gamma(t),$$

ist das Wegintegral zu diesem Vektorfeld gleich

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} F &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
&= \int_a^b -3\gamma_1(t) \cdot \gamma_1'(t) + 5\gamma_2(t) \cdot \gamma_2'(t) dt \\
&= \left( -\frac{3}{2}(\gamma_1(t))^2 + \frac{5}{2}(\gamma_2(t))^2 \right) \Big|_a^b \\
&= -\frac{3}{2}(\gamma_1(b))^2 + \frac{5}{2}(\gamma_2(b))^2 + \frac{3}{2}(\gamma_1(a))^2 - \frac{5}{2}(\gamma_2(a))^2.
\end{aligned}$$

Insbesondere hängt dieser Wert nur von  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$  ab, also dem Anfangspunkt und dem Endpunkt der Bewegung, nicht aber vom Verlauf des Weges.

Das folgende Beispiel zeigt, dass für einen *geschlossenen Weg*  $\gamma$ , wo also  $\gamma(a) = \gamma(b)$  ist, das Wegintegral nicht 0 sein muss. Wir werden allerdings später sehen, dass *Gradientenfelder* (*Potentialfelder*) die Eigenschaft besitzen, dass die Wegintegrale nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängen.

**Beispiel 36.9.** Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (-y, x)$$

und den Weg

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos t, \sin t).$$

Die Ableitung von  $\gamma$  ist

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Daher ist das Wegintegral zu diesem Vektorfeld längs dieser Kurve gleich

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_0^{2\pi} \langle F, \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

**Bemerkung 36.10.** Bei der üblichen physikalischen Interpretation eines Wegintegrals stellt man sich das Vektorfeld als ein Kraftfeld und den Weg als die Bewegung eines Massepunktes vor. Dabei ist die Bewegung erzwungen, d.h. es handelt sich nicht um die natürliche Bewegung, die das Kraftfeld bewirkt, sondern um eine geführte Bewegung. Eine solche Bewegung erfordert einen Arbeitsaufwand, wenn sie gegen das Kraftfeld durchgeführt wird, und setzt Energie frei, wenn sie mit der Kraft geführt wird. Entscheidend ist dabei der Winkel zwischen der momentanen Bewegungsrichtung zu einem Zeitpunkt  $t$  und dem Kraftfeld zum Ortspunkt  $\gamma(t)$ . Daher taucht in der Definition des Wegintegrals das Skalarprodukt zwischen Vektorfeld und Bewegungsrichtung auf. Das gesamte Wegintegral ist die Arbeit, die man längs des Weges in dem Kraftfeld verrichtet.

**Satz 36.11.** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge,*

$$F: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*ein stetiges Vektorfeld und*

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$$

*eine stetig differenzierbare Kurve. Es sei*

$$g: [c, d] \longrightarrow [a, b]$$

*eine bijektive, monoton wachsende, stetig differenzierbare Funktion und sei  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ g$ . Dann gilt*

$$\int_{\gamma} F = \int_{\tilde{\gamma}} F.$$

*Beweis.* Es seien  $F_1, \dots, F_n$  die Komponentenfunktionen von  $F$  und  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  die Komponentenfunktionen von  $\gamma$ . Dann gilt unter Verwendung von Korollar 33.9 mit der Substitution  $t = g(s)$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \sum_{i=1}^n \int_a^b F_i(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \cdot \gamma_i'(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_c^d F_i(\gamma_1(g(s)), \dots, \gamma_n(g(s))) \cdot \gamma_i'(g(s)) \cdot g'(s) ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_c^d F_i(\tilde{\gamma}_1(s), \dots, \tilde{\gamma}_n(s)) \cdot \tilde{\gamma}_i'(s) ds \\ &= \int_{\tilde{\gamma}} F. \end{aligned}$$

□

Die Funktion  $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$  nennt man in diesem Zusammenhang eine (orientierungserhaltende) *Umparametrisierung*. Der Satz besagt, dass das Wegintegral nur von dem durchlaufenen Weg (einschließlich der Richtung) abhängt, nicht aber von der Geschwindigkeit, mit der das passiert. Wenn die Funktion  $g$  monoton fallend ist, so vertauschen sich bei der Substitution die Integrationsgrenzen und man erhält

$$\int_{\gamma} F = - \int_{\tilde{\gamma}} F.$$

Diese Beziehung gilt insbesondere, wenn der Weg  $\gamma$  in umgekehrter Richtung durchlaufen wird.

## 36. ARBEITSBLATT

### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 36.1.** Zeige, dass das Integral zu einer stetigen Kurve

$$[a, b] \longrightarrow V$$

in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  unabhängig von der gewählten Basis ist.

**Aufgabe 36.2.** Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, t^5 - 1, t + \sin t).$$

Bestimme die Komponenten dieser Abbildung bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme mit beiden Basen das Integral dieser Kurve über  $[a, b]$ , und bestätige, dass die Ergebnisse übereinstimmen.

**Aufgabe 36.3.** Sei

$$\gamma: [2, 7] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2 - 1, t + 3),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y) = (y^2 - x, -3xy - y^3).$$

**Aufgabe 36.4.** Sei

$$\gamma: [1, 6] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, t^3, t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y^2 - xz^2, xy, -3xz - y^3z).$$

**Aufgabe 36.5.** Sei

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (\cos t, \sin t, t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y - z^3, x^2, -xz).$$

**Aufgabe 36.6.** Seien  $a, b, c, d, r, s \geq 1$  natürliche Zahlen. Wir betrachten die stetig differenzierbare Kurve

$$[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^r, t^s).$$

Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y) = (x^a y^b, x^c y^d).$$

**Aufgabe 36.7.** Sei

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos t, \sin t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zu den folgenden Vektorfeldern.

a)  $F(x, y) = (x, y),$

b)  $F(x, y) = (x, -y),$

c)  $F(x, y) = (y, x),$

d)  $F(x, y) = (y, -x)$ .

**Aufgabe 36.8.** Es sei

$$F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein stetiges Vektorfeld und

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein stetig differenzierbarer Weg. Es sei  $G$  eine Stammfunktion zu  $F$ . Zeige

$$\int_{\gamma} F = G(\gamma(b)) - G(\gamma(a)).$$

**Aufgabe 36.9.** Wir betrachten das identische Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, P \longmapsto P.$$

Zeige, dass für je zwei Punkte  $P, Q \in \mathbb{R}^n$  und für jeden stetig differenzierbaren Weg

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

mit  $\gamma(a) = P$  und  $\gamma(b) = Q$  das Wegintegral  $\int_{\gamma} F$  gleich  $\frac{1}{2}(\|Q\|^2 - \|P\|^2)$  ist.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 36.10.** (5 Punkte)

Sei

$$\gamma: [-2, 5] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, -t^3, t^2 - t + 4),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y^3 - x^2z^2, x^2y, 5x^3z - y^2z).$$

**Aufgabe 36.11.** (5 Punkte)

Wir betrachten die differenzierbare Kurve

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t, -t, t^2),$$

und das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (x^2, xz, y^2).$$

a) Berechne das Wegintegral  $\int_{\gamma} F$ .

b) Es sei

$$g: [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0, 1], s \longmapsto \sin s,$$

und  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ g$ . Berechne (unabhängig von a))  $\int_{\tilde{\gamma}} F$



**Aufgabe 36.12.** (4 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2 - e^y, xy + \cos x).$$

Bestimme das Wegintegral längs des gegen den Uhrzeigersinn einmal durchlaufenen Einheitsquadrates.

**Aufgabe 36.13.** (6 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto \left( \frac{x^3 - xy + 2y^2}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Bestimme das Wegintegral zu diesem Vektorfeld längs des linearen Weges von  $(0, -2)$  nach  $(3, 4)$ .

**Aufgabe 36.14.** (5 Punkte)

Wir betrachten das konstante Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, P \longmapsto v.$$

Zeige, dass für zwei Punkte  $P, Q \in \mathbb{R}^n$  und jeden stetig differenzierbaren Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\gamma(a) = P$  und  $\gamma(b) = Q$  das Wegintegral  $\int_{\gamma} F$  gleich  $\langle Q - P, v \rangle$  ist.

## 37. VORLESUNG - GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Wir haben schon im ersten Semester gewöhnliche Differentialgleichungen samt einiger Lösungsverfahren besprochen. Dort ging es um die Bewegungen auf einer Geraden, die durch ein von der Zeit und dem Ort (der Lage auf der Geraden) abhängiges Vektorfeld bestimmt wurden. Eine physikalische Bewegung spielt sich aber häufig höherdimensional (im  $\mathbb{R}^2$  oder im  $\mathbb{R}^3$ ) ab, so dass wir jetzt gewöhnliche Differentialgleichungen allgemein besprechen. Die Zeitkomponente wird sich nach wie vor in einem reellen Intervall bewegen, die Ortskomponente wird ein Element in einem beliebigen endlichdimensionalen reellen Vektorraum sein. Diesen statten wir mit einem Skalarprodukt aus, sodass wir eine Norm, eine Metrik, offene Mengen, stetige Abbildungen, etc. zur Verfügung haben.

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

**Definition 37.1.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf  $U$ . Dann nennt man

$$v' = f(t, v)$$

die *gewöhnliche Differentialgleichung* (oder *gewöhnliches Differentialgleichungssystem*) zum Vektorfeld  $f$ .

(Zeitabhängige) Vektorfelder und gewöhnliche Differentialgleichungssysteme sind im Wesentlichen äquivalente Objekte. Man spricht auch von einem *dynamischen System*. Von Differentialgleichungen spricht man insbesondere dann, wenn man sich für die Lösungen im Sinne der folgenden Definition interessiert.

**Definition 37.2.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf  $U$ . Zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$v' = f(t, v)$$

heißt eine Abbildung

$$v: J \longrightarrow V, t \longmapsto v(t),$$

auf einem offenen (Teil)Intervall<sup>10</sup>  $J \subseteq I$  eine *Lösung der Differentialgleichung*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

- (1) Es ist  $v(t) \in U$  für alle  $t \in J$ .
- (2) Die Abbildung  $v$  ist differenzierbar.
- (3) Es ist  $v'(t) = f(t, v(t))$  für alle  $t \in J$ .

Eine Lösung ist also eine differenzierbare Kurve, eine vektorwertige Abbildung

$$v: J \longrightarrow V.$$

Wenn  $V = \mathbb{R}^n$  ist, so wird eine solche Abbildung durch ihre Komponenten

$$(v_1(t), \dots, v_n(t))$$

---

<sup>10</sup>Rein formal gesehen ist hier auch das leere Intervall zugelassen, wobei diese „leere Lösung“ natürlich uninteressant ist. Bei einem Anfangswertproblem sichert bereits die Anfangsbedingung, dass die Lösung nicht leer ist.

beschrieben. Ebenso wird das Vektorfeld durch  $n$ , von  $t$  und  $v = (v_1, \dots, v_n)$  abhängige Funktionen  $(f_1, \dots, f_n)$  beschrieben. Die Differentialgleichung lautet dann ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, v_1, \dots, v_n) \\ \vdots \\ f_n(t, v_1, \dots, v_n) \end{pmatrix}.$$

Daher spricht man auch von einem *Differentialgleichungssystem*.

Häufig soll eine Kurve nicht nur eine Differentialgleichung erfüllen, sondern sich zusätzlich zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort befinden. Dies führt zum Begriff des Anfangswertproblems.

**Definition 37.3.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf  $U$ . Es sei  $(t_0, w) \in I \times U$  gegeben. Dann nennt man

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w$$

das *Anfangswertproblem* zur gewöhnlichen Differentialgleichung  $v' = f(t, v)$  mit der *Anfangsbedingung*  $v(t_0) = w$ .

**Definition 37.4.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf  $U$ . Es sei  $(t_0, w) \in I \times U$  vorgegeben. Dann nennt man eine Abbildung

$$v: J \longrightarrow V, t \longmapsto v(t),$$

auf einem Intervall  $J \subseteq I$  mit  $t_0 \in J$  eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w,$$

wenn  $v$  eine Lösung der Differentialgleichung  $v' = f(t, v)$  ist und wenn zusätzlich

$$v(t_0) = w$$

gilt.

Eine zu einem Vektorfeld, einer gewöhnlichen Differentialgleichung und einem Anfangswertproblem passende Vorstellung ist das *Windmodell*. Das Vektorfeld

$$F: I \times U \longrightarrow V$$

beschreibt zu einem jeden Zeitpunkt  $t \in I$  und einem Ortspunkt  $P \in U$  die in diesem Punkt herrschende Windrichtung (oder Windgeschwindigkeit). Die Lösung einer Differentialgleichung ist die Bewegung eines Teilchens, das (beschleunigungsfrei und verzögerungsfrei) vom Wind getragen wird, dessen

Momentangeschwindigkeit also zu jedem Zeitpunkt gleich der Windgeschwindigkeit an dem Ort ist, an dem sich das Teilchen gerade befindet. Die Lösung eines Anfangswertproblems beschreibt die Bewegung, wenn das Teilchen an einem bestimmten Punkt losgelassen wird.

Die Vorstellung, dass eine Differentialgleichung die Bewegungen in einem Kraftfeld<sup>11</sup> beschreibt, kann irreführend sein. Ein Kraftfeld ist ein Beschleunigungsfeld und kein Geschwindigkeitsfeld. Allerdings führt ein Kraftfeld zu einer Differentialgleichung höherer Ordnung, die in eine Differentialgleichung erster Ordnung (unter Hinzunahme neuer Variablen) übersetzt werden kann.

### Erste Beispiele

**Beispiel 37.5.** Wir betrachten ein konstantes Vektorfeld auf dem  $\mathbb{R}^n$ , also eine Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, x_1, \dots, x_n) \longmapsto w,$$

wobei  $w \in \mathbb{R}^n$  ein fixierter Vektor ist. Im „Windmodell“ bedeutet dies, dass überall und zu jeder Zeit eine konstante Windgeschwindigkeit herrscht. Die Bewegung eines (durch den Wind getragenen) Teilchens muss also auf der durch einen Startpunkt und den Richtungsvektor  $w$  gegebenen Geraden stattfinden. In der Tat besitzt das Anfangswertproblem

$$v' = w \text{ und } v(t_0) = P$$

die eindeutige<sup>12</sup> (affin-lineare) Lösung

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto v(t) = P + (t - t_0)w,$$

wie man durch Ableiten bestätigt.

**Beispiel 37.6.** Wir betrachten ein stetiges ortsunabhängiges Vektorfeld auf dem  $\mathbb{R}^n$ , d.h. es sei eine stetige Abbildung

$$g: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

auf einem reellen Intervall  $I$  gegeben, die wir als Vektorfeld

$$F: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, x_1, \dots, x_n) \longmapsto g(t),$$

auffassen. Im „Windmodell“ bedeutet dies, dass zu einem festen Zeitpunkt überall die gleiche Windgeschwindigkeit herrscht, diese sich aber mit der Zeit ändert. Die Bewegungskurven der (durch den Wind getragenen) Teilchen müssen also parallel sein, also durch eine Ortsverschiebung auseinander hervorgehen. Der Differenzvektor zwischen den Positionen von zwei Teilchen

<sup>11</sup>Die physikalische Interpretation eines Vektorfeldes als Kraftfeld ist hingegen bei Wegintegralen (nämlich als Arbeitsintegral) richtig.

<sup>12</sup>Ob die Lösung einer Differentialgleichung (existiert und) eindeutig ist, ist ein wichtiges Problem. Der wichtigste Satz zu dieser Fragestellung ist der Satz von Picard-Lindelöf, den wir später besprechen werden. In vielen der hier besprochenen Beispiele ist die Eindeutigkeit der Lösung direkt klar oder folgt aus den Eindeutigkeitsaussagen aus den Vorlesungen 29 und 30.

bleibt während des Bewegungsvorgangs erhalten. Die Lösungskurven zu einem Anfangswertproblem lassen sich einfach berechnen: Die Differentialgleichung

$$v' = F(t, v) = g(t) \text{ und } v(t_0) = P$$

besitzt die eindeutige Lösung

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto v(t) = P + \left( \int_{t_0}^t g_1(s) ds, \int_{t_0}^t g_2(s) ds, \dots, \int_{t_0}^t g_n(s) ds \right),$$

wobei die  $g_i$  die Komponentenfunktionen von  $g$  sind.

**Beispiel 37.7.** Es seien  $n$  reellwertige Funktionen  $f_i(t, x)$  in zwei Variablen gegeben. Diese kann man zusammenfassen zu einem Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(t, x_1), f_2(t, x_2), \dots, f_n(t, x_n)).$$

Dabei hängt die  $i$ -te Koordinatenfunktion nur von  $t$  und der  $i$ -ten Ortskoordinaten  $x_i$  ab. Eine Lösungskurve  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  muss die Bedingungen

$$x'_i(t) = F_i(t, x_1, \dots, x_n) = f_i(t, x_i)$$

(für  $i = 1, \dots, n$ ) erfüllen. Diese  $n$  Bedingungen sind unabhängig voneinander, d.h. man kann die  $n$  Komponentenfunktionen  $x_i(t)$  getrennt mit einem eindimensionalen Ansatz bestimmen. Daher spricht man von einem *entkoppelten Differentialgleichungssystem*.

Manchmal ist ein Differentialgleichungssystem in den ursprünglich gegebenen Koordinaten nicht entkoppelt, lässt sich aber durch einen Koordinatenwechsel entkoppeln und dann lösen. Dies ist vor allem für lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten wichtig, die mit Mitteln der linearen Algebra entkoppelt werden können.

**Beispiel 37.8.** Wir betrachten das (zeitunabhängige) Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto (-y, x).$$

Hier steht also der Richtungsvektor  $F(t, x, y) = (-y, x)$  stets senkrecht auf dem Ortsvektor  $(x, y)$ , und ihre Normen stimmen überein. Man erwartet kreisförmige Bewegungen. In der Tat ist zur Anfangsbedingung  $v(0) = (r, 0)$  die Kurve

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (r \cos t, r \sin t),$$

die eindeutige Lösung.

**Definition 37.9.** Es sei  $U \subseteq V$  eine offene Teilmenge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und es sei

$$g: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}, (t, v) \longmapsto g(t, v)$$

eine Funktion. Dann heißt das Vektorfeld

$$F: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto F(t, v) = g(t, v) \cdot v,$$

ein *Zentralfeld*.

Bei einem Zentralfeld sind also der Ortsvektor und der Richtungsvektor linear abhängig, d.h. der Richtungsvektor weist in Richtung des Ortsvektors. Daher findet die durch ein Zentralfeld definierte Bewegung allein auf der durch einen Ortspunkt und den Nullpunkt (dem Zentrum) festgelegten Geraden statt. Es handelt sich also im Grunde um einen eindimensional festgelegten Bewegungsvorgang, wie auch im folgenden Lemma zum Ausdruck kommt.

**Lemma 37.10.** *Es sei  $U \subseteq V$  eine offene Teilmenge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$ . Es sei*

$$F: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto F(t, v) = g(t, v) \cdot v,$$

*ein stetiges Zentralfeld zur stetigen Funktion*

$$g: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}, (t, v) \longmapsto g(t, v).$$

*Es sei  $w \in U$  und es sei*

$$\alpha: J \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine Lösung der eindimensionalen Differentialgleichung*

$$z' = h(t, z) := g(t, zw) \cdot z \text{ mit } \alpha(t_0) = 1.$$

*Dann ist*

$$v(t) = \alpha(t) \cdot w$$

*eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$v' = F(t, v) \text{ mit } v(t_0) = w.$$

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned} v'(t) &= (\alpha(t) \cdot w)' \\ &= \alpha'(t) \cdot w \\ &= g(t, \alpha(t) \cdot w) \cdot \alpha(t) \cdot w \\ &= F(t, \alpha(t) \cdot w) \\ &= F(t, v(t)) \end{aligned}$$

und

$$v(t_0) = \alpha(t_0) \cdot w = w,$$

sodass eine Lösung des Anfangswertproblems vorliegt. □

**Beispiel 37.11.** Wir betrachten das Zentralfeld zur Funktion

$$g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x, y) \longmapsto g(t, x, y) = \frac{t^2 x^2}{y},$$

also das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto \frac{t^2 x^2}{y} \cdot (x, y) = \left( \frac{t^2 x^3}{y}, t^2 x^2 \right),$$

und die Anfangsbedingung  $\varphi(0) = (4, -3)$ . Um dieses Anfangswertproblem zu lösen, müssen wir gemäß Lemma 37.10 die eindimensionale gewöhnliche Differentialgleichung

$$z' = g(t, 4z, -3z) \cdot z = \frac{t^2 16z^2}{-3z} \cdot z = -\frac{16}{3} t^2 z^2$$

mit der Anfangsbedingung  $z(0) = 1$  lösen. Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen, nach Korollar 30.4 ist

$$z(t) = \frac{1}{\frac{16}{9}t^3 + 1}$$

die Lösung mit  $z(0) = 1$ . Daher ist

$$v(t) = \frac{1}{\frac{16}{9}t^3 + 1} (4, -3)$$

die Lösung des Anfangswertproblems zum Zentralfeld.

### 37. ARBEITSBLATT

#### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 37.1.** Bestimme die<sup>13</sup> Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ mit } v(2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 37.2.** Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = (t^2 - \sin t, \cos^2 t) \text{ mit } v(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 37.3.** Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems zum Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto (-ay, ax),$$

und zur Anfangsbedingung  $v(s) = (b, c)$  (dabei seien  $a, b, c, s \in \mathbb{R}$  fixierte reelle Zahlen).

---

<sup>13</sup>Mit dieser Formulierung wird hier und im Folgenden implizit benutzt, dass die Lösung eindeutig ist. In den meisten der hier gestellten Aufgaben ergibt sich die Eindeutigkeit direkt, sie ist aber nicht Teil der Aufgabenstellung.

**Aufgabe 37.4.** Es sei ein entkoppeltes Differentialgleichungssystem zum Vektorfeld

$$F(t, x_1, \dots, x_n) = (f_1(t, x_1), \dots, f_n(t, x_n))$$

gegeben. Erläutere, wie sich die Lösungen der einzelnen Differentialgleichungen  $x'_i = f_i(t, x_i)$  zur Gesamtlösung verhalten, wie dabei die Definitionsintervalle der Lösungen zusammenhängen und was man über die Eindeutigkeit von Lösungen aussagen kann.

**Aufgabe 37.5.** Finde alle Lösungen des Differentialgleichungssystems zum Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto (t^2 x, yt + \sin t).$$

**Aufgabe 37.6.** Finde die Lösung  $\varphi$  des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, v, w) \longmapsto (t^2 - t)(v, w) = ((t^2 - t)v, (t^2 - t)w),$$

mit  $\varphi(0) = (1, 1)$ .

**Aufgabe 37.7.** Sei

$$F: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto F(t, v),$$

ein Vektorfeld. Zeige, dass eine konstante Abbildung

$$\varphi: I \longrightarrow U, t \longmapsto \varphi(t) = c,$$

genau dann eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung  $v' = F(t, v)$  ist, wenn  $F(t, c) = 0$  ist für alle  $t \in I$ .

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 37.8.** (4 Punkte)

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = \left( -\sin^3 t \cos t, \frac{t^3 - t + 1}{t^2 - 4} \right) \text{ mit } v(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 37.9.** (4 Punkte)

Finde die Lösung des Anfangswertproblems zum Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto \left( xt - 3(t+1)e^{-t}, \frac{t^2}{\sin y} \right)$$

und zur Anfangsbedingung  $v(0) = (2, 0)$ .



**Aufgabe 37.10.** (4 Punkte)

Finde die Lösung  $\varphi$  des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, v, w) \longmapsto (t^3 - t)(v, w) = ((t^3 - t)v, (t^3 - t)w),$$

mit  $\varphi(0) = (2, 3)$ .

**Aufgabe 37.11.** (4 Punkte)

Finde die Lösung  $\varphi$  des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, v, w) \longmapsto (t^2v)(v, w) = (t^2v^2, t^2vw),$$

mit  $\varphi(0) = (5, -1)$ .

**Aufgabe 37.12.** (6 Punkte)

Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $U \subseteq V$  offen und

$$F: U \longrightarrow V$$

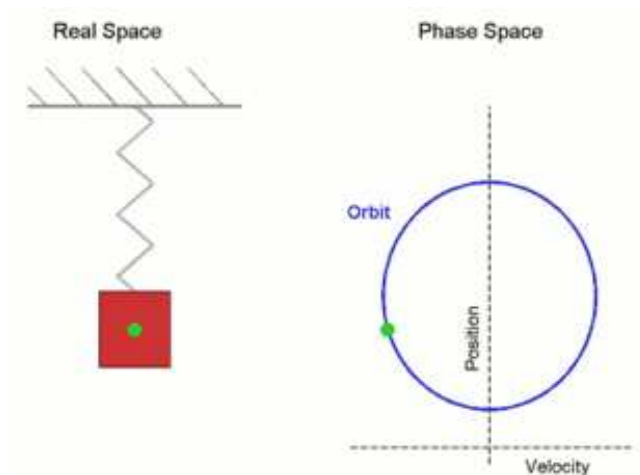
ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Es sei

$$v: J \longrightarrow U$$

eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung  $v' = F(v)$ . Es gebe zwei Zeitpunkte  $t_0 \neq t_1$  in  $J$  mit  $v(t_0) = v(t_1)$ . Zeige, dass es dann eine auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Lösung dieser Differentialgleichung gibt.

## 38. VORLESUNG - DIFFERENTIALGLEICHUNGEN HÖHERER ORDNUNG

Viele physikalische Bewegungsprozesse sind nicht dadurch determiniert, dass zu jedem Zeit- und Ortspunkt die Bewegungsrichtung (also die gerichtete Geschwindigkeit) vorgegeben wird, sondern dadurch, dass zu jedem Zeit- und Ortspunkt eine Kraft auf ein Teilchen wirkt, die dieses beschleunigt. In diesem Fall kann die Bewegung also nicht durch die erste Ableitung (Geschwindigkeit) modelliert werden, sondern durch die zweite Ableitung (Beschleunigung). Typische Beispiele hierzu sind die durch die Gravitation oder eine Federkraft hervorgerufenen Bewegungen.



**Beispiel 38.1.** Wir betrachten die Bewegung eines Punktes auf der Geraden, wobei die Lage des Punktes proportional zur auf ihn wirkenden Kraft (bzw. Beschleunigung) in Richtung des Nullpunkts sein soll. Wenn der Punkt sich in  $\mathbb{R}_+$  befindet und sich in die positive Richtung bewegt, so wirkt diese Kraft bremsend, wenn er sich in die negative Richtung bewegt, so wirkt die Kraft beschleunigend. Mit der Proportionalitätskonstante 1 gelangt man zur linearen Differentialgleichung (zweiter Ordnung)

$$y'' = -y,$$

die diesen Bewegungsvorgang beschreibt. Als Anfangsbedingung wählen wir  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = v$ , zum Zeitpunkt 0 soll die Bewegung also durch den Nullpunkt gehen und dort die Geschwindigkeit  $v$  besitzen. Man kann sofort die Lösung

$$y(t) = v \cdot \sin t$$

angeben.

**Beispiel 38.2.** Ein Gegenstand der Masse  $m$  wird aus der Höhe losgelassen und fällt unter dem Einfluss der Gravitation zu Boden. Dabei wirkt auf den Körper einerseits die Gravitationskraft  $gm$  (die Erdbeschleunigung  $g$  nehmen wir für diesen Bewegungsvorgang als konstant an), die ihn beschleunigt, andererseits wird diese Beschleunigung durch den Luftwiderstand verringert. Nach einem physikalischen Gesetz ist die Reibung (bei relativ kleinen Geschwindigkeiten) proportional und entgegengesetzt zur Geschwindigkeit des Körpers. Es sei  $\beta$  der Reibungswiderstand, also dieser Proportionalitätsfaktor. Die auf den Körper (nach unten) wirkende Gesamtkraft ist daher

$$F(t) = gm - \beta y'(t).$$

Wegen  $y''(t) = \frac{F(t)}{m}$  gilt daher für diesen Bewegungsvorgang die Differentialgleichung

$$y'' = -\frac{\beta}{m}y' + g.$$

**Definition 38.3.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und

$$g: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann nennt man den Ausdruck

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

eine *Differentialgleichung der Ordnung  $n$* .

Unter einer *Lösung einer Differentialgleichung höherer Ordnung* versteht man eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion

$$y: J \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto y(t)$$

(wobei  $J \subseteq I$  ein offenes Teilintervall ist) derart, dass

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

für alle  $t \in J$  gilt.

Differentialgleichungen beliebiger Ordnung können unter Inkaufnahme von neuen Variablen auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung zurückgeführt werden.

**Lemma 38.4.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und

$$g: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann ist die Differentialgleichung höherer Ordnung

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

über die Beziehung

$$v_i := y^{(i)}$$

äquivalent zum Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ g(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

*Beweis.* Wenn

$$y: J \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Lösung der Differentialgleichung höherer Ordnung

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

ist, so sind alle Funktionen  $v_i = y^{(i)}$  für  $i = 0, \dots, n-1$  differenzierbar, und es gilt  $v'_i = v_{i+1}$  für  $i = 0, \dots, n-2$  nach Definition und schließlich

$$\begin{aligned} v'_{n-1}(t) &= (y^{(n-1)})'(t) \\ &= y^{(n)}(t) \\ &= g(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ &= g(t, v_0(t), v_1(t), v_2(t), \dots, v_{n-1}(t)). \end{aligned}$$

Wenn umgekehrt

$$v: J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems zum Vektorfeld

$$\begin{aligned} f: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, v_0, \dots, v_{n-1}) &\longmapsto f(t, v_0, \dots, v_{n-1}) \\ &= (v_1, \dots, v_{n-1}, g(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1})), \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich sukzessive aus den ersten  $n-1$  Gleichungen, dass  $y = v_0$   $n$ -mal differenzierbar ist, und die letzte Gleichung des Differentialgleichungssystems besagt gerade

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)).$$

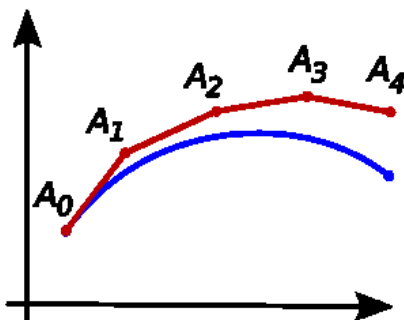
□

Mit dieser Umformung ist auch klar, wie sinnvolle Anfangsbedingungen für eine Differentialgleichung höherer Ordnung aussehen. Man muss nicht nur einen Startwert  $y(t_0) = w_0$ , sondern auch die höheren Ableitungen  $y'(t_0) = w_1$ ,  $y''(t_0) = w_2$ , usw. festlegen.

Es ist im Allgemeinen schwierig, eine Differentialgleichung explizit zu lösen. Wir besprechen daher zunächst zwei approximierende Verfahren, nämlich das *eulersche Polygonzugverfahren* und den Potenzreihenansatz.

### Polygonzugverfahren

Mit dem (eulerschen) Polygonzugverfahren wird die Lösungskurve einer Differentialgleichung diskret approximiert.



**Verfahren 38.5.** Es sei ein Vektorfeld

$$F: G \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

auf einer offenen Menge  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und eine Anfangsbedingung  $y(t_0) = P \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Das *eulersche Polygonzugverfahren* funktioniert folgendermaßen: Man wählt eine Schrittweite  $s > 0$  und berechnet rekursiv die Punktfolge  $P_n$ , durch  $P_0 = P$  und

$$P_{n+1} = P_n + sF(t_0 + ns, P_n).$$

Zu einem schon konstruierten Punkt  $P_n$  wird also das  $s$ -fache des Richtungsvektors zum Zeitpunkt  $t_0 + ns$  an diesem Punkt hinzuaddiert. Dies funktioniert nur solange die Punkte im Definitionsbereich des Vektorfeldes liegen. Der zu dieser Punktfolge gehörende *Strecken zug* oder *Polygonzug*

$$\delta: \mathbb{R}_{\geq t_0} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ist die lineare Interpolation mit  $\delta(t_0 + ns) = P_n$ , d.h. für  $t$  mit  $t_0 + ns \leq t \leq t_0 + (n+1)s$  ist

$$\delta(t) = P_n + \frac{t - t_0 - ns}{s} (P_{n+1} - P_n).$$

Dieser Streckenzug  $\delta$  stellt eine stückweise lineare Approximation der Lösungskurve des Anfangswertproblems dar. Für eine kleinere Schrittweite wird die Approximation im Allgemeinen besser.

**Beispiel 38.6.** Bei einer ortsunabhängigen Differentialgleichung

$$y' = g(t)$$

ergibt sich  $y$  einfach als eine Stammfunktion zu  $g$ . Wendet man in dieser Situation Verfahren 38.5 zum Startzeitpunkt  $t_0$ , zum Startpunkt  $c$  und zur Schrittweite  $s$  an, so ergibt sich die rekursive Beziehung

$$P_0 = c \text{ und } P_{n+1} = P_n + sg(t_0 + ns).$$

Daher ist offenbar

$$P_n = c + s(g(t_0) + g(t_0 + s) + g(t_0 + 2s) + \dots + g(t_0 + (n-1)s)).$$

D.h. dass man zu dem Ausgangswert  $c$  das Treppenintegral zur äquidistanten Unterteilung  $t_0, t_0+s, t_0+2s, \dots, t_0+(n-1)s$  (und zur durch  $g(t_0+ks)$  auf dem Teilintervall  $[t_0+ks, t_0+(k+1)s]$  gegebenen Treppenfunktion) hinzuaddiert. Der zugehörige Streckenzug ist das (stückweise lineare) Integral zu dieser Treppenfunktion.

**Beispiel 38.7.** Wir wollen für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - ty \\ txy \end{pmatrix} = F(t, x, y)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gemäß Verfahren 38.5 einen approximierenden Streckenzug berechnen. Wir wählen die Schrittweite  $s = \frac{1}{10}$ . Somit ist

$$\begin{aligned} P_0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ P_1 &= P_0 + \frac{1}{10}F(0, P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ P_2 &= P_1 + \frac{1}{10}F\left(\frac{1}{10}, P_1\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \left( \left(\frac{11}{10}\right)^2 - \frac{1}{10} \cdot 1 \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{111}{100} \\ \frac{11}{100} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2 + \frac{1}{10}F\left(\frac{2}{10}, P_2\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \left( \left(\frac{1211}{1000}\right)^2 - \frac{2}{10} \cdot \frac{1011}{1000} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{1264321}{1000000} \\ \frac{2448642}{1000000} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{133743210}{100000000} \\ \frac{103548642}{100000000} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### Potenzreihenansatz

Nicht alle Differentialgleichungen sind explizit lösbar, und selbst wenn es eine explizite Lösung gibt, so ist es häufig schwierig, diese zu finden. Statt der vollen Information einer Lösungskurve begnügt man sich häufig mit der Teilinformation, die in der Taylor-Entwicklung der Kurve (bis zu einem bestimmten Grad) enthalten ist, d.h. man bestimmt gewisse Ableitungen der Kurve zu einem bestimmten Zeit- und Ortpunkt. Diese Information kann man häufig direkt aus der Differentialgleichung ablesen, ohne die Lösungskurve zu bestimmen. Diese Vorgehensweise setzt voraus, dass das Vektorfeld durch „analytische“ (beispielsweise polynomiale) Daten gegeben ist.

**Verfahren 38.8.** Es sei ein Anfangswertproblem

$$x' = F(t, x) \text{ mit } x(0) = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$$

zu einem Vektorfeld

$$F: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

gegeben, wobei die Komponentenfunktionen  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , polynomial (oder durch Potenzreihen gegeben) seien. Dann lässt sich ein *Potenzreihenansatz* für die Lösung durchführen. Das bedeutet, dass man den Ansatz

$$x_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ki} t^k$$

mit unbestimmten Koeffizienten  $a_{ki}$  macht, und diese Koeffizienten (bis zu einem gewünschten Grad) aus den  $n$  Gleichungen

$$x_i'(t) = F_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$$

sukzessive bestimmt. Die Anfangsbedingung

$$x_i(0) = a_{0i} = c_i$$

legt dabei die konstanten Koeffizienten fest. In das Differentialgleichungssystem werden die Potenzreihen links und rechts eingesetzt und ausgewertet, wobei die Ableitung links formal zu nehmen ist und rechts die Reihen formal zu addieren und zu multiplizieren sind. Dies ergibt Gleichungen für Potenzreihen in  $t$ , die durch Koeffizientenvergleich, beginnend mit den Koeffizienten von kleinem Grad, gelöst werden können.

**Beispiel 38.9.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 t - y + t^3 + e^t \text{ mit } y(0) = 0$$

und wollen es mit einem Potenzreihenansatz lösen. Sei also

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

die auszuwertende Potenzreihengleichung ist somit

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)' &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)^2 t - \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k + t^3 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k. \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung legt  $a_0 = 0$  fest. Für den konstanten Term (also zu  $t^0$ ) ergibt sich aus der Potenzreihengleichung

$$a_1 = -a_0 + 1 = 1.$$

Für  $t^1$  ergibt sich

$$2a_2 = a_0^2 - a_1 + 1 = 0.$$

Für  $t^2$  ergibt sich

$$3a_3 = 2a_0 a_1 - a_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

also ist  $a_3 = \frac{1}{6}$ . Für  $t^3$  ergibt sich

$$4a_4 = 2a_0 a_2 + a_1^2 - a_3 + 1 + \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{6} + 1 + \frac{1}{6} = 2,$$

also ist  $a_4 = \frac{1}{2}$ . Für  $t^4$  ergibt sich

$$5a_5 = 2a_0a_3 + 2a_1a_2 - a_4 + \frac{1}{24} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{24} = -\frac{11}{24},$$

also ist  $a_5 = -\frac{11}{120}$ . Die Taylor-Entwicklung der Lösungskurve bis zur Ordnung 5 ist demnach

$$t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{11}{120}t^5.$$

**Beispiel 38.10.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} tx - y^2 \\ xy - t^2 \end{pmatrix} \text{ mit } x(0) = 0 \text{ und } y(0) = 1$$

und machen den Potenzreihenansatz  $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$  und  $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ . Aufgrund der Anfangsbedingung ist

$$a_0 = 0 \text{ und } b_0 = 1.$$

Das Differentialgleichungssystem führt auf die beiden Potenzreihengleichungen

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} = t \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) - \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right)^2$$

und

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k t^{k-1} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right) - t^2,$$

die wir gradweise auswerten. Für den Grad 0 (der Potenzreihengleichungen) ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$a_1 = -b_0^2 = -1 \text{ und } b_1 = a_0 b_0 = 0.$$

Für den Grad 1 ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$2a_2 = a_0 - 2b_0 b_1 = 0 \text{ und } 2b_2 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = -1,$$

also ist  $a_2 = 0$  und  $b_2 = -\frac{1}{2}$ . Für den Grad 2 ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$3a_3 = a_1 - 2b_0 b_2 - b_1^2 = -1 + 1 = 0 \text{ und } 3b_3 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 - 1 = -1,$$

also ist  $a_3 = 0$  und  $b_3 = -\frac{1}{3}$ . Für den Grad 3 ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$4a_4 = a_2 - 2b_0 b_3 - 2b_1 b_2 = \frac{2}{3} \text{ und } 4b_4 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = \frac{1}{2},$$

also ist  $a_4 = \frac{1}{6}$  und  $b_4 = \frac{1}{8}$ . Die Taylor-Entwicklung der Lösungskurve bis zur Ordnung 4 ist demnach

$$\left( -t + \frac{1}{6}t^4, 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{8}t^4 \right).$$



**Bemerkung 38.11.** Eine Differentialgleichung höherer Ordnung

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

kann man entsprechend Bemerkung 38.8 mit einem *Potenzreihenansatz*, also mit einem Ansatz der Form

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

mit unbestimmten Koeffizienten  $a_k$ , (bis zu einer gewissen Ordnung) lösen. Dazu muss die Funktion  $g$  polynomial (oder durch eine Potenzreihe gegeben) sein. Damit die Lösung eindeutig ist, müssen zusätzlich Anfangsbedingungen

$$y(0) = b_0, y'(0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$$

vorgegeben sein. Die Koeffizienten  $a_k$  werden sukzessive unter Verwendung der Differentialgleichung und der Anfangsbedingungen gelöst.

**Beispiel 38.12.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'' = y'y + \sin t \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1$$

und wollen es mit einem Potenzreihenansatz lösen. Sei also

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

die auszuwertende Potenzreihengleichung ist somit

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right)'' &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2} \\ &= \left( \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}. \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung legt  $a_0 = 0$  und  $a_1 = 1$  fest. Für den konstanten Term (also zu  $t^0$ ) ergibt sich aus der Potenzreihengleichung

$$2a_2 = a_1 a_0 = 0,$$

also ist  $a_2 = 0$ . Für  $t^1$  ergibt sich

$$6a_3 = a_1^2 + 2a_2 a_0 + 1 = 2$$

also ist  $a_3 = \frac{1}{3}$ . Für  $t^2$  ergibt sich

$$12a_4 = a_1 a_2 + 2a_2 a_1 + 3a_3 a_0 = 0,$$

also ist  $a_4 = 0$ . Für  $t^3$  ergibt sich

$$20a_5 = a_1 a_3 + 2a_2^2 + 3a_3 a_1 + 4a_4 a_0 - \frac{1}{6} = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6},$$

also ist  $a_5 = \frac{7}{120}$ . Die Taylor-Entwicklung der Lösungskurve bis zur Ordnung 5 ist demnach

$$t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{120}t^5.$$

**Aufwärmataufgaben**

**Aufgabe 38.1.** Finde einen zweidimensionalen Lösungsraum für die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = y.$$

Löse damit das Anfangswertproblem

$$y'' = y \text{ mit } y(0) = 3 \text{ und } y'(0) = -2.$$

**Aufgabe 38.2.** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = y$$

mit der Anfangsbedingung  $y(0) = 1$ . Bestimme zur Schrittweite  $s = \frac{1}{k}$  die approximierenden Punkte  $P_n$  gemäß des Polygonzugverfahrens. Bestimme insbesondere  $P_k$ . Was passiert mit  $P_k$  für  $k \rightarrow \infty$ ?

**Aufgabe 38.3.** Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y \text{ mit } y(0) = 1$$

durch einen Potenzreihenansatz.

**Aufgabe 38.4.** Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y^3 - y - 4t + 2t^2 \text{ mit } y(0) = 2$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

**Aufgabe 38.5.** Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = -y \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1$$

durch einen Potenzreihenansatz.

**Aufgabe 38.6.** Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} xt^2 - y^2t \\ xy \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

**Aufgabe 38.7.** Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} t^3 - yt^2 \\ tx^2y - \sinh t \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 38.8.** (6 Punkte)

a) Schreibe ein Computerprogramm, das zu dem Vektorfeld aus Beispiel 38.7 zu einem Startzeitpunkt  $t_0$ , einem Startpunkt  $P_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  und einer vorgegebenen Schrittweite  $s > 0$  die approximierenden Punkte  $P_n$  berechnet.

b) Berechne mit diesem Programm die Punkte  $P_n$  für

(1)  $t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{10}, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10.$

(2)  $t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{100}, n = 100.$

(3)  $t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{1000}, n = 1000.$

(4)  $t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 1,001 \\ 0,999 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{1000}, n = 1000.$

(5)  $t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 1,01 \\ 0,99 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{1000}, n = 1000.$

(6)  $t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0,9 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{1000}, n = 1000.$

(7)  $t_0 = -3, P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{10}, n = 100.$

(8)  $t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{1000}, n = 1000.$

(Abzugeben ist lediglich Teil b), und zwar in einer leserfreundlichen Form.)

**Aufgabe 38.9.** (5 (1+2+2) Punkte)

a) Übersetze das Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$y'' = -y \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1$$

in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

b) Bestimme mit dem Polygonzugverfahren zur Schrittweite  $s = \frac{1}{2}$  die Näherungspunkte  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$  für dieses System.

c) Berechne den Wert des zugehörigen Streckenzuges an der Stelle  $t = \pi/2$ .

**Aufgabe 38.10.** (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + t^2y - 5ty^2 + 3t^3 \text{ mit } y(0) = 0$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

**Aufgabe 38.11.** (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = y + (y')^2 \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

**Aufgabe 38.12.** (4 Punkte)

Finde alle polynomialen Lösungen der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' = 9y - 3ty' + y''.$$

**Aufgabe 38.13.** (6 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} x^2t - xyt + y^3 - yt^3 \\ x^3 - xy^2 + \cos t \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

## 39. VORLESUNG - EIGENTHEORIE

Unter einer Achsenspiegelung in der Ebene verhalten sich gewisse Vektoren besonders einfach. Die Vektoren auf der Spiegelungsachse werden auf sich selbst abgebildet, und die dazu senkrechten Vektoren werden auf ihr Negatives abgebildet. Für all diese Vektoren liegt das Bild unter der linearen Abbildung in dem von diesem Vektor aufgespannten eindimensionalen Unterraum. In der Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren untersucht man, ob es zu einer linearen Abbildung Geraden (also eindimensionale Unterräume) gibt, die unter der Abbildung auf sich selbst abgebildet werden. Eine Zielsetzung ist dabei, zu einer gegebenen linearen Abbildung eine möglichst einfache beschreibende Matrix zu finden. Eine wichtige Anwendung ist dabei, Lösungen für ein lineares Differentialgleichungssystem zu finden.



Eine *Achsen Spiegelung* besitzt zwei Eigengeraden, die Spiegelungsachse zum Eigenwert 1 und die dazu senkrechte Gerade zum Eigenwert  $-1$ .

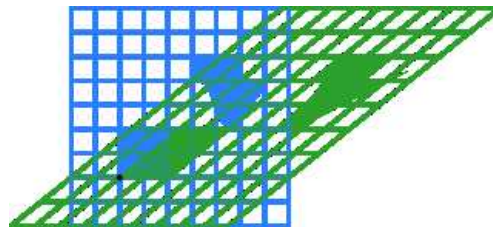
**Definition 39.1.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Element  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , ein *Eigenvektor* von  $\varphi$  (zum Eigenwert  $\lambda$ ), wenn

$$\varphi(v) = \lambda v$$

mit einem  $\lambda \in K$  gilt.



Eine *Scherung* hat eine Eigengerade zum Eigenwert 1 und keine weitere Eigenwerte.

**Definition 39.2.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Element  $\lambda \in K$  ein *Eigenwert* zu  $\varphi$ , wenn es einen von 0 verschiedenen Vektor  $v \in V$  gibt mit

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

**Definition 39.3.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zu  $\lambda \in K$  nennt man

$$\text{Eig}_\lambda(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$$

den *Eigenraum* von  $\varphi$  zum Wert  $\lambda$ .

Wir erlauben also beliebige Werte (nicht nur Eigenwerte) in der Definition der Eigenräume. Einen eindimensionalen Eigenraum nennen wir auch *Eigengerade*. Wir betrachten einige einfache Beispiele über  $\mathbb{R}$ .

**Beispiel 39.4.** Eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  ist die Multiplikation mit einer festen Zahl  $a \in \mathbb{R}$  (dem *Streckungsfaktor* oder *Proportionalitätsfaktor*). Daher ist jede Zahl  $v \neq 0$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $a$  und der Eigenraum zu diesem Eigenwert ist ganz  $\mathbb{R}$ . Es gibt neben  $a$  keinen weiteren Eigenwert, sämtliche Eigenräume zu  $\lambda \neq a$  sind 0.

**Beispiel 39.5.** Eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$  ist bezüglich der Standardbasis durch eine  $2 \times 2$ -Matrix gegeben. Wir betrachten die Eigenwerte zu einigen elementaren Beispielen. Eine Streckung ist durch  $v \mapsto av$  mit einem Streckungsfaktor  $a \in \mathbb{R}$  gegeben. Jeder Vektor  $v \neq 0$  ist ein Eigenvektor zum Eigenwert  $a$  und der Eigenraum zu diesem Eigenwert ist ganz  $\mathbb{R}^2$ . Es gibt neben  $a$  keinen weiteren Eigenwert, sämtliche Eigenräume zu  $\lambda \neq a$  sind 0. Die Identität besitzt den einzigen Eigenwert 1.

Eine Achsenspiegelung an der  $x$ -Achse wird durch die Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  beschrieben. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist die  $x$ -Achse, der Eigenraum zum Eigenwert  $-1$  ist die  $y$ -Achse. Ein Vektor  $(s, t)$  mit  $s, t \neq 0$  kann kein Eigenvektor sein, da die Gleichung

$$(s, -t) = \lambda(s, t)$$

dann keine Lösung besitzt.

Eine ebene Drehung wird durch die Drehmatrix  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$  zu einem Drehwinkel  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha < 2\pi$ , gegeben. Bei  $\alpha = 0$  liegt die Identität vor, bei  $\alpha = \pi$  liegt die Halbdrehung vor, also die Punktspiegelung bzw. die Streckung mit dem Faktor  $-1$ . Bei allen anderen Drehwinkeln wird keine Gerade auf sich selbst abgebildet, sodass diese Drehungen keine Eigenwerte und keine Eigenvektoren besitzen (und alle Eigenräume 0 sind).

**Lemma 39.6.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine lineare Abbildung und  $\lambda \in K$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Der Eigenraum*

$$\text{Eig}_\lambda(\varphi)$$

*ist ein Untervektorraum von  $V$ .*

- (2)  *$\lambda$  ist genau dann ein Eigenwert zu  $\varphi$ , wenn der Eigenraum  $\text{Eig}_\lambda(\varphi)$  nicht der Nullraum ist.*
- (3) *Ein Vektor  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , ist genau dann ein Eigenvektor zu  $\lambda$ , wenn  $v \in \text{Eig}_\lambda(\varphi)$  ist.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 39.3. □

Für Matrizen verwenden wir die entsprechenden Begriffe. Ist  $\varphi: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung und  $M$  eine beschreibende Matrix bezüglich einer Basis, so gilt für einen Eigenwert  $\lambda$  und einen Eigenvektor  $v \in V$  mit dem

Koordinatentupel  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  bezüglich dieser Basis die Beziehung

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Die Matrix  $N$  bezüglich einer weiteren Basis steht dann zu  $M$  in der Beziehung  $N = BMB^{-1}$ , wobei  $B$  eine invertierbare Matrix ist. Es sei

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

das Koordinatentupel bezüglich der anderen Basis. Dann ist

$$\begin{aligned} N \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} &= (BMB^{-1}) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \\ &= (BMB^{-1})B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= BM \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= B\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

d.h. die beschreibenden Matrizen besitzen dieselben Eigenwerte, wobei sich allerdings die beschreibenden Koordinatentupel für die Eigenvektoren mit den Basen ändern.

**Beispiel 39.7.** Wir betrachten die durch eine Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi: K^n \longrightarrow K^n, e_i \longmapsto d_i e_i.$$

Die Diagonaleinträge  $d_i$  sind Eigenwerte von  $\varphi$ , und zwar ist  $e_i$  ein zugehöriger Eigenvektor. Die Eigenräume sind

$$\text{Eig}_d(\varphi) = \{v \in K^n \mid v \text{ ist Linearkombination von solchen } e_i, \text{ für die } d = d_i \text{ ist}\}.$$

Diese Räume sind genau dann von null verschieden, wenn  $d$  mit einem Diagonaleintrag übereinstimmt. Die Dimension der Eigenräume ist gegeben durch die Anzahl, wie oft der Wert  $d$  in der Diagonalen vorkommt. Die Summe der Dimensionen ergibt  $n$ .

**Beispiel 39.8.** Bei einer *orthogonalen Spiegelung* des  $\mathbb{R}^n$  an einem  $(n-1)$ -dimensionalen Untervektorraum  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  wird dieser Unterraum fixiert und jeder Vektor wird senkrecht zu  $U$  auf die andere Seite von  $U$  abgebildet. Wenn  $v_1, \dots, v_{n-1}$  eine Basis von  $U$  und  $v_n$  ein zu  $U$  orthogonaler Vektor ist, so wird die Spiegelung bezüglich dieser Basis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

**Beispiel 39.9.** Wir betrachten die durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y \\ x \end{pmatrix}.$$

Die Frage, ob diese Abbildung Eigenwerte besitzt, führt zur Frage, ob es  $\lambda \in \mathbb{Q}$  derart gibt, dass die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



eine nichttriviale Lösung  $(x, y) \neq (0, 0)$  besitzt. Bei gegebenem  $\lambda$  kann dies auf ein lineares Problem zurückgeführt werden, das mit dem Eliminationsalgorithmus einfach gelöst werden kann. Die Frage aber, ob es Eigenwerte überhaupt gibt, führt wegen dem variablen „Eigenwertparameter“  $\lambda$  zu einem nichtlinearen Problem. Das obige Gleichungssystem bedeutet ausgeschrieben

$$5y = \lambda x \text{ und } x = \lambda y.$$

Bei  $y = 0$  ist auch  $x = 0$ , der Nullvektor ist aber kein Eigenvektor. Sei also  $y \neq 0$ . Aus den beiden Gleichungen erhält man die Bedingung

$$5y = \lambda x = \lambda^2 y,$$

woraus

$$5 = \lambda^2$$

folgt. Da in  $\mathbb{Q}$  die Zahl 5 keine Quadratwurzel besitzt, gibt es keine Lösung und das bedeutet, dass  $\varphi$  keine Eigenwerte und damit auch keine Eigenvektoren besitzt.

Wir fassen nun die Matrix  $M$  als eine reelle Matrix auf und untersuchen die zugehörige Abbildung

$$\psi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y \\ x \end{pmatrix}.$$

Die gleichen Rechnungen führen auf die notwendige Lösungsbedingung  $5 = \lambda^2$ , die jetzt von den beiden reellen Zahlen

$$\lambda_1 = \sqrt{5} \text{ und } \lambda_2 = -\sqrt{5}$$

erfüllt wird. Für diese beiden Werte kann man unabhängig voneinander nach Eigenvektoren suchen. Wir betrachten zuerst den Fall  $\lambda = \sqrt{5}$ , was zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

führt. Dies schreibt man als

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

bzw. als lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -5 \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses ist einfach lösbar, der Lösungsraum ist eindimensional und

$$v = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basislösung.

Für  $\lambda = -\sqrt{5}$  führen dieselben Umformungen zu einem weiteren linearen Gleichungssystem, für das der Vektor

$$w = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basislösung ist. Über  $\mathbb{R}$  sind also  $\sqrt{5}$  und  $-\sqrt{5}$  Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume sind

$$\text{Eig}_{\sqrt{5}}(\psi) = \left\{ s \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } \text{Eig}_{-\sqrt{5}}(\psi) = \left\{ s \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} .$$

### Weiteres zu Eigenräumen

**Lemma 39.10.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine lineare Abbildung. Dann ist*

$$\text{kern } \varphi = \text{Eig}_0(\varphi)$$

*Insbesondere ist 0 genau dann ein Eigenwert von  $\varphi$ , wenn  $\varphi$  nicht injektiv ist.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 39.4. □

Allgemeiner gilt die folgende Charakterisierung.

**Lemma 39.11.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine lineare Abbildung. Es sei  $\lambda \in K$ . Dann ist*

$$\text{Eig}_\lambda(\varphi) = \text{kern } (\lambda \cdot \text{Id}_V - \varphi) .$$

*Beweis.* Sei  $v \in V$ . Dann ist  $v \in \text{Eig}_\lambda(\varphi)$  genau dann, wenn  $\varphi(v) = \lambda v$  ist, und dies ist genau bei  $\lambda v - \varphi(v) = 0$  der Fall, was man als  $(\lambda \cdot \text{Id}_V - \varphi)(v) = 0$  schreiben kann. □

**Bemerkung 39.12.** Neben dem Eigenraum zu  $0 \in K$ , der der Kern der linearen Abbildung ist, sind die Eigenwerte 1 und  $-1$  besonders interessant. Der Eigenraum zu 1 besteht aus allen Vektoren, die auf sich selbst abgebildet werden. Auf diesem Unterraum wirkt also die Abbildung wie die Identität. Der Eigenraum zu  $-1$  besteht aus allen Vektoren, die auf ihr Negatives abgebildet werden. Auf diesem Unterraum wirkt die Abbildung wie eine Punktspiegelung.

**Lemma 39.13.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine lineare Abbildung. Es seien  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  Elemente in  $K$ . Dann ist*

$$\text{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \text{Eig}_{\lambda_2}(\varphi) = 0.$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 39.11. □

**Lemma 39.14.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine lineare Abbildung. Es seien  $v_1, \dots, v_n$  Eigenvektoren zu (paarweise) verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ . Dann sind  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig.*

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach  $n$ . Für  $n = 0$  ist die Aussage richtig. Sei die Aussage also für weniger als  $n$  Zahlen bewiesen. Betrachten wir eine Darstellung der 0, also

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0.$$

Wir wenden darauf  $\varphi$  an und erhalten einerseits

$$a_1\varphi(v_1) + \dots + a_n\varphi(v_n) = \lambda_1a_1v_1 + \dots + \lambda_na_nv_n = 0.$$

Andererseits multiplizieren wir die obige Gleichung mit  $\lambda_n$  und erhalten

$$\lambda_na_1v_1 + \dots + \lambda_na_nv_n = 0.$$

Die so entstandenen Gleichungen zieht man voneinander ab und erhält

$$(\lambda_n - \lambda_1)a_1v_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda_{n-1})a_{n-1}v_{n-1} = 0.$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass alle Koeffizienten  $(\lambda_n - \lambda_i)a_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , sein müssen. Wegen  $\lambda_n - \lambda_i \neq 0$  folgt  $a_i = 0$  für  $i = 1, \dots, n-1$  und wegen  $v_n \neq 0$  ist dann auch  $a_n = 0$ . □

**Korollar 39.15.** *Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine lineare Abbildung. Dann gibt es nur endlich viele Eigenwerte zu  $\varphi$ .*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 39.6. □

### Eigenwerte bei Isometrien

**Satz 39.16.** *Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine lineare Isometrie. Dann besitzt jeder Eigenwert von  $\varphi$  den Betrag 1.*

*Beweis.* Es sei  $\varphi(v) = \lambda v$  mit  $v \neq 0$ , d.h.  $v$  ist ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ . Wegen der Isometrieeigenschaft gilt

$$\|v\| = \|\varphi(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

Wegen  $\|v\| \neq 0$  folgt daraus  $|\lambda| = 1$ , also  $\lambda = \pm 1$ . □

Im Allgemeinen muss eine Isometrie keine Eigenwerte besitzen, bei ungerader Dimension allerdings schon.

### 39. ARBEITSBLATT

#### AufwärmAufgaben

**Aufgabe 39.1.** Bestimme die Eigenvektoren und die Eigenwerte zu einer linearen Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die durch eine Matrix der Form  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$  gegeben ist.

Der Begriff des Eigenvektors ist auch für unendlichdimensionale Vektorräume definiert und wichtig, wie die folgende Aufgabe zeigt.

**Aufgabe 39.2.** Es sei  $V$  der reelle Vektorraum, der aus allen unendlich oft differenzierbaren Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  besteht.

- a) Zeige, dass die Ableitung  $f \mapsto f'$  eine lineare Abbildung von  $V$  nach  $V$  ist.
- b) Bestimme die Eigenwerte der Ableitung und zu jedem Eigenwert mindestens einen Eigenvektor.<sup>14</sup>
- c) Bestimme zu jeder reellen Zahl die Eigenräume und deren Dimension.

**Aufgabe 39.3.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und  $\lambda \in K$ . Zeige folgende Aussagen.

- (1) Der Eigenraum
 
$$\text{Eig}_\lambda(\varphi)$$
 ist ein Untervektorraum von  $V$ .
- (2)  $\lambda$  ist genau dann ein Eigenwert zu  $\varphi$ , wenn der Eigenraum  $\text{Eig}_\lambda(\varphi)$  nicht der Nullraum ist.
- (3) Ein Vektor  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , ist genau dann ein Eigenvektor zu  $\lambda$ , wenn  $v \in \text{Eig}_\lambda(\varphi)$  ist.

---

<sup>14</sup>In diesem Zusammenhang spricht man auch von *Eigenfunktionen*.

**Aufgabe 39.4.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass

$$\text{kern } \varphi = \text{Eig}_0(\varphi)$$

gilt.

**Aufgabe 39.5.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Sei  $\lambda \in K$  und sei

$$U = \text{Eig}_\lambda(\varphi)$$

der zugehörige Eigenraum. Zeige, dass sich  $\varphi$  zu einer linearen Abbildung

$$\varphi|_U: U \longrightarrow U, v \longmapsto \varphi(v),$$

einschränken lässt, und dass diese Abbildung die Streckung um den Streckungsfaktor  $\lambda$  ist.

**Aufgabe 39.6.** Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass es dann nur endlich viele Eigenwerte zu  $\varphi$  gibt.

**Aufgabe 39.7.** Zeige, dass jede Matrix

$$M \in \text{Mat}_2(\mathbb{C})$$

mindestens einen Eigenwert besitzt.

**Aufgabe 39.8.** Es sei

$$M \in \text{Mat}_n(K)$$

eine Matrix mit  $n$  (paarweise) verschiedenen Eigenwerten. Zeige, dass die Determinante von  $M$  das Produkt der Eigenwerte ist.

**Aufgabe 39.9.** Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

derart, dass  $\varphi$  keine Eigenwerte besitzt, dass aber eine gewisse Potenz  $\varphi^n$ ,  $n \geq 1$ , Eigenwerte besitzt.

**Aufgabe 39.10.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung mit

$$\varphi^n = \text{Id}_V$$

für ein gewisses  $n \in \mathbb{N}$ .<sup>15</sup> Zeige, dass jeder Eigenwert  $\lambda$  von  $\varphi$  die Eigenschaft  $\lambda^n = 1$  besitzt.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 39.11.** (2 Punkte)

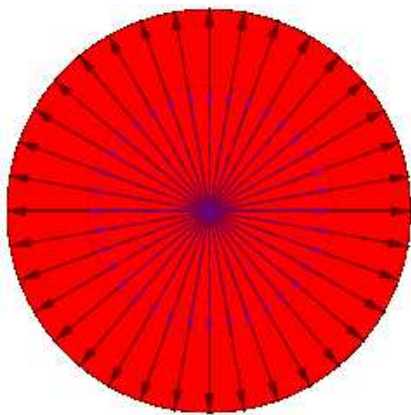
Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und seien  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  Elemente in  $K$ . Zeige, dass

$$\text{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \text{Eig}_{\lambda_2}(\varphi) = \{0\}$$

ist.



**Aufgabe 39.12.** (3 Punkte)

Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass  $\varphi$  genau dann eine Streckung ist, wenn jeder Vektor  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , ein Eigenvektor von  $\varphi$  ist.

<sup>15</sup>Der Wert  $n = 0$  ist hier erlaubt, aber aussageelos.

**Aufgabe 39.13.** (3 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass  $M$  als reelle Matrix keine Eigenwerte besitzt. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume von  $M$  als komplexer Matrix.

**Aufgabe 39.14.** (6 Punkte)

Betrachte die reellen Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

Man charakterisiere in Abhängigkeit von  $a, b, c, d$ , wann eine solche Matrix

- (1) zwei verschiedene Eigenwerte,
- (2) einen Eigenwert mit einem zweidimensionalen Eigenraum,
- (3) einen Eigenwert mit einem eindimensionalen Eigenraum,
- (4) keinen Eigenwert

besitzt.

**Aufgabe 39.15.** (6 Punkte)

Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei  $\lambda \neq 0$  ein Eigenwert von  $\varphi$  und  $v$  ein zugehöriger Eigenvektor. Zeige, dass es zu einer gegebenen Basis  $v, u_2, \dots, u_n$  von  $V$  eine Basis  $v, w_2, \dots, w_n$  gibt mit  $\langle v, u_j \rangle = \langle v, w_j \rangle$  und mit

$$\varphi(w_j) \in \langle u_i, i = 2, \dots, n \rangle$$

für alle  $j = 2, \dots, n$ .

Zeige ebenso, dass dies bei  $\lambda = 0$  nicht möglich ist.

## 40. VORLESUNG - DIAGONALISIERBARKEIT

**Das charakteristische Polynom**

Wir möchten zu einem Endomorphismus  $\varphi: V \rightarrow V$  die Eigenwerte und dann auch die Eigenräume bestimmen. Dazu ist das charakteristische Polynom entscheidend.

**Definition 40.1.** Zu einer  $n \times n$ -Matrix  $M$  mit Einträgen in einem Körper  $K$  heißt das Polynom

$$\chi_M := \det(X \cdot E_n - M)$$

das *charakteristische Polynom*<sup>16</sup> von  $M$ .

Für  $M = (a_{ij})_{ij}$  bedeutet dies

$$\chi_M = \det \begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & X - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

In dieser Definition nehmen wir Bezug auf die Determinante von Matrizen, die wir nur für Matrizen mit Einträgen in einem Körper definiert haben. Die Einträge sind jetzt aber Elemente im Polynomring  $K[X]$ . Da wir sie aber als Elemente in  $K(X)$  auffassen können,<sup>17</sup> ist dies eine sinnvolle Definition. Gemäß der Definition ist diese Determinante ein Element in  $K(X)$ , da aber alle Einträge der Matrix Polynome sind und bei der rekursiven Definition der Determinante nur multipliziert und addiert wird, ist das charakteristische Polynom wirklich ein Polynom. Der Grad des charakteristischen Polynoms ist  $n$  und der Leitkoeffizient ist 1, d.h. die Gestalt ist

$$\chi_M = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_1X + c_0.$$

Es gilt die wichtige Beziehung

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda E_n - M)$$

für jedes  $\lambda \in K$ , siehe Aufgabe 40.3.

Für eine lineare Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

auf einem endlichdimensionalen Vektorraum definiert man das *charakteristische Polynom*

$$\chi_\varphi := \chi_M,$$

wobei  $M$  eine beschreibende Matrix bezüglich einer beliebigen Basis sei. Der Determinantenmultiplikationssatz zeigt, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Basis ist.

<sup>16</sup>Manche Autoren definieren das charakteristische Polynom als Determinante von  $M - X \cdot E_n$  anstatt von  $X \cdot E_n - M$ . Dies ändert aber - und zwar nur bei  $n$  ungerade - nur das Vorzeichen.

<sup>17</sup> $K(X)$  heißt der Körper der rationalen Polynome; er besteht aus allen Brüchen  $P/Q$  zu Polynomen  $P, Q \in K[X]$  mit  $Q \neq 0$ . Bei  $K = \mathbb{R}$  kann man diesen Körper mit der Menge der rationalen Funktionen identifizieren.



**Satz 40.2.** *Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine lineare Abbildung. Dann ist  $\lambda \in K$  genau dann ein Eigenwert von  $\varphi$ , wenn  $\lambda$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $\chi_\varphi$  ist.*

*Beweis.* Es sei  $M$  eine beschreibende Matrix für  $\varphi$ , und sei  $\lambda \in K$  vorgegeben. Es ist

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda E_n - M) = 0$$

genau dann, wenn die lineare Abbildung

$$\lambda \text{Id}_V - \varphi$$

nicht bijektiv (und nicht injektiv) ist (wegen Satz 11.11 und Lemma 10.6). Dies ist nach Lemma 9.12 äquivalent zu

$$\text{Eig}_\lambda(\varphi) = \text{kern}(\lambda \text{Id}_V - \varphi) \neq 0,$$

was bedeutet, dass der Eigenraum zu  $\lambda$  nicht der Nullraum ist, also  $\lambda$  ein Eigenwert zu  $\varphi$  ist.  $\square$

**Beispiel 40.3.** Wir betrachten die reelle Matrix  $M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_M &= \det(xE_2 - M) \\ &= \det\left(x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} x & -5 \\ -1 & x \end{pmatrix} \\ &= x^2 - 5. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also  $x = \pm\sqrt{5}$  (diese Eigenwerte haben wir auch in Beispiel 39.9 ohne charakteristisches Polynom gefunden).

**Beispiel 40.4.** Zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom gleich

$$\chi_M = \det\begin{pmatrix} X-2 & -5 \\ 3 & X-4 \end{pmatrix} = (X-2)(X-4) + 15 = X^2 - 6X + 23.$$

Die Nullstellenbestimmung dieses Polynoms führt zur Bedingung

$$(X-3)^2 = -23 + 9 = -14,$$

die über  $\mathbb{R}$  nicht erfüllbar ist, sodass die Matrix über  $\mathbb{R}$  keine Eigenwerte besitzt. Über  $\mathbb{C}$  hingegen gibt es die beiden Eigenwerte  $3 + \sqrt{14}i$  und  $3 - \sqrt{14}i$ . Für den Eigenraum zu  $3 + \sqrt{14}i$  muss man

$$\begin{aligned} \text{Eig}_{3+\sqrt{14}i}(M) &= \text{kern} \left( \left( 3 + \sqrt{14}i \right) E_2 - M \right) \\ &= \text{kern} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{14}i & -5 \\ 3 & -1 + \sqrt{14}i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bestimmen, ein Basisvektor (also ein Eigenvektor) davon ist  $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 + \sqrt{14}i \end{pmatrix}$ .

Analog ist

$$\text{Eig}_{3-\sqrt{14}i}(M) = \text{kern} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{14}i & -5 \\ 3 & -1 - \sqrt{14}i \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 - \sqrt{14}i \end{pmatrix} \right\rangle.$$

**Beispiel 40.5.** Für eine obere Dreiecksmatrix

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom nach Lemma 11.8 gleich

$$\chi_M = (X - d_1)(X - d_2) \cdots (X - d_n).$$

In diesem Fall liegt das charakteristische Polynom direkt in der Zerlegung in lineare Faktoren vor, sodass unmittelbar seine Nullstellen und damit die Eigenwerte von  $M$  ablesbar sind, nämlich  $d_1, d_2, \dots, d_n$  (die nicht alle verschieden sein müssen).

## Vielfachheiten

Für eine genauere Untersuchung der Eigenräume ist die folgende Begrifflichkeit sinnvoll. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und  $\lambda \in K$ . Man nennt dann den Exponenten des linearen Polynoms  $X - \lambda$  im charakteristischen Polynom  $\chi_\varphi$  die *algebraische Vielfachheit* von  $\lambda$ , die wir mit  $\mu_\lambda := \mu_\lambda(\varphi)$  bezeichnen, und die Dimension des zugehörigen Eigenraumes, also

$$\dim(\text{Eig}_\lambda(\varphi))$$

die *geometrische Vielfachheit* von  $\lambda$ . Der vorstehende Satz besagt also, dass die eine Vielfachheit genau dann positiv ist, wenn dies für die andere gilt. Im Allgemeinen können die beiden Vielfachheiten aber verschieden sein, wobei eine Abschätzung immer gilt.

**Lemma 40.6.** *Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine lineare Abbildung und  $\lambda \in K$ . Dann besteht zwischen der geometrischen und der algebraischen Vielfachheit die Beziehung*

$$\dim(\text{Eig}_\lambda(\varphi)) \leq \mu_\lambda(\varphi).$$

*Beweis.* Sei  $m = \dim(\text{Eig}_\lambda(\varphi))$  und sei  $v_1, \dots, v_m$  eine Basis von diesem Eigenraum, die wir durch  $w_1, \dots, w_{n-m}$  zu einer Basis von  $V$  ergänzen. Bezüglich dieser Basis hat die beschreibende Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist daher  $(X - \lambda)^m \cdot \chi_C$ , sodass die algebraische Vielfachheit mindestens  $m$  ist.  $\square$

**Beispiel 40.7.** Wir betrachten  $2 \times 2$ -Scherungsmatrizen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit  $a \in K$ . Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_M = (X - 1)(X - 1),$$

sodass 1 der einzige Eigenwert von  $M$  ist. Den Eigenraum berechnet man als

$$\text{Eig}_1(M) = \text{kern} \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -as \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt, dass  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor ist, und dass bei  $a \neq 0$  der Eigenraum eindimensional ist (bei  $a = 0$  liegt die Identität vor und der Eigenraum ist zweidimensional). Bei  $a \neq 0$  ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 1 gleich 2, die geometrische Vielfachheit gleich 1.

## Diagonalisierbarkeit

Die Einschränkung einer linearen Abbildung auf einen Eigenraum ist die Streckung um den zugehörigen Eigenwert, also eine besonders einfache lineare Abbildung. Viele Eigenwerte mit hochdimensionalen Eigenräumen korrespondieren zu strukturell einfachen linearen Abbildungen. Ein Extremfall liegt bei den sogenannten diagonalisierbaren Abbildungen vor.

Bei einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom einfach gleich

$$(X - d_1)(X - d_2) \cdots (X - d_n).$$

Wenn die Zahl  $d$  in den Diagonalelementen  $k$ -mal vorkommt, so kommt auch der Linearfaktor  $X - d$  mit dem Exponenten  $k$  in der Faktorisierung des charakteristischen Polynoms vor. Dies gilt auch, wenn nur eine obere Dreiecksmatrix vorliegt. Anders aber als bei einer oberen Dreiecksmatrix kann man bei einer Diagonalmatrix sofort die Eigenräume angeben, siehe Beispiel 39.7, und zwar besteht der Eigenraum zu  $d$  aus allen Linearkombinationen der Standardvektoren  $e_i$ , für die  $d_i$  gleich  $d$  ist. Insbesondere ist die Dimension des Eigenraums gleich der Anzahl, wie oft  $d$  als Diagonalelement auftritt. Bei einer Diagonalmatrix stimmen also algebraische und geometrische Vielfachheiten überein.

**Definition 40.8.** Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt  $\varphi$  *diagonalisierbar*, wenn  $V$  eine Basis aus Eigenvektoren zu  $\varphi$  besitzt.

**Satz 40.9.** Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1)  $\varphi$  ist diagonalisierbar.
- (2) Es gibt eine Basis  $\mathfrak{v}$  von  $V$  derart, dass die beschreibende Matrix  $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)$  eine Diagonalmatrix ist.
- (3) Für jede beschreibende Matrix  $M = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{w}}(\varphi)$  bezüglich einer Basis  $\mathfrak{w}$  gibt es eine invertierbare Matrix  $B$  derart, dass

$$BMB^{-1}$$

eine Diagonalmatrix ist.

*Beweis.* Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt aus der Definition, aus Beispiel 39.7 und der Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen. Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt aus Korollar 10.5.  $\square$

**Korollar 40.10.** *Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine lineare Abbildung, die  $n = \dim(V)$  verschiedene Eigenwerte besitzt. Dann ist  $\varphi$  diagonalisierbar.*

*Beweis.* Aufgrund von Lemma 39.14 gibt es  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren. Diese bilden nach Korollar 8.9 eine Basis.  $\square$

**Beispiel 40.11.** Wir schließen an Beispiel 39.9 an. Es gibt die zwei Eigenvektoren  $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$  zu den verschiedenen Eigenwerten  $\sqrt{5}$  und  $-\sqrt{5}$ , so dass die Abbildung nach Korollar 40.10 diagonalisierbar ist. Bezüglich der Basis  $\mathbf{u}$  aus diesen Eigenvektoren wird die lineare Abbildung durch die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

beschrieben.

Die Übergangsmatrix von der Basis  $\mathbf{u}$  zur durch  $e_1$  und  $e_2$  gegebenen Standardbasis  $\mathbf{v}$  ist einfach

$$M_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix dazu ist

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Gemäß Korollar 10.5 besteht die Beziehung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

#### 40. ARBEITSBLATT

#### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 40.1.** Berechne das charakteristische Polynom zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 40.2.** Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

über  $\mathbb{C}$ .

**Aufgabe 40.3.** Es sei  $K$  ein Körper und sei  $M$  eine  $n \times n$ -Matrix über  $K$ . Zeige, dass für jedes  $\lambda \in K$  die Beziehung

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda E_n - M)$$

gilt.<sup>18</sup>

**Aufgabe 40.4.** Es sei  $K$  ein Körper und sei  $M$  eine  $n \times n$ -Matrix über  $K$ . Wie findet man die Determinante von  $M$  im charakteristischen Polynom  $\chi_M$  wieder?

**Aufgabe 40.5.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei  $\lambda \in K$  ein Eigenwert von  $\varphi$  und  $P \in K[X]$  ein Polynom. Zeige, dass  $P(\lambda)$  ein Eigenwert von<sup>19</sup>  $P(\varphi)$  ist.

**Aufgabe 40.6.\***

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 + i \\ 0 & i & 1 + i \\ 0 & 0 & -1 + 2i \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

- Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von  $A$ .
- Berechne zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.
- Stelle die Matrix für  $\varphi$  bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren auf.

<sup>18</sup>Die Hauptschwierigkeit bei dieser Aufgabe ist vermutlich zu erkennen, dass man hier wirklich was zeigen muss.

<sup>19</sup>Der Ausdruck  $P(\varphi)$  bedeutet, dass man die lineare Abbildung  $\varphi$  in das Polynom  $P$  einsetzt. Dabei muss man  $X^n$  als  $\varphi^n$ , also als die  $n$ -fache Hintereinanderschaltung von  $\varphi$  mit sich selbst, interpretieren, die Addition wird zur Addition von linearen Abbildungen, u.s.w.

**Aufgabe 40.7.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Berechne:

- (1) die Eigenwerte von  $A$ ;
- (2) die zugehörigen Eigenräume;
- (3) die geometrische und algebraische Vielfachheit der einzelnen Eigenwerte;
- (4) eine Matrix  $C \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  derart, dass  $C^{-1}AC$  eine Diagonalmatrix ist.

**Aufgabe 40.8.** Es sei  $K$  ein Körper,  $a \in K$  und  $m, n \in \mathbb{N}_+$  mit  $1 \leq m \leq n$ . Man gebe Beispiele für  $n \times n$ -Matrizen  $M$  derart, dass  $a$  ein Eigenwert zu  $M$  ist mit der algebraischen Vielfachheit  $n$  und der geometrischen Vielfachheit  $m$ .

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 40.9.** (2 Punkte)

Berechne das charakteristische Polynom zur Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 8 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 40.10.** (3 Punkte)

Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

über  $\mathbb{C}$ .

**Aufgabe 40.11.** (4 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Berechne:

- (1) die Eigenwerte von  $A$ ;
- (2) die zugehörigen Eigenräume;
- (3) die geometrische und algebraische Vielfachheit der einzelnen Eigenwerte;
- (4) eine Matrix  $C \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  derart, dass  $C^{-1}AC$  eine Diagonalmatrix ist.

**Aufgabe 40.12.** (4 Punkte)

Bestimme für jedes  $\lambda \in \mathbb{Q}$  die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 40.13.** (4 Punkte)

Zeige, dass das charakteristische Polynom der sogenannten *Begleitmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

gleich

$$\chi_M = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

ist.

**Aufgabe 40.14.** (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass  $\varphi$  mindestens einen Eigenvektor besitzt.



## 41. VORLESUNG - TRIGONALISIERBARKEIT

**Vielfachheiten und diagonalisierbare Abbildungen**

**Satz 41.1.** *Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine lineare Abbildung. Dann ist  $\varphi$  genau dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom  $\chi_\varphi$  in Linearfaktoren zerfällt und wenn für jede Nullstelle  $\lambda$  mit der algebraischen Vielfachheit  $\mu_\lambda$  die Gleichheit*

$$\mu_\lambda = \dim(\text{Eig}_\lambda(\varphi))$$

*gilt.*

*Beweis.* Wenn  $\varphi$  diagonalisierbar ist, so kann man sofort annehmen, dass  $\varphi$  bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird. Die Diagonaleinträge dieser Matrix sind die Eigenwerte, und diese wiederholen sich gemäß ihrer geometrischen Vielfachheit. Das charakteristische Polynom lässt sich auch direkt aus dieser Diagonalmatrix ablesen, jeder Diagonaleintrag  $\lambda$  trägt als Linearfaktor  $X - \lambda$  bei.

Für die Umkehrung seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die verschiedenen Eigenwerte und

$$\mu_i := \mu_{\lambda_i}(\varphi) = \dim(\text{Eig}_{\lambda_i}(\varphi))$$

seien die (geometrischen und algebraischen) Vielfachheiten. Da nach Voraussetzung das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, muss die Summe dieser Zahlen gleich  $n = \dim(V)$  sein. Es seien

$$v_{ij}, j = 1, \dots, \mu_i,$$

Basen der Eigenräume  $\text{Eig}_{\lambda_i}(\varphi)$  für  $i = 1, \dots, k$ . Dies sind insgesamt  $n$  Vektoren. Sei

$$\sum_{i,j} b_{ij} v_{ij} = 0$$

eine Darstellung der 0. Mit

$$w_i := \sum_{j=1}^{\mu_i} b_{ij} v_{ij} \in \text{Eig}_{\lambda_i}(\varphi)$$

ergibt sich  $\sum_{i=1}^k w_i = 0$ , wobei die  $w_i$  aus den verschiedenen Eigenräumen sind. Nach Lemma 39.14 sind diese Vektoren linear unabhängig, also müssen alle  $w_i = 0$  sein. Damit müssen auch alle  $b_{ij} = 0$  sein und die gewählten Basisvektoren der Eigenräume sind linear unabhängig. Daher bilden sie eine Basis.  $\square$

Das Produkt von zwei Diagonalmatrizen ist natürlich wieder eine Diagonalmatrix. Das folgende Beispiel zeigt, dass das Produkt von diagonalisierbaren Matrizen nicht diagonalisierbar sein muss.

**Beispiel 41.2.** Es seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei Geraden im  $\mathbb{R}^2$  durch den Nullpunkt und es seien  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  die Achsenspiegelungen an diesen Achsen. Eine Achsenspiegelung ist stets diagonalisierbar, und zwar sind die Spiegelungsachse und die dazu senkrechte Gerade Eigengeraden (zu den Eigenwerten 1 und  $-1$ ). Die Hintereinanderschaltung  $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1$  dieser Spiegelungen ist eine Drehung, und zwar ist der Drehwinkel das Doppelte des Winkels zwischen den beiden Achsen. Eine Drehung ist aber nur dann diagonalisierbar, wenn der Drehwinkel 0 oder 180 Grad beträgt. Wenn der Winkel zwischen den Achsen von 0, 90, 180 Grad verschieden ist, so besitzt  $\psi$  keinen Eigenvektor.

### Trigonalisierbare Abbildungen und jordansche Normalform

**Definition 41.3.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V$  heißt *trigonalisierbar*, wenn sie bezüglich einer geeigneten Basis durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben wird.

Diagonalisierbare lineare Abbildungen sind insbesondere trigonalisierbar. Die Umkehrung gilt nicht, wie Beispiel 40.7 zeigt.

**Satz 41.4.** *Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

*eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1)  $\varphi$  ist trigonalisierbar.
- (2) Das charakteristische Polynom  $\chi_\varphi$  zerfällt in Linearfaktoren.

*Wenn  $\varphi$  trigonalisierbar ist und bezüglich einer Basis durch die Matrix  $M$  beschrieben wird, so gibt es eine invertierbare Matrix  $B \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$  derart, dass  $BMB^{-1}$  eine obere Dreiecksmatrix ist.*

*Beweis.* Wir beweisen nur die Richtung von (1) nach (2). Das charakteristische Polynom von  $\varphi$  ist gleich dem charakteristischen Polynom  $\chi_M$ , wobei  $M$  eine beschreibende Matrix bezüglich einer beliebigen Basis ist. Wir können also annehmen, dass  $M$  eine obere Dreiecksmatrix ist. Dann ist nach Lemma 11.8 das charakteristische Polynom das Produkt der Linearfaktoren zu den Diagonaleinträgen. Die Rückrichtung ist deutlich aufwändiger.  $\square$

**Satz 41.5.** *Es sei  $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$  eine quadratische Matrix mit komplexen Einträgen. Dann ist  $M$  trigonalisierbar.*

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 41.4 und dem Fundamentalsatz der Algebra.  $\square$

**Beispiel 41.6.** Wir betrachten eine reelle  $2 \times 2$ -Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_M &= \det(xE_2 - M) \\ &= \det \begin{pmatrix} x - a & -b \\ -c & x - d \end{pmatrix} \\ &= (x - a)(x - d) - bc \\ &= x^2 - (a + d)x + ad - bc \\ &= \left(x - \frac{a + d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a + d}{2}\right)^2 + ad - bc \\ &= \left(x - \frac{a + d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - d}{2}\right)^2 - bc. \end{aligned}$$

Dieses Polynom zerfällt in (reelle) Linearfaktoren genau dann, wenn  $\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc \geq 0$  ist. Genau in diesem Fall ist die Matrix nach Satz 41.4 trigonalisierbar.

**Definition 41.7.** Es sei  $K$  ein Körper und  $\lambda \in K$ . Unter einer *Jordanmatrix* (zum Eigenwert)  $\lambda$  versteht man eine quadratische Matrix der Form<sup>20</sup>

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Wenn man eine solche Jordanmatrix als lineare Abbildung  $\varphi$  des Standardraumes  $K^n$  in sich interpretiert, so ist

$$\varphi(e_1) = \lambda e_1 \text{ und } \varphi(e_k) = \lambda e_k + e_{k-1} \text{ f\"ur alle } k \geq 2.$$

Insbesondere ist  $e_1$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ . Eine einfache Überlegung zeigt, dass es keine dazu linear unabhängigen Eigenvektoren geben kann (siehe Aufgabe 41.11). Die Eigenschaft rechts ist äquivalent zur Bedingung<sup>21</sup>

$$e_{k-1} = (\varphi - \lambda \cdot \text{Id})(e_k)$$

für  $k \geq 2$ . Als Eigenvektor ist  $e_1$  ein erzeugendes Element des Kerns der Abbildung  $\psi := \varphi - \lambda \text{Id}$ , und die anderen Standardvektoren  $e_k$  ergeben sich sukzessive als Urbild von  $e_{k-1}$  unter  $\psi$ . Diese Beobachtung liefert den Hintergrund für das weiter unten beschriebene Verfahren zum Aufstellen einer Jordanmatrix.

<sup>20</sup>Manche Autoren verstehen unter einer Jordanmatrix eine Matrix, in der die Einsen unterhalb der Diagonalen stehen.

<sup>21</sup>Im Kontext der trigonalisierbaren Abbildungen und zum Auffinden der jordanischen Normalform ist es sinnvoll, mit  $\varphi - \lambda \cdot \text{Id}$  anstatt mit  $\lambda \cdot \text{Id} - \varphi$  zu arbeiten.

**Definition 41.8.** Eine quadratische Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & J_{k-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & J_k \end{pmatrix},$$

wobei die  $J_i$  Jordanmatrizen sind, heißt Matrix in *jordanscher Normalform*.

Die dabei auftretenden Jordanmatrizen heißen Jordanblöcke der Matrix. Ihre Eigenwerte können verschieden oder gleich sein. In der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gibt es drei Jordanblöcke, nämlich

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } (2)$$

zu den Eigenwerten 2, 4 und nochmal 2.

**Definition 41.9.** Zwei quadratische Matrizen  $M, N \in \text{Mat}_n(K)$  heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix  $B$  gibt mit  $M = BNB^{-1}$ .

**Satz 41.10.** *Eine obere Dreiecksmatrix ist ähnlich zu einer Matrix in jordanischer Normalform.*

*Beweis.* Wir verzichten auf den recht aufwändigen Beweis. □

Diese Aussage kann man so interpretieren, dass es für eine trigonalisierbare lineare Abbildung  $\varphi$  eine Basis gibt derart, dass  $\varphi$  bezüglich dieser Basis durch eine Matrix in jordanischer Normalform beschrieben wird. Über den komplexen Zahlen kann man dies also stets erreichen.

**Verfahren 41.11.** Wir beschreiben, wie man zu einer linearen trigonalisierbaren Abbildung eine Basis findet, bezüglich der die beschreibende Matrix in jordanischer Normalform ist. Dazu bestimmt man zunächst eine Basis für die Eigenräume zu sämtlichen Eigenwerten. Man nimmt sich nun diese Eigenvektoren der Reihe nach vor, jeder dieser Vektoren führt zu einem Jordanblock. Sei  $u$  ein solcher Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ . Dann betrachtet man das lineare Gleichungssystem

$$u = (\varphi - \lambda \cdot \text{Id})v$$

(zumeist ist  $\varphi$  selbst durch eine Matrix gegeben, von der man das  $\lambda$ -fache der Einheitsmatrix abziehen muss). Wenn dieses keine Lösung besitzt, so ist  $u$  Teil der gesuchten Basis und der zugehörige Jordanblock besteht allein aus  $\lambda$ . Wenn es eine Lösung  $v$  gibt, so ist insbesondere  $\varphi(v) = \lambda v + u$ . Man betrachtet dann das lineare Gleichungssystem

$$v = (\varphi - \lambda \cdot \text{Id})w$$

und sucht nach einer Lösung für  $w$ , und so weiter, bis man bei einem Gleichungssystem angelangt ist, das keine Lösung besitzt. Dann sind die Vektoren  $u, v, w, \dots$  Teil der gesuchten Basis (die Anzahl dieser Vektoren ist die Länge des Jordanblocks), und man arbeitet den nächsten Eigenvektor ab.

**Beispiel 41.12.** Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und wollen sie auf jordanische Normalform bringen. Es ist  $u = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ein

Eigenvektor zum Eigenwert 2. Es ist

$$A := M - 2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass es keinen weiteren linear unabhängigen Eigenvektor gibt. Wir interessieren uns für das lineare Gleichungssystem

$$e_1 = Av.$$

Daraus ergibt sich sofort (aus der zweiten Zeile)  $v_3 = 0$  und somit  $2v_2 = 1$  ( $v_1$  können wir frei als 0 wählen). Also setzen wir  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ . Schließlich brauchen

wir eine Lösung für

$$v = Aw.$$

Dies führt auf

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Für die durch die Matrix  $M$  beschriebene lineare Abbildung gilt somit

$$Mu = 2u, \quad Mv = 2v + u, \quad Mw = 2w + v,$$

sodass die Abbildung bezüglich dieser Basis durch

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Diese Matrix ist eine Jordanmatrix und insbesondere in jordanischer Normalform.

**Beispiel 41.13.** Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und wollen sie auf jordanische Normalform bringen. Es sind  $u = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

und  $v = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert 2. Es ist

$$A := M - 2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass  $u$  und  $v$  den Eigenraum aufspannen. Das lineare Gleichungssystem

$$e_1 = Aw$$

besitzt keine Lösung. Hingegen besitzt das lineare Gleichungssystem

$$e_2 = Aw$$

die Lösung  $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ .

Für die durch die Matrix  $M$  beschriebene lineare Abbildung gilt somit

$$Mu = 2u, Mv = 2v, Mw = 2w + v,$$

sodass die Abbildung bezüglich dieser Basis durch

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Diese Matrix ist in jordanischer Normalform mit den Jordanblöcken  $(2)$  und  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

## 41. ARBEITSBLATT

**Aufwärmataufgaben**

**Aufgabe 41.1.** Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist oder nicht.

**Aufgabe 41.2.** Eine lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Finde eine Basis, bezüglich der  $\varphi$  durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

**Aufgabe 41.3.** Eine lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Finde eine Basis, bezüglich der  $\varphi$  durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Die nächsten Aufgaben verwenden die folgende Definition.

Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Untervektorraum  $U \subseteq V$   *$\varphi$ -invariant*, wenn

$$\varphi(U) \subseteq U$$

gilt.

**Aufgabe 41.4.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige folgende Eigenschaften.

- (1) Der Nullraum  $0 \subseteq V$  ist  $\varphi$ -invariant.
- (2)  $V$  ist  $\varphi$ -invariant.
- (3) Eigenräume sind  $\varphi$ -invariant.
- (4) Seien  $U_1, U_2 \subseteq V$   $\varphi$ -invariante Unterräume. Dann sind auch  $U_1 \cap U_2$  und  $U_1 + U_2$   $\varphi$ -invariant.
- (5) Sei  $U \subseteq V$  ein  $\varphi$ -invarianter Unterraum. Dann sind auch der Bildraum  $\varphi(U)$  und der Urbildraum  $\varphi^{-1}(U)$   $\varphi$ -invariant.

**Aufgabe 41.5.** Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und  $v \in V$ . Zeige, dass der kleinste  $\varphi$ -invariante Unterraum von  $V$ , der  $v$  enthält, gleich

$$\langle \varphi^n(v), n \in \mathbb{N} \rangle$$

ist.

**Aufgabe 41.6.** Es sei  $K$  ein Körper und es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Es sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die durch

$$U = \{v \in V \mid \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \varphi^n(v) = 0\}$$

definierte Teilmenge von  $V$  ein  $\varphi$ -invarianter Unterraum ist.



**Aufgabe 41.7.** Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ , bezüglich der die Matrix zur linearen Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine obere Dreiecksmatrix sei. Zeige, dass die erzeugten Untervektorräume

$$\langle v_1, \dots, v_i \rangle$$

$\varphi$ -invariant für jedes  $i$  sind.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 41.8.** (4 Punkte)

Entscheide, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 8 \\ 6 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

über  $\mathbb{R}$  trigonalisierbar ist.

**Aufgabe 41.9.** (3 Punkte)

Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist oder nicht.

**Aufgabe 41.10.** (4 Punkte)

Eine lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Finde eine Basis, bezüglich der  $\varphi$  durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

**Aufgabe 41.11.** (4 Punkte)

Es sei  $M$  eine Jordanmatrix zum Eigenwert  $\lambda$ . Zeige, dass der Eigenraum von  $M$  zum Eigenwert  $\lambda$  eindimensional ist und dass es keine weiteren Eigenvektoren gibt.

**Aufgabe 41.12.** (5 Punkte)

Es sei  $M$  eine reelle  $2 \times 2$ -Matrix, die über  $\mathbb{R}$  nicht trigonalisierbar ist. Zeige, dass  $M$  über  $\mathbb{C}$  diagonalisierbar ist.

Eine Isometrie auf einem euklidischen Vektorraum heißt *eigentlich*, wenn ihre Determinante gleich 1 ist.

**Aufgabe 41.13.** (5 Punkte)

Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine eigentliche Isometrie. Es sei vorausgesetzt, dass  $f$  trigonalisierbar ist. Zeige, dass dann  $f$  sogar diagonalisierbar ist.

## 42. VORLESUNG - LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEME I

**Lineare Transformationen**

Entkoppelte Differentialgleichungssysteme kann man lösen, indem man die einzelnen eindimensionalen Komponenten löst. Manchmal kann eine Differentialgleichung erst durch eine lineare Transformation entkoppelt werden. Eine lineare Transformation ist einfach eine bijektive lineare Abbildung  $\varphi$  zwischen zwei Vektorräumen  $V$  und  $W$ . Zu einem Vektorfeld  $F$  auf  $V$  möchte man ein Vektorfeld  $G$  auf  $W$  definieren derart, dass sich die Lösungen der zugehörigen Differentialgleichungssysteme entsprechen. Dies geschieht durch

$$G(t, y) = \varphi(F(t, \varphi^{-1}(x))).$$

Zu einem Punkt  $y \in W$  betrachtet man also den Urbildpunkt  $\varphi^{-1}(y)$ , wertet dort (bei unverändertem Zeitpunkt  $t$ ) das Vektorfeld  $F$  aus und transportiert das Ergebnis mittels  $\varphi$  wieder nach  $W$ . Besonders übersichtlich wird die Situation durch das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} I \times V & \xrightarrow{F} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ I \times W & \xrightarrow{G} & W \end{array} .$$

**Lemma 42.1.** *Es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

*ein Isomorphismus zwischen den endlichdimensionalen reellen Vektorräumen  $V$  und  $W$  und sei*

$$F: I \times V \longrightarrow V, (t, x) \longmapsto F(t, x),$$

*ein Vektorfeld auf  $V$ . Es sei  $G$  das durch*

$$G(t, y) := \varphi(F(t, \varphi^{-1}(y)))$$

*definierte Vektorfeld auf  $W$ . Dann ist*

$$\alpha: J \longrightarrow V$$

*eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$x' = F(t, x) \text{ mit } x(t_0) = x_0$$

*genau dann, wenn  $\varphi \circ \alpha$  eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = G(t, y) \text{ mit } y(t_0) = \varphi(x_0)$$

*ist.*

*Beweis.* Da mit  $\varphi$  auch die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  eine lineare Isomorphie ist, genügt es, die eine Richtung zu zeigen. Sei also  $\alpha$  eine Lösung des Anfangswertproblems zu  $F$ . Dann gelten unter Verwendung von Lemma 34.10 für  $\varphi \circ \alpha$  die Gleichheiten

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \alpha)'(t) &= \varphi(\alpha'(t)) \\ &= \varphi(F(t, \alpha(t))) \\ &= (\varphi \circ F)(t, \alpha(t)) \\ &= (\varphi \circ F \circ (\text{Id} \times \varphi^{-1}))(t, (\varphi \circ \alpha)(t)) \\ &= G(t, (\varphi \circ \alpha)(t)). \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$(\varphi \circ \alpha)(t_0) = \varphi(\alpha(t_0)) = \varphi(x_0).$$

□

Wenn das Vektorfeld  $F$  nur auf einer offenen Menge  $U \subseteq I \times V$  definiert ist, so ist entsprechend das Vektorfeld  $G$  auf (der ebenfalls offenen Menge)  $(\text{Id} \times \varphi)(U) \subseteq I \times W$  definiert. Das Lemma gilt auch in dieser Situation.

**Beispiel 42.2.** Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung zum Vektorfeld

$$F(t, x, y) = (tx + t^3, y^2).$$

Dieses System ist entkoppelt und besteht aus den beiden einzelnen Gleichungen (in jeweils einer Raumvariablen)

$$x' = tx + t^3 \text{ und } y' = y^2.$$

Eine Lösung der linken Differentialgleichung ist  $x(t) = -t^2 - 2$ , eine Lösung der rechten ist  $y(t) = -t^{-1}$ . Daher ist

$$\begin{pmatrix} -t^2 - 2 \\ -t^{-1} \end{pmatrix}$$

eine Lösung zu  $F$ . Wir betrachten nun die lineare Transformation

$$\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

mit der inversen Matrix

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Das transformierte Vektorfeld ist

$$\begin{aligned} & G(t, u, v) \\ &= \varphi(F(t, \varphi^{-1}(u, v))) \\ &= \varphi(F(t, -2u - 3v, 3u + 4v)) \\ &= \varphi(t(-2u - 3v) + t^3, (3u + 4v)^2) \\ &= \varphi(t(-2u - 3v) + t^3, 9u^2 + 24uv + 16v^2) \\ &= (4(t(-2u - 3v) + t^3) + 3(9u^2 + 24uv + 16v^2), \\ &\quad -3(t(-2u - 3v) + t^3) - 2(9u^2 + 24uv + 16v^2)) \\ &= (-8tu - 12tv + 4t^3 + 27u^2 + 72uv + 48v^2, \\ &\quad 6tu + 9tv - 3t^3 - 18u^2 - 48uv + 32v^2). \end{aligned}$$

Für die zu  $G$  gehörende Differentialgleichung  $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = G(t, u, v)$  ist gemäß Lemma 42.2

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} -t^2 - 2 \\ -t^{-1} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4t^2 - 8 - 3t^{-1} \\ 3t^2 + 6 + 2t^{-1} \end{pmatrix}$$

eine Lösung.

## Lineare Differentialgleichungssysteme

**Definition 42.3.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes reelles Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix ist, deren Einträge allesamt Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto a_{ij}(t),$$

sind, heißt *homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung* oder *homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem*.

Es handelt sich also um die Differentialgleichung zum Vektorfeld

$$f: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, v) \longmapsto f(t, v) = (M(t))v = \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \dots + a_{1n}(t)v_n \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \dots + a_{nn}(t)v_n \end{pmatrix}.$$

Dieses Vektorfeld ist zu jedem fixierten Zeitpunkt  $t \in I$  eine lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, v \longmapsto M(t)v.$$

Ausgeschrieben liegt das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \dots + a_{1n}(t)v_n \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \dots + a_{nn}(t)v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

vor.

Für lineare Differentialgleichungssysteme gibt es wieder eine inhomogene Variante.

**Definition 42.4.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes reelles Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv + z,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix ist, deren Einträge allesamt Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto a_{ij}(t),$$

sind und wobei

$$z: I \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix},$$

eine Abbildung ist, heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung* oder *inhomogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem*. Die Abbildung  $z$  heißt dabei *Störabbildung*.

Insgesamt liegt das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \dots + a_{1n}(t)v_n + z_1(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \dots + a_{nn}(t)v_n + z_n(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$$

vor.

Die explizite Lösbarkeit eines solchen Systems hängt natürlich von der Kompliziertheit der beteiligten Funktionen  $a_{ij}$  und  $z_i$  ab. In der folgenden Situation kann man das System auf einzelne lineare Differentialgleichungen zurückführen und dadurch sukzessive lösen.

**Lemma 42.5.** *Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und es liege eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung der Form*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

mit stetigen Funktionen  $a_{ij}: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $z_i: I \rightarrow \mathbb{R}$  und den Anfangsbedingungen

$$v_i(t_0) = w_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ (} t_0 \in I \text{)}$$

vor. Dann lässt sich diese Gleichung lösen, indem man sukzessive unter Verwendung der zuvor gefundenen Lösungen die inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen in einer Variablen, nämlich

$$v_n' = a_{nn}(t)v_n + z_n(t) \text{ mit } v_n(t_0) = w_n,$$

$$v_{n-1}' = a_{n-1, n-1}(t)v_{n-1} + a_{n-1, n}(t)v_n(t) + z_{n-1}(t) \text{ mit } v_{n-1}(t_0) = w_{n-1},$$

$$v_{n-2}' = a_{n-2, n-2}(t)v_{n-2} + a_{n-2, n-1}(t)v_{n-1}(t) + a_{n-2, n}(t)v_n(t) + z_{n-2}(t) \text{ mit } v_{n-2}(t_0) = w_{n-2},$$

⋮

$$v_1' = a_{11}(t)v_1 + a_{12}(t)v_2(t) + \dots + a_{1n}(t)v_n(t) + z_1(t) \text{ mit } v_1(t_0) = w_1,$$

löst.

*Beweis.* Das ist trivial. □

Die Lösungen eines solchen linearen Differentialgleichungssystems in oberer Dreiecksgestalt stehen also in Bijektion zu den Lösungen der  $n$  linearen inhomogenen Differentialgleichungen in einer Ortsvariablen, wobei die Störfunktionen jeweils mit den anderen Lösungen in der beschriebenen Weise zusammenhängen. Insbesondere übertragen sich Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen.

Auch wenn man ein homogenes System lösen möchte, so muss man in den Einzelschritten inhomogene Differentialgleichungen lösen.

**Beispiel 42.6.** Wir betrachten das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & t-1 \\ 0 & \frac{2t}{t^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für  $t > 0$ . Die zweite Zeile dieses Systems bedeutet

$$y' = \frac{2t}{t^2+1} \cdot y,$$

das ist eine homogene lineare Differentialgleichung in einer Variablen. Ihre Lösungen sind gemäß Satz 29.2 gleich

$$y(t) = c(t^2 + 1) = ct^2 + c$$

mit einem  $c \in \mathbb{R}$ . Die erste Zeile des Systems führt daher auf

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{t}x + (t-1)y \\ &= \frac{1}{t}x + c(t-1)(t^2+1) \\ &= \frac{1}{t}x + c(t^3 - t^2 + t - 1). \end{aligned}$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung in einer Variablen. Die zugehörige homogene Gleichung  $x' = \frac{1}{t}x$  besitzt  $t$  als eine Lösung. Nach Satz 29.10 müssen wir eine Stammfunktion von

$$c \frac{t^3 - t^2 + t - 1}{t} = c \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{t} \right)$$

finden, eine solche ist

$$c \left( \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t + \ln |t| \right) + d.$$

Daher ist

$$t \left( c \left( \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln |t| \right) + d \right) = \frac{c}{3}t^4 - \frac{c}{2}t^3 + ct^2 - ct \ln |t| + dt$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung. Also ist die allgemeine Lösung des Systems gleich

$$\begin{pmatrix} \frac{c}{3}t^4 - \frac{c}{2}t^3 + ct^2 - ct \ln |t| + dt \\ ct^2 + c \end{pmatrix}.$$

### Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Falls die Funktionen  $a_{ij}$  alle konstant sind, so spricht man von einem *linearen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*, welche im Wesentlichen mit Mitteln der linearen Algebra gelöst werden können. Dazu ist es sinnvoll, von vornherein auch komplexe Koeffizienten zuzulassen.

**Definition 42.7.** Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit Einträgen  $a_{ij} \in \mathbb{C}$  ist, heißt *homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* oder *homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*.

**Definition 42.8.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv + z,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit Einträgen  $a_{ij} \in \mathbb{C}$  ist und

$$z: I \rightarrow \mathbb{C}^n$$

eine Abbildung, heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* oder *inhomogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*.

Die Störfunktion muss also nicht konstant sein.

**Bemerkung 42.9.** Es sei

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y + h(t) = 0$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten, d.h. die  $a_i$  sind reelle (oder komplexe) Zahlen. Das gemäß Lemma 38.4 zugehörige Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ g(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \end{pmatrix}$$

mit

$$v_i := y^{(i)}$$



wird in dieser Situation zum linearen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -h(t) \end{pmatrix}.$$

## 42. ARBEITSBLATT

### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 42.1.** Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin t \\ t^5 \end{pmatrix}$$

für  $t > 0$ .

**Aufgabe 42.2.** Berechne zum Vektorfeld

$$F: (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto F(t, x, y) = \begin{pmatrix} x \sin t - \sin t \\ \frac{y}{t} + t^5 \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 42.1 das transformierte Vektorfeld zur durch die Matrix  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$  gegebenen linearen Abbildung  $\varphi$ . Bestimme die Lösungen zu diesem transformierten Vektorfeld.

**Aufgabe 42.3.** Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 42.4.** Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 42.5.** Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 42.6.** Bestimme alle Lösungen (für  $t > 0$ ) des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & t^3 - t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 42.7.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall und seien

$$f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbare Funktionen mit

$$f_{11}(t)f_{22}(t) - f_{21}(t)f_{12}(t) \neq 0$$

für alle  $t \in I$ . Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{f'_{11}f_{22} - f_{12}f'_{21}}{f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}} & \frac{-f'_{11}f_{12} + f'_{12}f_{11}}{f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}} \\ \frac{f'_{21}f_{22} - f'_{22}f_{21}}{f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}} & \frac{-f_{12}f'_{21} + f'_{22}f_{11}}{f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass sowohl  $\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{pmatrix}$  als auch  $\begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix}$  Lösungen des Differentialgleichungssystems sind.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 42.8.** (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & t^2 - t + 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 42.9.** (4 Punkte)

Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & -t^2 - 3t + 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 42.10.** (8 (2+6) Punkte)

Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- a) Erstelle eine Differentialgleichung in einer Variablen, die die Funktion  $z(t) = x^2(t) + y^2(t)$  zu einer Lösung  $(x, y)$  erfüllen muss.  
 b) Finde eine nichttriviale Lösung des Differentialgleichungssystems.

**Aufgabe 42.11.** (4 Punkte)

Finde eine nichttriviale Lösung (für  $t > 1$ ) zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{4t^4-1}{t^5-t} & \frac{-3t}{t^4-1} \\ \frac{-t}{t^4-1} & \frac{3t^4-2}{t^5-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit Hilfe von Aufgabe 42.7.

**Aufgabe 42.12.** (4 Punkte)

Löse mit einem Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^2 - 1 & t^3 + t + 2 \\ t + 3 & t^2 + t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bis zur fünften Ordnung.

Die für  $t \in \mathbb{R}$ ,  $-1 < t < 1$ , und ein  $n \in \mathbb{N}$  definierte lineare Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2t}{1-t^2}y' + \frac{n(n+1)}{1-t^2}y = 0$$

heißt *Legendresche Differentialgleichung* zum Parameter  $n$ .

**Aufgabe 42.13.** (5 Punkte)

Zeige, dass das  $n$ -te *Legendre-Polynom*<sup>22</sup>

$$\frac{1}{2^n(n!)}((t^2 - 1)^n)^{(n)}$$

eine Lösung der Legendreschen Differentialgleichung zum Parameter  $n$  ist.

<sup>22</sup>Hier bedeutet das hochgestellte  $(n)$  die  $n$ -te Ableitung.

### Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten - Lösungsverfahren

Es sei eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten gegeben, d.h.

$$v' = Mv$$

mit einer konstanten Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } a_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Wir lassen hier also auch den Fall zu, dass die Einträge komplexe Zahlen sind. Beim Auffinden der Lösungen zu einer reellen Matrix ist es nämlich hilfreich, die reellen Zahlen als komplexe Zahlen aufzufassen, um dort Umformungen durchzuführen, die im Reellen nicht möglich sind. Die Lösungen werden aber nach wie vor auf reellen Intervallen definiert sein. Wir erwähnen einige Rechenregeln für differenzierbare Abbildungen

$$f: I \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$

( $I$  ist ein reelles Intervall oder eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ ) die bei der Berechnung von Differentialgleichungen zum Zuge kommen. Zunächst lässt sich die reelle Exponentialfunktion  $e^x$  (unter Verwendung der Exponentialreihe) zu einer Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto e^z,$$

ausdehnen. Diese ist komplex-differenzierbar, und zwar ist die Ableitung wieder die Exponentialfunktion selbst. Für eine komplexe Zahl  $u$  gilt  $(e^{uz})' = ue^{uz}$ . Zwischen der komplexen Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen besteht der Zusammenhang (die *Eulersche Formel*)

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

(wobei  $t$  reell oder komplex sein kann).

Ausgeschrieben liegt also das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + \dots + a_{nn}v_n \end{pmatrix}$$

vor. Solche Systeme lassen sich mit Hilfe der linearen Algebra auf eine Folge von inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen in einer Variablen zurückführen und damit sukzessive lösen. Das folgende einfache Lemma gibt bereits einen deutlichen Hinweis darauf, dass lineare Eigenschaften

der Matrix  $M$  eng mit den Lösungen des Differentialgleichungssystems zusammenhängen.

**Lemma 43.1.** *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und es sei  $u \in \mathbb{K}^n$  ein Eigenvektor zu  $M$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n, t \longmapsto ce^{\lambda t}u = c \begin{pmatrix} e^{\lambda t}u_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda t}u_n \end{pmatrix},$$

( $c \in \mathbb{K}$ ) eine Lösung dieses Differentialgleichungssystems.

*Beweis.* Dies folgt direkt wegen

$$\begin{aligned} v'(t) &= \begin{pmatrix} (ce^{\lambda t}u_1)' \\ \vdots \\ (ce^{\lambda t}u_n)' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ce^{\lambda t}u_1)' \\ \vdots \\ (ce^{\lambda t}u_n)' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda ce^{\lambda t}u_1 \\ \vdots \\ \lambda ce^{\lambda t}u_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda ce^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\ &= M \left( ce^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right) \\ &= M \begin{pmatrix} ce^{\lambda t}u_1 \\ \vdots \\ ce^{\lambda t}u_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

**Definition 43.2.** Es sei

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Dann nennt man das charakteristische Polynom

$$\chi_M = \det (tE_n - M)$$

auch das *charakteristische Polynom* der Differentialgleichung.

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind nach Satz 40.2 Eigenwerte von  $M$  und liefern nach Lemma 43.1 Lösungen des Differentialgleichungssystems.

**Bemerkung 43.3.** Es sei

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten und es sei

$$v' = Mv$$

das zugehörige System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, also mit der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Das zu dieser Matrix gehörige charakteristische Polynom ist nach Aufgabe 40.13 gleich

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0.$$

D.h. man kann dieses Polynom direkt aus der eingangs gegebenen Differentialgleichung höherer Ordnung ablesen.

**Beispiel 43.4.** Zu einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

ist das charakteristische Polynom gleich

$$t^2 + a_1t + a_0.$$

Dessen Nullstellen sind einfach zu bestimmen, es ist

$$t_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}.$$

Nun untersuchen wir systematisch, wie man Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten löst.

**Lemma 43.5.** *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, es sei  $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$  eine invertierbare Matrix und es sei

$$N = BMB^{-1}.$$

Dann ist

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n, t \longmapsto v(t),$$

genau dann eine Lösung von  $v' = Mv$ , wenn  $w = Bv$  eine Lösung der Differentialgleichung  $w' = Nw$  ist.

*Beweis.* Dies folgt aus Lemma 42.2, wir geben noch einen zweiten Beweis. Es sei vorausgesetzt, dass  $v' = Mv$  ist. Dann gelten für  $w = Bv$  mit  $B = (b_{ij})_{ij}$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} w'(t) &= \begin{pmatrix} w'_1(t) \\ \vdots \\ w'_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (b_{11}v_1(t) + \dots + b_{1n}v_n(t))' \\ \vdots \\ (b_{n1}v_1(t) + \dots + b_{nn}v_n(t))' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11}v'_1(t) + \dots + b_{1n}v'_n(t) \\ \vdots \\ b_{n1}v'_1(t) + \dots + b_{nn}v'_n(t) \end{pmatrix} \\ &= B \begin{pmatrix} v'_1(t) \\ \vdots \\ v'_n(t) \end{pmatrix} \\ &= BM \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix} \\ &= BMB^{-1} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so dass  $w$  die Differentialgleichung  $w' = Nw$  löst. Die inverse Transformation zeigt, dass zu einer Lösung von  $w' = Nw$  die Abbildung  $B^{-1}w$  eine Lösung für  $v' = Mv$  ist.  $\square$

**Satz 43.6.** *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$$

ein homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Dann gibt es eine invertierbare Matrix  $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$  derart, dass das äquivalente Differentialgleichungssystem

$$w' = Nw \text{ mit } N = BMB^{-1}$$

obere Dreiecksgestalt besitzt, also von der Form

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \\ \vdots \\ w_{n-1}' \\ w_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}$$

(mit  $c_{ij} \in \mathbb{C}$ ) ist. Dieses System lässt sich sukzessive von unten nach oben mit dem Lösungsverfahren für inhomogene lineare Differentialgleichungen in einer Variablen lösen. Wenn zusätzlich Anfangsbedingungen  $v_i(t_0) = a_i$  für  $i = 1, \dots, n$  gegeben sind, so ist die Lösung eindeutig.

*Beweis.* Aufgrund von Satz 41.5 ist die Matrix  $M$  trigonalisierbar, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix  $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$  derart, dass

$$N = BMB^{-1}$$

obere Dreiecksgestalt besitzt. Das lineare Differentialgleichungssystem  $w' = Nw$  besitzt also die angegebene Gestalt, und es ist wegen Lemma 43.5 äquivalent zum ursprünglichen System. Die letzte Zeile des neuen Systems, also

$$w_n' = c_{nn}w_n,$$

ist eine lineare Differentialgleichung in einer Variablen, ihre Lösungen sind  $w_n(t) = ae^{c_{nn}t}$ . Die zweitletzte Zeile ist

$$w_{n-1}' = c_{n-1, n-1}w_{n-1} + c_{n-1, n}w_n,$$

worin man die Lösung für  $w_n$  einsetzen kann. Dann erhält man eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung in der einen Variablen  $w_{n-1}$ , die man mit dem angegebenen Lösungsverfahren lösen kann. Für die drittletzte Zeile sind dann  $w_{n-1}$  und  $w_n$  schon bekannt und dies führt wieder zu einer inhomogenen linearen Differentialgleichung für  $w_{n-2}$ . So erhält man sukzessive eine Gesamtlösung  $(w_1, \dots, w_n)$ . Eine Anfangsbedingung für  $v' = Mv$  übersetzt sich direkt in eine Anfangsbedingung für  $w' = Nw$ . In dem soeben beschriebenen Lösungsverfahren gibt es dann jeweils eine Anfangsbedingung für die inhomogenen Differentialgleichungen, so dass die Lösungen jeweils eindeutig sind.  $\square$

**Bemerkung 43.7.** Es sei

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$$



eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und es sei

$$z: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

eine komplexwertige Lösung dieser Differentialgleichung. Wir schreiben  $z(t) = u(t) + iv(t)$ , wobei  $u, v$  differenzierbare Kurven im  $\mathbb{R}^n$  sind, und die Real- bzw. Imaginärteil der Funktion heißen. Es sei

$$\bar{z}(t) = u(t) - iv(t)$$

die konjugiert-komplexe Funktion zu  $z$ . Dann ist wegen

$$M\overline{z(t)} = \overline{Mz(t)} = \overline{z'(t)} = \bar{z}'(t)$$

auch  $\bar{z}$  eine Lösungsfunktion. Wegen

$$u(t) = \frac{z(t) + \bar{z}(t)}{2} \quad \text{und} \quad v(t) = \frac{z(t) - \bar{z}(t)}{2i}$$

sind auch Real- und Imaginärteil von  $z$  Lösungsfunktionen.

**Satz 43.8.** *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten mit der Anfangsbedingung  $v(t_0) = u \in \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Dann gibt es genau eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Lösung

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

für dieses Anfangswertproblem.

*Beweis.* Aufgrund von Satz 43.6 gibt es eine eindeutige komplexwertige Lösung

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

für dieses Differentialgleichungssystem. Da eine reellwertige Lösung insbesondere eine komplexwertige Lösung ist, liegt Eindeutigkeit vor. Der Realteil der komplexen Lösung, also

$$\text{Re}(v): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto \text{Re}(v(t)),$$

ist ebenfalls eine Lösung dieses Systems. Wegen der Eindeutigkeit muss  $v = \text{Re}(v)$  sein.  $\square$

**Korollar 43.9.** *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

ein homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Dann ist die Menge der Lösungen

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

*Beweis.* Dass der Lösungsraum ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist kann man direkt nachrechnen. Aufgrund von Satz 43.6 bzw. Satz 43.7 gibt es zu jedem Vektor

$$w \in \mathbb{K}^n$$

genau eine Lösung

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

mit  $\varphi(0) = w$ . Die Zuordnung, die einen Anfangswert  $w$  auf die Lösung zu diesem Anfangswertproblem abbildet, ist linear, sodass eine lineare Isomorphie zwischen  $\mathbb{K}^n$  und dem Lösungsraum vorliegt.  $\square$

**Definition 43.10.** Es sei

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

ein homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Dann heißt eine Basis des Lösungsraumes ein *Fundamentalsystem von Lösungen* dieses Systems.

**Korollar 43.11.** *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

*eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die Matrix  $M$  sei diagonalisierbar mit den linear unabhängigen Eigenvektoren  $u_1, \dots, u_n$ . Dann ist der Lösungsraum der Differentialgleichung gleich*

$$\{c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot u_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \cdot u_n \mid c_i \in \mathbb{K}\},$$

wobei  $\lambda_i$  der Eigenwert zu  $u_i$  ist.

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Lemma 43.1 und aus Korollar 43.9.  $\square$

**Beispiel 43.12.** Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Für  $v_2(t) = 0$  ergibt sich aus der ersten Zeile (bis auf skalare Vielfache) sofort  $v_1 = e^{\lambda t}$ , was insgesamt der Lösung (der ersten Fundamentallösung)

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

zum Eigenvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  gemäß Lemma 43.1 entspricht.

Sei nun  $v_2 \neq 0$ . Dann führt die zweite Zeile zu  $v_2 = e^{\mu t}$ , was wir Satz 43.6 entsprechend zu einer Gesamtlösung fortsetzen. Die erste Zeile lautet somit

$$v_1' = \lambda v_1 + \gamma e^{\mu t}.$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist  $c \cdot e^{\lambda t}$ , sodass sich mit der Variation der Konstanten der Ansatz  $v_1(t) = c(t) \cdot e^{\lambda t}$  mit

$$c'(t) = \gamma \cdot e^{\mu t} \cdot e^{-\lambda t} = \gamma \cdot e^{(\mu-\lambda)t}$$

ergibt.

Bei  $\mu = \lambda$  ergibt sich  $c(t) = \gamma t$  und damit die zweite Fundamentallösung

$$v(t) = \begin{pmatrix} \gamma t e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Bei  $\gamma \neq 0$  gehört diese zweite Lösung nicht zu einem Eigenvektor.

Bei  $\mu \neq \lambda$  ergibt sich  $c(t) = \frac{\gamma}{\mu-\lambda} e^{(\mu-\lambda)t}$  und damit die zweite Fundamentallösung

$$v(t) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\mu-\lambda} e^{\mu t} \\ e^{\mu t} \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\mu-\lambda} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist wieder eine Lösung, die zu einem Eigenvektor gehört.

**Beispiel 43.13.** Wir betrachten die Bewegung eines Punktes auf der Geraden, wobei die Lage des Punktes proportional zur auf ihn wirkenden Kraft (bzw. Beschleunigung) in Richtung des Nullpunkts sein soll. Wenn der Punkt sich in  $\mathbb{R}_+$  befindet und sich in die positive Richtung bewegt, so wirkt diese Kraft bremsend, wenn er sich in die negative Richtung bewegt, so wirkt die Kraft beschleunigend. Mit der Proportionalitätskonstante 1 gelangt man zur linearen Differentialgleichung (zweiter Ordnung)

$$y'' = -y,$$

die diesen Bewegungsvorgang beschreibt. Als Anfangsbedingung wählen wir  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = v$ , zum Zeitpunkt 0 soll die Bewegung also durch den Nullpunkt gehen und dort die Geschwindigkeit  $v$  besitzen. Man kann sofort die Lösung

$$y(t) = v \cdot \sin t$$

angeben. Wir werden diese Lösung mit den Lösungsmethoden für lineare Differentialgleichungen herleiten. Die Differentialgleichung führt zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$y^2 + 1 = (y - i)(y + i),$$

und Eigenvektoren sind  $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  (zum Eigenwert  $i$ ) und  $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  (zum Eigenwert  $-i$ ). Die allgemeine komplexe Lösung ist also nach Korollar 43.10 gleich

$$y_0(t) = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

wobei letztlich nur die erste Zeile interessiert. Die Anfangsbedingung führt zu

$$c_1 + c_2 = 0 \text{ und } c_1 i - c_2 i = v.$$

Also ist  $c_2 = -c_1$  und  $c_1 = \frac{v}{2i}$ . Daher ist die Lösung

$$\frac{v}{2i} e^{it} - \frac{v}{2i} e^{-it} = v \cdot \sin t$$

nach Satz 18.11.

Mit den linearen Methoden kann man auch die folgende Aussage beweisen.

**Satz 43.14.** *Es sei*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

*eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten und das charakteristische Polynom zerfalle in Linearfaktoren,*

$$\begin{aligned} P &= X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \\ &= (X - \lambda_1)^{\nu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\nu_k}, \end{aligned}$$

*wobei die  $\lambda_i$  verschieden seien. Dann bilden die Funktionen*

$$t^j e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 0, \dots, \nu_i - 1,$$

*ein Fundamentalsystem für diese Differentialgleichung.*

## 43. ARBEITSBLATT

### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 43.1.** Sei  $M$  eine quadratische  $n \times n$ -Matrix über  $\mathbb{K}$ . Es sei  $\varphi_1$  eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_1(t)$$

und  $\varphi_2$  eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_2(t).$$

Zeige, dass  $\varphi_1 + \varphi_2$  eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_1(t) + z_2(t)$$

ist.

**Aufgabe 43.2.** Sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, sei  $L$  der Lösungsraum dieses Systems und sei  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Zeige, dass die Abbildung

$$L \longrightarrow \mathbb{K}^n, \varphi \longmapsto \varphi(t_0),$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

**Aufgabe 43.3.** Wie transformieren sich in Lemma 43.5 die Anfangsbedingungen?

**Aufgabe 43.4.** Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 43.5.** Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 43.6.\***

a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung  $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 43.7.\***

a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung  $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 43.8.\***

Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 43.9.** Es sei  $M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$  eine (variable)  $n \times n$ -Matrix, deren Einträge Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Es sei  $u \in \mathbb{R}^n$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$  für alle  $t \in I$ . Zeige, dass  $e^{\lambda t} \cdot u$  eine Lösung der linearen Differentialgleichung  $v' = Mv$  ist.

**Aufgabe 43.10.** Es sei  $M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$  eine (variable)  $n \times n$ -Matrix, deren Einträge stetige Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Es sei  $u \in \mathbb{R}^n$  ein (konstanter) Eigenvektor von  $M(t)$  zum (variablen, von  $t$  differenzierbar abhängigen) Eigenwert  $\lambda(t)$ . Zeige durch ein Beispiel, dass  $e^{\lambda(t)t} \cdot u$  keine Lösung der linearen Differentialgleichung  $v' = Mv$  sein muss.

**Aufgabe 43.11.** Es sei  $M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$  eine (variable)  $n \times n$ -Matrix, deren Einträge stetige Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Es sei  $u(t) \in \mathbb{R}^n$  ein (variabler, von  $t$  differenzierbar abhängiger) Eigenvektor von  $M(t)$  zum konstanten Eigenwert  $\lambda$ . Zeige durch ein Beispiel, dass  $e^{\lambda t} \cdot u(t)$  keine Lösung der linearen Differentialgleichung  $v' = Mv$  sein muss.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 43.12.** (6 Punkte)

Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ v_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 43.13.** (4 Punkte)

Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 43.14.** (5 Punkte)

Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 43.15.** (6 Punkte)

Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 43.16.** (5 Punkte)

Bestimme die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 + e^t \\ t \end{pmatrix}.$$

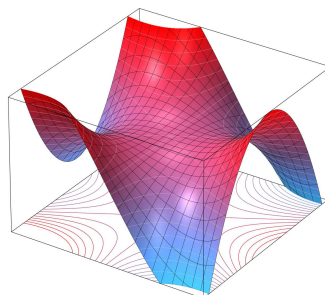
## 44. VORLESUNG - RICHTUNGSABLEITUNG

Wir beschäftigen uns nun mit der Differentialrechnung für Abbildungen mit höherdimensionalem Definitionsbereich. Dazu seien zwei reelle endlichdimensionale Vektorräume  $V$  und  $W$  gegeben. Ferner sei  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge und

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Diese Abbildung wollen wir „differenzieren“. Anders als in den bisher behandelten Situationen gibt es bei einem höherdimensionalen Definitionsbereich mehrere nicht äquivalente Konzepte von Differenzierbarkeit. Wir werden nacheinander die *Richtungsableitung*, *partielle Ableitungen*

und das *totale Differential* sowie ihre Beziehungen untereinander diskutieren. Wir werden durchgehend voraussetzen, dass die Vektorräume euklidisch sind.



Es ist erstmal keine große Einschränkung, wenn man den Zielraum als  $W = \mathbb{R}$  ansetzt. Als Definitionsmenge kann man sich zunächst auf  $G = V = \mathbb{R}^2$  beschränken, und sich vorstellen, dass die Abbildung jedem Grundpunkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  einen Höhepunkt zuordnet, so dass die Abbildung insgesamt ein Gebirge über einer Grundfläche beschreibt.

### Richtungsableitung

Wir stellen uns vor, wir sind an einem Ort im Gebirge und entschließen uns, in eine bestimmte Richtung, beispielsweise nach Nordwest zu gehen, egal was kommen mag. Damit machen wir sämtliche Steigungen und Abhänge mit, die das Gebirge uns in dieser vorgegebenen Richtung bietet. Dabei lernen wir nur den Höhenverlauf des Gebirges entlang dieses linearen Ausschnitts kennen. Durch die gewählte Richtung bewegen wir uns auf dem Graphen zu einer Funktion in einer einzigen Variablen, nämlich einer Variablen der Grundgeraden. Dies ist die Grundidee der *Richtungsableitung*.

**Definition 44.1.** Seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume,  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge, und  $f: G \rightarrow W$  eine Abbildung. Weiter sei  $P \in G$  ein



Punkt und  $v \in V$  ein fixierter Vektor. Dann heißt  $f$  *differenzierbar in  $P$  in Richtung  $v$* , falls der Grenzwert

$$\lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{f(P + sv) - f(P)}{s}$$

existiert. In diesem Fall heißt dieser Grenzwert *die Ableitung von  $f$  in  $P$  in Richtung  $v$* . Er wird mit

$$(D_v f)(P)$$

bezeichnet.

Die Existenz von  $(D_v f)(P)$  hängt nur von der Abbildung  $h: I \rightarrow W$ ,  $s \mapsto f(P + sv)$ , ab (wobei das Intervall  $I = U(0, \delta)$  so gewählt ist, dass  $s \in U(0, \delta)$  auch  $P + sv \in G$  impliziert). Mit dieser Hilfsabbildung  $h$  gilt

$$\begin{aligned} h'(0) &= \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{h(s) - h(0)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{f(P + sv) - f(P)}{s} \\ &= (D_v f)(P), \end{aligned}$$

wobei links die Ableitung zu einer Kurve steht.

Die Richtungsableitung in einem Punkt und in eine Richtung ist selbst ein Vektor in  $W$ . Bei  $W = \mathbb{R}$  ist die Richtungsableitung eine reelle Zahl.

**Beispiel 44.2.** Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 y,$$

in einem Punkt  $P = (a_1, a_2)$  in Richtung  $v = (v_1, v_2)$ . Der Differenzenquotient ist

$$\begin{aligned} & \frac{f(P + sv) - f(P)}{s} \\ &= \frac{f((a_1 + sv_1, a_2 + sv_2)) - f((a_1, a_2))}{s} \\ &= \frac{(a_1 + sv_1)^2 (a_2 + sv_2) - a_1^2 a_2}{s} \\ &= \frac{a_1^2 a_2 + 2sa_1 a_2 v_1 + s^2 a_2 v_1^2 + sa_1^2 v_2 + 2s^2 a_1 v_1 v_2 + s^3 v_1^2 v_2 - a_1^2 a_2}{s} \\ &= 2a_1 a_2 v_1 + a_1^2 v_2 + s(a_2 v_1^2 + 2a_1 v_1 v_2) + s^2(v_1^2 v_2). \end{aligned}$$

Für  $s \rightarrow 0$  gehen die beiden hinteren Summanden gegen 0, so dass sich insgesamt

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(P + sv) - f(P)}{s} = 2a_1 a_2 v_1 + a_1^2 v_2$$

ergibt.

Im Punkt  $P = (2, 5)$  ergibt sich in Richtung  $v = (1, -3)$  beispielsweise die Richtungsableitung

$$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 + 2^2 \cdot (-3) = 8.$$

**Beispiel 44.3.** Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume und sei

$$L: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann existiert die Richtungsableitung in jedem Punkt  $P \in V$  und in jede Richtung  $v \in V$ , und zwar ist

$$(D_v L)(P) = L(v),$$

insbesondere ist also die Richtungsableitung unabhängig vom Punkt. Dies folgt direkt durch Betrachten des Differenzenquotienten; es ist nämlich

$$\frac{L(P + sv) - L(P)}{s} = \frac{L(P) + sL(v) - L(P)}{s} = \frac{sL(v)}{s} = L(v).$$

Daher ist auch der Limes für  $s \rightarrow 0$  gleich  $L(v)$ .

Typischerweise berechnet man die Richtungsableitung nicht über eine direkte Grenzwertbetrachtung, sondern über die Hilfsfunktion  $h(t) = f(P + tv)$  (in den nächsten Vorlesungen werden wir noch den Zusammenhang zu partiellen Ableitungen kennenlernen, der ebenfalls für Berechnungen gut geeignet ist).

**Beispiel 44.4.** Wir bestimmen die Richtungsableitung zur Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - xy^2 + \sin(xy),$$

im Punkt  $P = (3, 4)$  in Richtung  $v = (2, -5)$ . Dazu müssen wir die Hilfsfunktion

$$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

im Nullpunkt ableiten. Es ist

$$\begin{aligned} h(t) &= f(P + tv) \\ &= f(3 + 2t, 4 - 5t) \\ &= (3 + 2t)^2 - (3 + 2t)(4 - 5t)^2 + \sin((3 + 2t)(4 - 5t)) \\ &= 9 + 12t + 4t^2 - 48 + 88t + 5t^2 - 50t^3 + \sin(12 - 7t - 10t^2) \\ &= -39 + 100t + 9t^2 - 50t^3 + \sin(12 - 7t - 10t^2). \end{aligned}$$

Die Ableitung von dieser Funktion im Nullpunkt ist

$$h'(0) = 100 - 7 \cos 12,$$

also ist

$$(D_{(2,-5)} f)(3, 4) = 100 - 7 \cos 12.$$

**Lemma 44.5.** Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume, sei  $G \subseteq V$  offen,  $P \in G$  ein Punkt,  $v \in V$  ein Vektor und seien

$$f, g: G \longrightarrow W$$

Abbildungen, die im Punkt  $P$  in Richtung  $v$  differenzierbar seien. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) Die Summe  $f + g$  ist ebenfalls differenzierbar in Richtung  $v$  mit

$$(D_v(f + g))(P) = (D_v f)(P) + (D_v g)(P).$$

- (2) Das Produkt  $af$  mit  $a \in \mathbb{R}$  ist ebenfalls differenzierbar in Richtung  $v$  mit

$$(D_v(af))(P) = a(D_v f)(P).$$

- (3) Die Funktion  $f$  ist auch in Richtung  $cv$  mit  $c \in \mathbb{R}$  differenzierbar und es gilt  $(D_{cv}f)(P) = c(D_v f)(P)$ .

*Beweis.* Die Eigenschaften (1) und (2) ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften für Limiten von Abbildungen, siehe Lemma 15.10. Für die Eigenschaft (3) siehe Aufgabe 42.13.  $\square$

Im Rahmen der Theorie des totalen Differentials wird die Frage beantwortet, wie sich die Richtungsableitungen zu verschiedenen Richtungen zueinander verhalten. Wenn im Werteraum eine Basis gegeben ist, so kann man die Richtungsableitung komponentenweise bestimmen.

**Lemma 44.6.** Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume, sei  $G \subseteq V$  offen,  $P \in G$  ein Punkt und sei  $v \in V$  ein Vektor. Es sei

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Es sei  $W$  der Produktraum

$$W = W_1 \times \cdots \times W_k$$

aus euklidischen Vektorräumen  $W_1, \dots, W_k$  (versehen mit dem Produkt der einzelnen Skalarprodukte). Dann ist  $\varphi$  genau dann in  $P$  differenzierbar in Richtung  $v$ , wenn sämtliche Komponentenabbildungen

$$\varphi_i: G \longrightarrow W_i$$

in  $P$  in Richtung  $v$  differenzierbar sind. In diesem Fall gilt

$$(D_v \varphi)(P) = ((D_v \varphi_1)(P), \dots, (D_v \varphi_k)(P))$$

- (2) Es sei  $w_1, \dots, w_n$  eine Basis von  $W$  mit den Koordinaten

$$y_j: W \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dann ist  $\varphi$  in  $P$  in Richtung  $v$  genau dann differenzierbar, wenn sämtliche Komponentenfunktionen

$$f_j = y_j \circ \varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

in  $P$  in Richtung  $v$  differenzierbar sind. In diesem Fall ist

$$(D_v \varphi)(P) = ((D_v f_1)(P), \dots, (D_v f_n)(P)).$$

*Beweis.* Die erste Aussage folgt aus der zweiten, wenn man für die einzelnen Vektorräume  $W_j$  Basen einführt (umgekehrt ist auch der zweite Teil ein Spezialfall des ersten). Die zweite Aussage folgt aus allgemeinen Limeseigenschaften oder aus Lemma 34.5 in Verbindung mit Aufgabe 44.4.  $\square$

Aufgrund von diesem Lemma muss man vor allem die Richtungsableitung für den Fall verstehen, wo der Wertebereich gleich  $\mathbb{R}$  ist.

Das folgende einfache Beispiel zeigt, dass durchaus alle Richtungsableitungen existieren können, die Abbildung selbst aber noch nicht einmal stetig sein muss.

**Beispiel 44.7.** Wir betrachten die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Für einen Vektor  $v \neq 0$ ,  $v = (a, b)$ , und einen reellen Parameter  $s$  erhalten wir auf dem linearen Unterraum  $\mathbb{R}v$  die Funktion

$$f_v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto f(sa, sb) = \frac{sas^3b^3}{s^2a^2 + s^6b^6} = \frac{s^2ab^3}{a^2 + s^4b^6}.$$

Für  $a \neq 0$  ist der Nenner stets positiv und die Funktion  $f_v$  ist stetig mit dem Wert 0 bei  $s = 0$ , und differenzierbar. Für  $a = 0$  ist die Funktion  $f_v$  konstant = 0 und damit ebenfalls differenzierbar. Also existieren in 0 alle Richtungsableitungen zu  $f$ . Die Funktion  $f$  ist allerdings nicht stetig: Für die Folge  $(1/m^3, 1/m)$  (die gegen  $0 = (0, 0)$  konvergiert) gilt

$$f\left(\frac{1}{m^3}, \frac{1}{m}\right) = \frac{(1/m^3)(1/m^3)}{(1/m^6) + (1/m^6)} = \frac{1}{2},$$

aber  $f(0, 0) = 0$ .

Im vorstehenden Beispiel besteht kein enger Zusammenhang zwischen den Richtungsableitungen in verschiedene Richtungen. Wir werden später sehen, dass unter stärkeren Voraussetzungen die Zuordnung

$$V \rightarrow W, v \mapsto (D_v f)(P),$$

linear ist.

Im Allgemeinen möchte man nicht nur in einem einzigen Punkt  $P \in V$  ableiten können, sondern in jedem Punkt, was durch die folgende naheliegende Definition präzisiert wird.

**Definition 44.8.** Seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume, sei  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge, sei  $f: G \rightarrow W$  eine Abbildung und  $v \in V$  ein fixierter Vektor. Dann heißt  $f$  *differenzierbar in Richtung  $v$* , falls  $f$  in jedem Punkt  $P \in G$  in Richtung  $v$  differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$D_v f: G \rightarrow W, P \mapsto (D_v f)(P),$$

die *Richtungsableitung* von  $f$  in Richtung  $v$ .

Die Richtungsableitung zu einem fixierten Vektor ist also vom selben Typ wie die Ausgangsabbildung.

## Polynomiale Funktionen

**Beispiel 44.9.** Wir betrachten die polynomiale Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1 \cdots x_n.$$

Die Richtungsableitung in Richtung  $v = (v_1, \dots, v_n)$  in einem beliebigen Punkt  $P = (x_1, \dots, x_n)$  ergibt sich durch Betrachten des Differenzenquotienten, also

$$\begin{aligned} & \frac{(x_1 + sv_1) \cdot (x_2 + sv_2) \cdots (x_n + sv_n) - x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{s} \\ &= \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n + s \left( \sum_{i=1}^n v_i \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i} \right) + s^2 g(s, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) - x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{s} \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i} + s \cdot g(s, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Dabei ist  $g(s, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$  eine polynomiale Funktion in  $s$  (die  $x_1, \dots, x_n$  und die  $v_1, \dots, v_n$  sind fixierte Zahlen). Der Limes von  $s \cdot g(s, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$  geht für  $s \rightarrow 0$  gegen 0. Daher ist

$$(D_v f)(P) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i}.$$

In den Aufgaben werden wir sehen, dass die Richtungsableitung zu einer polynomialen Funktion in jede Richtung existiert und selbst wieder polynomial ist. Dies wird sich auch einfach im Rahmen des totalen Differentials ergeben.

### 44. ARBEITSBLATT

#### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 44.1.** Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy,$$

- (1) im Punkt  $(0, 0)$  in Richtung  $(1, 0)$ ,
- (2) im Punkt  $(0, 0)$  in Richtung  $(2, 5)$ ,
- (3) im Punkt  $(1, 0)$  in Richtung  $(1, 0)$ ,
- (4) im Punkt  $(1, 0)$  in Richtung  $(0, 1)$ ,
- (5) im Punkt  $(2, 3)$  in Richtung  $(-1, 0)$ ,
- (6) im Punkt  $(3, 7)$  in Richtung  $(5, -4)$ .

**Aufgabe 44.2.** Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x}{y},$$

- (1) im Punkt  $(0, 1)$  in Richtung  $(1, 0)$ ,

- (2) im Punkt  $(0, 1)$  in Richtung  $(0, 1)$ ,
- (3) im Punkt  $(1, 3)$  in Richtung  $(2, 4)$ ,
- (4) im Punkt  $(-1, 6)$  in Richtung  $(-3, -1)$ ,
- (5) im Punkt  $(1, \frac{1}{100})$  in Richtung  $(0, -1)$ .

**Aufgabe 44.3.** Sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass  $f$  in einem Punkt  $P \in \mathbb{R}$  genau dann differenzierbar ist, wenn  $f$  in  $P$  in Richtung 1 differenzierbar ist, und dass dann die Gleichheit

$$(D_1 f)(P) = f'(P)$$

gilt.

**Aufgabe 44.4.** Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume,  $G \subseteq V$  offen,  $P \in G$  und  $v \in V$ . Es sei

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Zeige, dass die Richtungsableitung  $(D_v \varphi)(P)$  im Punkt  $P$  genau dann existiert, wenn die Kurve

$$I \longrightarrow W, t \longmapsto \varphi(P + tv),$$

in  $t = 0$  differenzierbar ist. Wie muss dabei das Intervall  $I$  gewählt werden?

**Aufgabe 44.5.** Bestimme, für welche Punkte  $P \in \mathbb{R}^n$  und welche Richtungen  $v \in \mathbb{R}^n$  die Richtungsableitung der euklidischen Norm

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

existiert.

**Aufgabe 44.6.** Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

im Nullpunkt  $(0, 0)$  auf Richtungsableitungen. Man entscheide für jede Gerade  $G$  durch den Nullpunkt, ob die Einschränkung von  $f$  auf  $G$  im Nullpunkt ein Extremum besitzt.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 44.7.** (4 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 \sin y - e^x y - x,$$

- (1) im Punkt  $(0, 0)$  in Richtung  $(1, 0)$ ,
- (2) im Punkt  $(0, 0)$  in Richtung  $(0, 1)$ ,
- (3) im Punkt  $(0, 0)$  in Richtung  $(2, 0)$ ,
- (4) im Punkt  $(0, 0)$  in Richtung  $(1, -3)$ ,
- (5) im Punkt  $(1, 1)$  in Richtung  $(1, 1)$ ,
- (6) im Punkt  $(1, 0)$  in Richtung  $(-1, \frac{1}{2})$ ,
- (7) im Punkt  $(5, 7)$  in Richtung  $(1, 0)$ ,
- (8) im Punkt  $(1, 0)$  in Richtung  $(5, 7)$ .

**Aufgabe 44.8.** (2 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x^2 + y^3 = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x^2 - xy + y^4}{x^2 + y^3},$$

- (1) im Punkt  $(1, 1)$  in Richtung  $(1, 0)$ ,
- (2) im Punkt  $(0, 1)$  in Richtung  $(0, 1)$ ,
- (3) im Punkt  $(1, 0)$  in Richtung  $(0, 1)$ ,
- (4) im Punkt  $(3, -2)$  in Richtung  $(2, -5)$ .

**Aufgabe 44.9.** (5 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitungen der Funktion

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n},$$

in einem Punkt

$$a = (a_1, \dots, a_n)$$

in Richtung

$$v = (v_1, \dots, v_n).$$

**Aufgabe 44.10.** (4 Punkte)

Zeige, unter Verwendung von Aufgabe 44.9, dass zu einer polynomialen Funktion

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \varphi(x_1, \dots, x_n),$$

zu einer fixierten Richtung  $v \in \mathbb{R}^n$  die Richtungsableitung  $D_v \varphi$  existiert und selbst polynomial ist.

**Aufgabe 44.11.** (4 Punkte)

Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume, sei  $G \subseteq V$  offen,  $P \in G$  ein Punkt,  $v \in V$  ein Vektor und sei

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung, die im Punkt  $P$  in Richtung  $v$  differenzierbar sei. Zeige, dass  $f$  auch in Richtung  $cv$  mit  $c \in \mathbb{R}$  differenzierbar ist und die Beziehung  $(D_{cv}f)(P) = c(D_vf)(P)$  gilt.

#### 45. VORLESUNG - PARTIELLE ABLEITUNG

Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine durch

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

gegebene Abbildung. Betrachtet man für einen fixierten Index  $i$  die übrigen Variablen  $x_j$ ,  $j \neq i$ , als Konstanten, so erhält man eine Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die nur von  $x_i$  abhängt (entsprechend betrachtet man die übrigen Variablen als Parameter). Falls diese Funktion, als Funktion in einer Variablen, differenzierbar ist, so sagen wir, dass  $f$  *partiell differenzierbar* bezüglich  $x_i$  ist und bezeichnen diese Ableitung mit  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ . Der Vorteil der partiellen Ableitungen liegt darin, dass man diese einfach berechnen kann. Jedoch hängen sie von der Wahl einer Basis ab. Die partiellen Ableitungen sind selbst Abbildungen von  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition 45.1.** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei eine Abbildung  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$  durch

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

gegeben. Es sei  $P = (a_1, \dots, a_n) \in G$  ein Punkt. Für fixierte Indizes  $i$  und  $j$  betrachten wir die Abbildung

$$I \rightarrow \mathbb{R}, x_i \mapsto f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

(wobei  $I$  ein Intervall mit  $a_i \in I$  sei derart, dass  $\{(a_1, \dots, a_{i-1})\} \times I \times \{(a_{i+1}, \dots, a_n)\} \subseteq G$  gilt) als Funktion in einer Variablen, wobei die übrigen Variablen  $a_k$ ,  $k \neq i$ , fixiert seien. Ist diese Funktion in  $P$  differenzierbar, so heißt  $f_j$  *partiell differenzierbar* in  $P$  bezüglich der Koordinate  $x_i$ . Man bezeichnet diese Ableitung (welche ein Element in  $\mathbb{R}$  ist) mit

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P)$$

und nennt sie die  *$i$ -te partielle Ableitung* von  $f_j$  in  $P$ .

Die Abbildung  $f$  heißt *partiell differenzierbar* im Punkt  $P$ , falls für alle  $i$  und  $j$  die partiellen Ableitungen in  $P$  existieren. Die  *$i$ -te partielle Ableitung* von  $f$  in  $P$  wird mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) := \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \right)$$

bezeichnet.

Diese Definition führt die  *$i$ -te partielle Ableitung* einer Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  auf den Ableitungsbegriff in einer Variablen zurück, indem die anderen Variablen „festgehalten“ und als Parameter betrachtet werden. Daher bedeutet die



Existenz der  $i$ -ten partiellen Ableitung von  $f$  im Punkt  $(a_1, \dots, a_n)$  einfach die Existenz des Limes

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + s, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{s}.$$

**Beispiel 45.2.** Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{xy^3}{x^2 + y^2}.$$

Um die partielle Ableitung nach  $x$  (in jedem Punkt) zu berechnen, betrachtet man  $y$  als eine Konstante, sodass eine nur von  $x$  abhängige Funktion dasteht. Diese wird gemäß den Ableitungsregeln für Funktionen in einer Variablen abgeleitet, so dass sich

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3(x^2 + y^2) - xy^3(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2y^3 + y^5}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$$

ergibt. Für die partielle Ableitung nach  $y$  betrachtet man  $x$  als eine Konstante und erhält

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3xy^2(x^2 + y^2) - xy^3(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^3y^2 + xy^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}.$$

Die partiellen Ableitungen sind im Wesentlichen die Richtungsableitungen in Richtung der Basisvektoren. Insbesondere machen partielle Ableitungen nur dann Sinn, wenn eine Basis im Vektorraum, der den Definitionsbereich einer Abbildung darstellt, gewählt worden ist, bzw. wenn eben von vornherein ein  $\mathbb{R}^n$  betrachtet wird.

**Lemma 45.3.** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $P \in G$  ein Punkt und sei

$$\begin{aligned} f: G &\longrightarrow \mathbb{R}^m(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &= (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)), \end{aligned}$$

eine Abbildung. Dann ist  $\varphi$  genau dann partiell differenzierbar in  $P$ , wenn die Richtungsableitungen von sämtlichen Komponentenfunktionen  $f_j$  in  $P$  in Richtung eines jeden Einheitsvektors existieren. In diesem Fall stimmt die  $i$ -te partielle Ableitung  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P)$  von  $f$  in  $P$  mit der Richtungsableitung von  $f_j$  in  $P$  in Richtung des  $i$ -ten Einheitsvektors  $e_i$  überein, und  $f$  ist genau dann partiell differenzierbar in  $P$ , wenn die Richtungsableitungen in  $P$  in Richtung eines jeden Einheitsvektors existieren.

*Beweis.* Sei  $P = (a_1, \dots, a_n)$ . Da partielle Ableitungen die Ableitungen von Funktionen in einer Variablen sind, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P) &= \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + s, a_{i+1}, \dots, a_n) - f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{f_j(P + se_i) - f_j(P)}{s} \\ &= (D_{e_i} f)(P). \end{aligned}$$

□

**Definition 45.4.** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei eine Abbildung

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}^m(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

gegeben. Dann heißt  $f$  *partiell differenzierbar*, wenn  $f$  in jedem Punkt  $P \in G$  partiell differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : G \longrightarrow \mathbb{R}^m, P \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \right),$$

die  $i$ -te *partielle Ableitung* von  $f$ .

**Definition 45.5.** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei eine Abbildung  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei eine Abbildung

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}^m(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

gegeben, die in  $P \in G$  partiell differenzierbar sei. Dann heißt die Matrix

$$\text{Jak}(f)_P := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}$$

die *Jacobi-Matrix* zu  $f$  im Punkt  $P$ .

**Beispiel 45.6.** Wir betrachten die Abbildung  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die durch

$$(x, y, z) \longmapsto (xy^2 - z^3, \sin(xy) + x^2 \cdot \exp z) = (f_1, f_2)$$

gegeben sei. Die partiellen Ableitungen von  $f_1$  sind

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = -3z^2,$$

und die partiellen Ableitungen von  $f_2$  sind

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y \cos(xy) + 2x \cdot \exp z, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = x \cdot \cos(xy), \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = x^2 \cdot \exp(z).$$

Damit erhalten wir für einen beliebigen Punkt  $P = (x, y, z)$  die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} y^2 & 2xy & -3z^2 \\ y \cos(xy) + 2x \exp(z) & x \cos(xy) & x^2 \exp(z) \end{pmatrix}.$$

Für einen speziellen Punkt, z.B.  $P = (2, 1, 3)$ , setzt man einfach ein:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -27 \\ \cos(2) + 4 \exp(3) & 2 \cos(2) & 4 \exp(3) \end{pmatrix}.$$

## Höhere Richtungsableitungen

Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume und  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge. Für eine Abbildung  $f: G \rightarrow W$  und einen fixierten Vektor  $v \in V$  ist die Richtungsableitung in Richtung  $v$  (falls diese existiert) selbst eine Abbildung

$$D_v f: G \longrightarrow W, P \longmapsto (D_v f)(P).$$

Als solche macht es Sinn zu fragen, ob  $D_v f$  in Richtung  $u \in V$  differenzierbar ist. Wir sprechen dann von *höheren Ableitungen*. Dies wird präzisiert durch die folgende induktive Definition.

**Definition 45.7.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume,

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung auf einer offenen Menge  $G \subseteq V$  und  $v_1, \dots, v_n$  Vektoren in  $V$ . Man sagt, dass die *höhere Richtungsableitung* von  $f$  in Richtung  $v_1, \dots, v_n$  existiert, wenn die höhere Richtungsableitung in Richtung  $v_1, \dots, v_{n-1}$  existiert und davon die Richtungsableitung in Richtung  $v_n$  existiert. Sie wird mit

$$D_{v_n}(\dots D_{v_2}(D_{v_1}f))$$

bezeichnet.

**Beispiel 45.8.** Wir bestimmen die Richtungsableitung zur Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - xy - y^3,$$

in Richtung  $v = (4, -1)$ . Zu einem Punkt  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  müssen wir die Funktion

$$p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(P + tv),$$

nach  $t$  im Nullpunkt ableiten. Es ist

$$\begin{aligned} p(t) &= f(P + tv) \\ &= (x + 4t)^2 - (x + 4t)(y - t) - (y - t)^3 \\ &= x^2 + 8xt + 16t^2 - xy - 4ty + xt + 4t^2 - y^3 + 3y^2t - 3yt^2 + t^3 \\ &= x^2 - xy - y^3 + 9xt - 4ty + 3y^2t + 20t^2 - 3yt^2 + t^3. \end{aligned}$$

Die Ableitung von dieser Funktion im Nullpunkt ist

$$p'(0) = 9x - 4y + 3y^2,$$

also ist

$$g(x, y) := (D_v f)(x, y) = 9x - 4y + 3y^2.$$

Für diese Funktion können wir nun die Richtungsableitung in Richtung  $u = (2, -3)$  ausrechnen. Es ist

$$\begin{aligned} q(t) &:= g(P + tu) \\ &= 9(x + 2t) - 4(y - 3t) + 3(y - 3t)^2 \\ &= 9x - 4y + 3y^2 + 18t + 12t - 18yt + 27t^2. \end{aligned}$$

Die Ableitung von dieser Funktion im Nullpunkt ist

$$q'(0) = 30 - 18y,$$

also ist

$$(D_u g)(x, y) = (D_u(D_v f))(x, y) = 30 - 18y.$$

**Definition 45.9.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume und

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung auf einer offenen Menge. Man sagt, dass  $f$   $n$ -mal *stetig differenzierbar* ist, wenn für jede Auswahl  $v_1, \dots, v_n$  von  $n$  Vektoren aus  $V$  die höhere Richtungsableitung

$$D_{v_n}(\dots D_{v_2}(D_{v_1} f))$$

in Richtung  $v_1, \dots, v_n$  existiert und stetig ist.

Einmal stetig differenzierbar bedeutet also, dass die Richtungsableitung  $D_v f$  in jede Richtung  $v \in V$  existiert und stetig ist.

Polynomfunktionen sind beliebig oft stetig differenzierbar, siehe Aufgabe 45.5.

Auch partielle Ableitungen kann man wie Richtungsableitungen hintereinander ausführen. Dies führt zu Schreibweisen wie

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f$$

und Ähnliche.

### Der Satz von Schwarz

**Beispiel 45.10.** Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^4 - x^3 y + 5x y^2 + 2y^3.$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 3x^2 y + 5y^2 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^3 + 10xy + 6y^2.$$

Diese Funktionen sind selbst wiederum partiell differenzierbar, und wir berechnen

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (4x^3 - 3x^2 y + 5y^2) = -3x^2 + 10y$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-x^3 + 10xy + 6y^2) = -3x^2 + 10y.$$

Die beiden zweiten partiellen Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$  und  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$  stimmen also überein.

In diesem Beispiel zeigt sich ein allgemeiner Sachverhalt, der *Satz von Schwarz* (oder auch *Satz von Clairaut*) heißt.

**Satz 45.11.** Sei  $G \subseteq V$  offen und  $\varphi: G \rightarrow W$  eine Abbildung, so dass für  $u, v \in V$  die zweiten Richtungsableitungen  $D_v D_u \varphi$  und  $D_u D_v \varphi$  existieren und stetig sind. Dann gilt

$$D_v D_u \varphi = D_u D_v \varphi.$$

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

**Korollar 45.12.** Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume,  $G \subseteq V$  offen und

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine  $n$ -mal stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Auswahl von  $n$  Vektoren aus  $V$ . Dann gilt für jede Permutation  $\sigma \in S_n$  die Gleichheit

$$D_{v_n}(\dots D_{v_2}(D_{v_1}\varphi)) = D_{v_{\sigma(n)}}(\dots D_{v_{\sigma(2)}}(D_{v_{\sigma(1)}}\varphi)).$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 45.6. □

**Korollar 45.13.** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung, so dass für  $1 \leq i, j \leq n$  die zweiten partiellen Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f$  und  $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f$  existieren und stetig sind. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f.$$

*Beweis.* Des folgt aus Satz 45.11 und Lemma 45.3. □

## 45. ARBEITSBLATT

### Aufwärmataufgaben

**Aufgabe 45.1.** Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^3 y - x^2, x^4 y^2 - 3xy^3 + 5y).$$

**Aufgabe 45.2.** Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (x^2 y z^3 - \sin x, \exp(x^4 y) - 2x^2 z^3 \cos(xy^2 z)).$$

**Aufgabe 45.3.** Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x}{y}.$$

**Aufgabe 45.4.** Bestimme sämtliche höheren Richtungsableitungen der Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2y^3 - x^3y,$$

die sich mit den beiden Standardrichtungen  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  ausdrücken lassen.

**Aufgabe 45.5.** Zeige, dass eine Polynomfunktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig oft stetig differenzierbar ist.

**Aufgabe 45.6.** Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume,  $G \subseteq V$  offen und

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine  $n$ -mal stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Auswahl von  $n$  Vektoren aus  $V$ . Zeige, dass dann für jede Permutation  $\sigma \in S_n$  die Gleichheit

$$D_{v_n}(\dots D_{v_2}(D_{v_1}\varphi)) = D_{v_{\sigma(n)}}(\dots D_{v_{\sigma(2)}}(D_{v_{\sigma(1)}}\varphi))$$

gilt.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 45.7.** (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (\sin xy, x^2y^3z^4 - y \sinh z, xy^2z + 5).$$

**Aufgabe 45.8.** (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy^3 - x^2y^2 - 4y^2.$$

Berechne die Richtungsableitung dieser Abbildung in einem Punkt  $(x, y)$  in Richtung  $(2, 5)$ . Bestätige, dass sich diese Richtungsableitung auch ergibt, wenn man die Jacobi-Matrix auf den Vektor  $(2, 5)$  anwendet.

**Aufgabe 45.9.** (3 Punkte)

Zeige, dass keine partiell differenzierbare Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

existiert, so dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xy \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y^2$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  gilt.

**Aufgabe 45.10.** (4 Punkte)

Sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion. Zeige, dass es ein  $k \in \mathbb{N}$  gibt derart, dass sämtliche  $k$ -ten Richtungsableitungen null sind.

**Aufgabe 45.11.** (6 Punkte)

Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \varphi(x, y),$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, für die in jedem Punkt  $P \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \varphi(P) = 0$$

gelte. Zeige, dass es dann Funktionen

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt derart, dass

$$\varphi(x, y) = f(x) + g(y)$$

gilt.

**Aufgabe 45.12.** (6 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

zweimal partiell differenzierbar ist, und dass

$$D_1 D_2 f(0, 0) \neq D_2 D_1 f(0, 0)$$

gilt.

## 46. VORLESUNG - TOTALE DIFFERENZIERBARKEIT

Wir möchten Abbildungen  $\varphi: V \rightarrow W$  zwischen Vektorräumen differenzieren (ohne auf eine Richtung Bezug zu nehmen), und allgemeiner Abbildungen

$$\varphi: G \longrightarrow W,$$

wobei  $G \subseteq V$  eine gewisse offene Teilmenge ist. Wir wiederholen kurz die Situation in einer Variablen: Angenommen wir haben eine Abbildung  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dann ist die Grundidee einer differenzierbaren Abbildung und ihrer Ableitung, eine „Tangente an den Graphen“ anzulegen. Dabei kann man sagen, dass die Tangente die beste *lineare Approximation* von  $\varphi$  (genauer:

Der Graph einer affin-linearen Approximation) in einem gegebenen Punkt  $x \in \mathbb{R}$  darstellt. Da die Steigung der Tangente wieder eine reelle Zahl ist, wird beim Differenzieren jedem Punkt  $x$  wieder eine Zahl zugeordnet. Wir erhalten also eine neue Funktion, welche wir mit  $\varphi'$  bezeichnen. Im höherdimensionalen Fall ist dies komplizierter, aber die Idee einer bestmöglichen *linearen Approximation* bleibt bestehen.

Die Übereinstimmung der Konzepte wird auch deutlich, wenn man den Graphen einer Abbildung anschaut. Zu einer differenzierbaren Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  schmiegt sich die Tangente im Punkt  $(P, f(P))$  an den Graphen zu  $f$  an. Zu einer Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist der Graph eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ , den man sich als ein Gebirge über der Ebene vorstellen sollte. Eine sinnvolle Fragestellung ist, ob es zu einem Punkt  $(P, f(P))$  eine anschmiegende Tangentialebene an den Graphen zu  $f$  gibt.

Im Folgenden nehmen wir an, dass alle Vektorräume endlichdimensional und mit einer euklidischen Norm versehen sind. Wie schon gezeigt wurde, hängt die Topologie, also die Konzepte offene Menge, Stetigkeit, Konvergenz, nicht von der gewählten euklidischen Struktur ab.

**Definition 46.1.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume,  $G \subseteq V$  eine offene Menge und  $\varphi: G \rightarrow W$  eine Abbildung. Dann heißt  $\varphi$  *differenzierbar* (oder *total differenzierbar*) im Punkt  $P \in G$ , wenn es eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $L: V \rightarrow W$  mit der Eigenschaft

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + \|v\| r(v)$$

gibt, wobei  $r: U(0, \delta) \rightarrow W$  eine in 0 stetige Abbildung mit  $r(0) = 0$  ist und die Gleichung für alle  $v \in V$  mit  $P + v \in U(P, \delta) \subseteq G$  gilt.

Diese lineare Abbildung heißt, falls sie existiert, das (*totale*) *Differential* von  $\varphi$  an der Stelle  $P$  und wird mit

$$(D\varphi)_P$$

bezeichnet.

Äquivalent zur totalen Differenzierbarkeit ist die Eigenschaft, dass der Ausdruck

$$r(v) = \frac{\varphi(P + v) - \varphi(P) - L(v)}{\|v\|}$$

für  $v \rightarrow 0$  gegen 0 konvergiert. Ebenfalls äquivalent ist die Eigenschaft, dass der Limes (von Funktionen)

$$\lim_{v \rightarrow 0, v \neq 0} \frac{\|\varphi(P + v) - \varphi(P) - L(v)\|}{\|v\|}$$

existiert und gleich 0 ist (siehe Aufgabe 46.9).



Das Konzept der totalen Differenzierbarkeit ist eher theoretisch und weniger konkreten Berechnungen zugänglich. Wir werden später dieses Konzept mit dem Konzept der partiellen Ableitungen in Verbindung bringen, welches eher für Berechnungen geeignet ist, jedoch von Koordinaten, d.h. von der Auswahl einer Basis, abhängt (siehe auch Beispiel 47.6 in der nächsten Vorlesung).

**Lemma 46.2.** *Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume und sei die Abbildung  $\varphi: G \rightarrow W$  auf einer offenen Teilmenge  $G \subseteq V$  definiert. Sei  $P \in G$  ein Punkt. Dann existiert höchstens eine lineare Abbildung mit den Eigenschaften aus Definition. Ist  $\varphi$  im Punkt  $P$  differenzierbar, so ist das totale Differential  $(D\varphi)_P$  eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Angenommen, es gelte  $\varphi(P+v) = \varphi(P) + L_1(v) + \|v\| \cdot r_1(v)$  und  $\varphi(P+v) = \varphi(P) + L_2(v) + \|v\| \cdot r_2(v)$  mit zwei linearen Abbildungen  $L_1$  und zwei  $L_2$  und im Punkt 0 stetigen Funktionen  $r_1, r_2: U(0, \delta) \rightarrow W$  mit  $r_1(0) = r_2(0) = 0$ . Wir müssen  $L_1 = L_2$  zeigen. Dazu ziehen wir die beiden Gleichungen voneinander ab (da es sich hier um Gleichungen von Funktionswerten im Vektorraum  $W$  handelt, ist hier werteweises Abziehen gemeint) und erhalten die Gleichung

$$0 = (L_1 - L_2)(v) + \|v\| \cdot (r_1(v) - r_2(v)).$$

Daher müssen wir zeigen, dass die (konstante) Nullabbildung die Eigenschaft besitzt, dass die lineare Abbildung 0 ihre einzige lineare Approximation ist. Wir nehmen daher an, dass

$$0 = L(v) + \|v\| \cdot r(v)$$

gilt, wobei  $L$  linear und  $r$  eine in 0 stetige Funktion ist mit  $r(0) = 0$ . Wenn  $L$  nicht die Nullabbildung ist, so gibt es einen Vektor  $v \in V$  mit  $L(v) = w \neq 0$ . Dann gilt für  $s \in \mathbb{R}$

$$0 = L(sv) + \|sv\| r(sv) = sw + |s| \cdot \|v\| \cdot r(sv).$$

Dies impliziert, dass  $r(sv) = -sw / (|s| \cdot \|v\|)$  für  $s \neq 0$  gilt. Die Norm von  $r(sv)$  ist daher konstant gleich  $\|w\| / \|v\| \neq 0$ . Also gilt  $\lim_{s \rightarrow 0} \|r(sv)\| \neq 0$ , ein Widerspruch.  $\square$

**Beispiel 46.3.** Ist  $\varphi: V \rightarrow W$  konstant mit  $\varphi(v) = w \in W$  für alle  $v \in V$ , so ist  $\varphi$  differenzierbar mit totalem Differential 0 (siehe Aufgabe 46.6).

**Proposition 46.4.** *Sei  $L: V \rightarrow W$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung zwischen den endlichdimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$ . Dann ist  $L$  in jedem Punkt  $P \in V$  differenzierbar und stimmt in jedem Punkt mit ihrem totalen Differential überein.*

*Beweis.* Aufgrund der Linearität gilt

$$L(P+v) = L(P) + L(v).$$

Also können wir  $r = 0$  wählen.  $\square$

Diese Aussage gilt auch für affin-lineare Abbildungen, also Abbildungen der Form

$$\varphi: V \longrightarrow W, v \longmapsto L(v) + w,$$

mit einer linearen Abbildung  $L$  und einem festen Vektor  $w \in W$ . In diesem Fall ist das totale Differential gleich  $L$ .

**Lemma 46.5.** *Es sei  $I$  ein reelles Intervall,  $V$  ein euklidischer Vektorraum und*

$$f: I \longrightarrow V$$

*eine Abbildung. Dann ist  $\gamma$  genau dann in  $t \in I$  als Kurve differenzierbar, wenn  $\gamma$  in  $t$  total differenzierbar ist. In diesem Fall besteht die Beziehung*

$$\gamma'(t) = (D\gamma)_t(1).$$

*Beweis.* Die Kurvendifferenzierbarkeit im Punkt  $t$  bedeutet nach Definition die Existenz des Limes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}.$$

Diese Existenz ist (entsprechend Satz 19.5) dazu äquivalent, dass man

$$\gamma(t+h) = \gamma(t) + hw + h \cdot r(h)$$

mit einem Vektor  $w \in V$  und einer in 0 stetigen Abbildung  $r$  mit  $r(0) = 0$  schreiben kann (wobei  $w = \gamma'(t)$  sein muss). Dabei kann man hinten  $h$  durch  $|h|$  ersetzen (wobei man auch  $r(h)$  abwandeln muss). Diese lineare Approximierbarkeit ist aber die Definition der totalen Differenzierbarkeit.  $\square$

**Proposition 46.6.** *Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume und  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge. Seien  $\varphi_1, \varphi_2: G \rightarrow W$  im Punkt  $P \in G$  differenzierbare Abbildungen mit den Differentialen  $(D\varphi_1)_P$  und  $(D\varphi_2)_P$ . Dann ist auch  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  in  $P$  differenzierbar und es gilt*

$$(D(\varphi_1 + \varphi_2))_P = (D\varphi_1)_P + (D\varphi_2)_P.$$

*Ebenso gilt  $(D(a\varphi_1))_P = a(D\varphi_1)_P$ .*

*Beweis.* Sei  $\varphi_1(P+v) = \varphi_1(P) + L_1(v) + \|v\| \cdot r_1(v)$  und  $\varphi_2(P+v) = \varphi_2(P) + L_2(v) + \|v\| \cdot r_2(v)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (\varphi_1 + \varphi_2)(P+v) &= \varphi_1(P+v) + \varphi_2(P+v) \\ &= \varphi_1(P) + L_1(v) + \|v\| \cdot r_1(v) + \varphi_2(P) + L_2(v) + \|v\| \cdot r_2(v) \\ &= (\varphi_1 + \varphi_2)(P) + (L_1 + L_2)(v) + \|v\| (r_1(v) + r_2(v)). \end{aligned}$$

Wir erhalten also die gewünschte Gestalt, da auch  $r_1 + r_2$  in 0 stetig ist mit  $(r_1 + r_2)(0) = 0$ . Der Beweis der zweiten Aussage ist ähnlich.  $\square$

**Proposition 46.7.** *Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume und  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge. Sei  $\varphi: G \rightarrow W$  eine in  $P \in G$  differenzierbare Abbildung. Dann ist  $\varphi$  auch stetig im Punkt  $P$ .*

*Beweis.* Nach Definition gilt  $\varphi(P+v) = \varphi(P) + L(v) + \|v\| \cdot r(v)$ . Die rechte Seite ist stetig (nach Definition und Satz 33.10) in  $v = 0$ . Damit ist  $\varphi$  stetig in  $P$ .  $\square$

### Totale Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen

Im Folgenden wollen wir den Zusammenhang zwischen Richtungsableitungen, partiellen Ableitungen und dem totalen Differential verstehen. Totale Differenzierbarkeit impliziert richtungsweise Differenzierbarkeit.

**Proposition 46.8.** *Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume,  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge, und  $\varphi: G \rightarrow W$  eine im Punkt  $P \in G$  differenzierbare Abbildung. Dann ist  $\varphi$  in  $P$  in jede Richtung  $v$  differenzierbar, und es gilt*

$$(D_v\varphi)(P) = (D\varphi)_P(v) .$$

*Beweis.* Da  $(D\varphi)_P$  eine lineare Abbildung von  $V$  nach  $W$  ist, liefert die Anwendung dieser Abbildung auf einen Vektor  $v \in V$  einen Vektor in  $(D\varphi)_P(v) \in W$ . Nach Voraussetzung haben wir

$$\varphi(P+v) = \varphi(P) + (D\varphi)_P(v) + \|v\| \cdot r(v)$$

(mit den üblichen Bedingungen an  $r$ ). Insbesondere gilt für (hinreichend kleines)  $s \in \mathbb{R}$

$$\varphi(P+sv) = \varphi(P) + s(D\varphi)_P(v) + |s| \cdot \|v\| \cdot r(sv) .$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{\varphi(P+sv) - \varphi(P)}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{s(D\varphi)_P(v) + |s| \cdot \|v\| \cdot r(sv)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \left( (D\varphi)_P(v) + \frac{|s|}{s} \|v\| \cdot r(sv) \right) \\ &= (D\varphi)_P(v) , \end{aligned}$$

da  $\lim_{s \rightarrow 0} r(sv) = 0$  und der Ausdruck  $\frac{|s|}{s} \|v\|$  beschränkt ist.  $\square$

**Bemerkung 46.9.** Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine in  $P \in G$  total differenzierbare Abbildung. Dann existieren nach Proposition 46.8 und nach Lemma 45.3 die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

im Punkt  $P$ . Daher existiert die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix beschreibt das totale Differential bezüglich den Standardbasen im  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$ .

**Satz 46.10.** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung. Seien  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , die Koordinaten von  $\mathbb{R}^n$  und  $P \in G$  ein Punkt. Es sei angenommen, dass alle partiellen Ableitungen in einer offenen Umgebung von  $P$  existieren und in  $P$  stetig sind. Dann ist  $\varphi$  in  $P$  (total) differenzierbar. Ist die Abbildung  $\varphi$  bezüglich der Standardbasis des  $\mathbb{R}^m$  durch die Koordinatenfunktionen  $f_1, \dots, f_m$  gegeben, so wird unter diesen Bedingungen das totale Differential in  $P$  durch die Jacobi-Matrix

$$\left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

beschrieben.

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

**Korollar 46.11.** Polynomfunktionen sind total differenzierbar.

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 46.10 und daraus, dass die partiellen Ableitungen von Polynomfunktionen wieder Polynomfunktionen sind, die nach Satz 33.12 stetig sind. □

## 46. ARBEITSBLATT

### Aufwärmataufgaben

**Aufgabe 46.1.** Bestimme das totale Differential für die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 y^3.$$

**Aufgabe 46.2.** Seien  $a, b \in \mathbb{N}$ . Bestimme das totale Differential für die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^a y^b.$$

**Aufgabe 46.3.** Berechne für die Addition

$$+: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und für die Multiplikation

$$\cdot: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

das totale Differential.

**Aufgabe 46.4.** a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (xy - 2y^3 + 5, x^3 - xy^2 + y),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt  $(1, 2)$ ?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung  $(4, -3)$ .

d) Berechne den Wert von  $\varphi$  in diesem Punkt.

**Aufgabe 46.5.** a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (xy - zy + 2z^2, \sin(x^2yz)),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt  $(1, -1, \pi)$ ?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung  $(2, 0, 5)$ .

d) Berechne den Wert von  $\varphi$  in diesem Punkt.

**Aufgabe 46.6.** Sei  $\varphi: V \rightarrow W$  konstant mit  $\varphi(v) = w \in W$  für alle  $v \in V$ . Zeige, dass  $\varphi$  differenzierbar ist mit totalem Differential 0.

**Aufgabe 46.7.** Sei  $\varphi: V \rightarrow W$  eine total differenzierbare Abbildung mit  $(D\varphi)_P = 0$  für alle  $P \in V$ . Zeige, dass  $\varphi$  konstant ist.

**Aufgabe 46.8.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume und  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge. Es sei  $\varphi: G \rightarrow W$  im Punkt  $P \in G$  differenzierbar mit dem Differential  $(D\varphi)_P$ . Zeige, dass für alle  $a \in \mathbb{R}$  die Beziehung

$$(D(a\varphi))_P = a(D\varphi)_P$$

gilt.

**Aufgabe 46.9.** Seien  $V$ ,  $W_1$  und  $W_2$  drei endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume.

- (1) Seien  $L_1: V \rightarrow W_1$  und  $L_2: V \rightarrow W_2$  zwei  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$L_1 \times L_2: V \longrightarrow W_1 \times W_2, v \longmapsto (L_1(v), L_2(v)),$$

$\mathbb{R}$ -linear ist.

- (2) Seien  $f_1: V \rightarrow W_1$  und  $f_2: V \rightarrow W_2$  zwei im Punkt  $P \in V$  differenzierbare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$f = (f_1 \times f_2): V \longrightarrow W_1 \times W_2, Q \longmapsto (f_1(Q), f_2(Q)),$$

im Punkt  $P$  differenzierbar ist mit dem totalen Differential

$$(Df)_P = (Df_1)_P \times (Df_2)_P.$$

**Aufgabe 46.10.** Es sei  $T \subseteq M$  eine Teilmenge eines metrischen Raumes,  $a \in M$  ein Berührungspunkt von  $T$ ,

$$g: T \longrightarrow L$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum und  $b \in L$ . Zeige, dass für den Limes

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$$

genau dann gilt, wenn

$$\lim_{x \rightarrow a} \|g(x) - b\| = 0$$

gilt.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 46.11.** (4 Punkte)

- a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \longmapsto (x + y^2, xy, \exp x),$$

in jedem Punkt.

- b) Was ist das totale Differential im Punkt  $(3, 2)$ ?  
 c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung  $(-1, -7)$ .  
 d) Berechne den Wert von  $\varphi$  in diesem Punkt.

**Aufgabe 46.12.** (4 Punkte)

Bestimme das totale Differential der Determinante

$$\det: \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, M \longmapsto \det M,$$

für  $n = 2, 3$  an der Einheitsmatrix.

**Aufgabe 46.13.** (5 Punkte)

Untersuche die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{bei } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{bei } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

auf partielle Ableitungen und totale Differenzierbarkeit.

**Aufgabe 46.14.** (3 Punkte)

Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass  $\varphi$  genau dann eine Verschiebung ist, also von der Art  $P \mapsto P + v$  mit einem festen Vektor  $v \in V$ , wenn

$$(D\varphi)_P = \text{Id}_V$$

ist für alle  $P \in V$ .

**Aufgabe 46.15.** (5 Punkte)

Sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xf(y),$$

genau dann im Punkt  $(0, 0)$  total differenzierbar ist, wenn  $f$  in 0 stetig ist.

**Aufgabe 46.16.** (4 Punkte)

Seien  $f_1, \dots, f_n$  stetig differenzierbare Funktionen in einer Variablen. Bestimme das totale Differential der Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)).$$

**Zusatzaufgabe zur Fußball-EM**

Die folgende Aufgabe kann bis zum Ende der EM abgegeben werden. Die zu erreichende Punktezahl ist gleich der Anzahl der Tore, die Deutschland bei dem Turnier (in den regulären Spielzeiten) schießt.

**Aufgabe 46.17.** Beweise die folgende Aussage:

Zu Beginn eines Fußballspiels liegt der Fußball auf dem Anstoßpunkt. Wenn ein Tor erzielt wird, so wird der Ball wieder auf den Anstoßpunkt zurückgesetzt. In dieser Situation gilt: Es gibt mindestens zwei (gegenüber liegende) Punkte auf dem Fußball (seiner Oberfläche), die beim Neuanstoß genau dort liegen, wo sie am Spielanstoß lagen. Die Gesamtbewegung des Balles lässt sich durch eine Achsendrehung realisieren.

#### 47. VORLESUNG - DIE KETTENREGEL

Die Eleganz des totalen Differentials wird in der folgenden allgemeinen Version der Kettenregel deutlich. Sie besagt, dass bei einer Verknüpfung von differenzierbaren Abbildungen das totale Differential (also die lineare Approximation) gleich der Verknüpfung der einzelnen totalen Differentiale ist. Der Beweis verwendet an einer Stelle, dass eine lineare Abbildung

$$L: V \longrightarrow W$$

zwischen euklidischen Räumen auf der abgeschlossenen Einheitskugel  $B(0, 1)$  beschränkt ist, d.h. dass es ein  $b \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$\|L(v)\| \leq b$$

für alle  $v$  mit  $\|v\| \leq 1$ . Diese Aussage gilt sogar für jede stetige Abbildung, werden wir hier aber nur für eine lineare Abbildung beweisen: Dazu wählen wir eine Orthonormalbasis  $v_1, \dots, v_n$  von  $V$ . Sei  $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$  aus  $B(0, 1)$ . Wegen

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq 1$$

ist

$$|a_i| \leq 1.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \|L(v)\| &= \left\| L \left( \sum_{i=1}^n a_i v_i \right) \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n a_i L(v_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i| \|L(v_i)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|L(v_i)\|, \end{aligned}$$

das heißt, dass die Beschränktheit mit

$$b := \sum_{i=1}^n \|L(v_i)\|$$



gilt.

**Satz 47.1.** *Seien  $V, W$  und  $U$  endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorräume,  $G \subseteq V$  und  $D \subseteq W$  offene Mengen, und  $\varphi: G \rightarrow W$  und  $\psi: D \rightarrow U$  Abbildungen derart, dass  $\varphi(G) \subseteq D$  gilt. Es sei weiter angenommen, dass  $\varphi$  in  $P \in G$  und  $\psi$  in  $\varphi(P) \in D$  total differenzierbar ist. Dann ist  $\psi \circ \varphi: G \rightarrow U$  in  $P$  differenzierbar mit dem totalen Differential*

$$(D(\psi \circ \varphi))_P = (D\psi)_{\varphi(P)} \circ (D\varphi)_P.$$

*Beweis.* Wir haben nach Voraussetzung (wobei wir  $Q := \varphi(P)$  setzen)

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + \|v\| r(v)$$

und

$$\psi(Q + w) = \psi(Q) + M(w) + \|w\| s(w)$$

mit linearen Abbildungen  $L: V \rightarrow W$  und  $M: W \rightarrow U$ , und mit in 0 stetigen Funktionen  $r: U(0, \delta) \rightarrow W$  und  $s: U(0, \delta') \rightarrow U$  (beachte, dass  $U(P, \delta) \subseteq V$  und  $U(Q, \delta') \subseteq W$  gilt), die beide in 0 den Wert 0 annehmen. Damit gilt

$$\begin{aligned} & (\psi \circ \varphi)(P + v) \\ &= \psi(\varphi(P + v)) \\ &= \psi(\varphi(P) + L(v) + \|v\| r(v)) \\ &= \psi(\varphi(P)) + M(L(v) + \|v\| r(v)) \\ &\quad + \|L(v) + \|v\| r(v)\| s(L(v) + \|v\| r(v)) \\ &= \psi(\varphi(P)) + M(L(v)) + M(\|v\| r(v)) \\ &\quad + \|L(v) + \|v\| r(v)\| s(L(v) + \|v\| r(v)) \\ &= \psi(\varphi(P)) + (M \circ L)(v) + \|v\| M(r(v)) \\ &\quad + \| \|v\| L\left(\frac{v}{\|v\|}\right) + \|v\| r(v)\| s(L(v) + \|v\| r(v)) \\ &= \psi(\varphi(P)) + (M \circ L)(v) \\ &\quad + \|v\| \left( M(r(v)) + \|L\left(\frac{v}{\|v\|}\right) + r(v)\| s(L(v) + r(v)) \right). \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der dritten Gleichung die lineare Approximation für  $w = L(v) + \|v\| r(v)$  eingesetzt. Die beiden letzten Gleichungen gelten nur für  $v \neq 0$ . Der Ausdruck

$$t(v) := M(r(v)) + \|L\left(\frac{v}{\|v\|}\right) + r(v)\| s(L(v) + r(v))$$

ist unser Kandidat für die Abweichungsfunktion. Der erste Summand  $M(r(v))$  ist in  $v = 0$  stetig und hat dort auch den Wert 0. Es genügt also den zweiten Summanden zu betrachten. Der  $\| - \|$ -Ausdruck ist in einer Umgebung der Null beschränkt, da  $L$  auf der kompakten Einheitskugel beschränkt ist und da  $r$  in 0 stetig ist. Daher hängt die Stetigkeit nur von dem rechten Faktor ab. Aber  $L(v) + r(v)$  hat für  $v \rightarrow 0$  den Grenzwert 0. Damit ist auch  $s(L(v) + r(v))$  in 0 stetig und hat dort den Grenzwert 0.  $\square$

**Korollar 47.2.** *Es seien  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $D \subseteq \mathbb{R}^m$  offene Mengen, und  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $g: D \rightarrow \mathbb{R}^k$  seien Abbildungen derart, dass  $f(G) \subseteq D$  gilt. Es sei weiter angenommen, dass  $f$  in  $P \in G$  und  $g$  in  $f(P) \in D$  total differenzierbar ist. Dann ist  $h = g \circ f: G \rightarrow U$  in  $P$  differenzierbar und zwischen den Jacobi-Matrizen gilt die Beziehung*

$$\text{Jak}(h)_P = \text{Jak}(g \circ f)_P = \text{Jak}(g)_{f(P)} \circ \text{Jak}(f)_P,$$

also ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial h_k}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(P)) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(P)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(f(P)) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(f(P)) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}.$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 47.1 unter Berücksichtigung von Bemerkung 46.9.  $\square$

Bei der vorstehenden Aussage kann man mit Satz 46.10 häufig direkt auf die totale Differenzierbarkeit schließen.

**Beispiel 47.3.** Wir wollen die Kettenregel an Hand der beiden Abbildungen

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (u, v, w) \longmapsto (uv^3w^2, u^2 - v^2w)$$

und

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \longmapsto (xy - y^2, \cos x, x - y)$$

illustrieren. Diese Abbildungen sind stetig partiell differenzierbar und daher auch total differenzierbar. Die Jacobi-Matrizen zu diesen Abbildungen (in einem beliebigen Punkt  $P = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$  bzw.  $Q = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ) sind

$$\text{Jak}(f)_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial w}(P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial w}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^3w^2 & 3uv^2w^2 & 2uv^3w \\ 2u & -2vw & -v^2 \end{pmatrix}$$

und

$$\text{Jak}(g)_Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(Q) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(Q) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(Q) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(Q) \\ \frac{\partial g_3}{\partial x}(Q) & \frac{\partial g_3}{\partial y}(Q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x - 2y \\ -\sin x & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die zusammengesetzte Abbildung  $g \circ f$  ist

$$\begin{aligned} g(f(u, v, w)) &= (uv^3w^2(u^2 - v^2w) - (u^2 - v^2w)^2, \cos(uv^3w^2), uv^3w^2 - u^2 + v^2w) \\ &= (u^3v^3w^2 - uv^5w^3 - u^4 - v^4w^2 + 2u^2v^2w, \cos(uv^3w^2), uv^3w^2 - u^2 + v^2w), \end{aligned}$$

die zugehörige Jacobi-Matrix in  $P = (u, v, w)$  ist

$$\text{Jak}(g \circ f)_P = \begin{pmatrix} 3u^2v^3w^2 - v^5w^3 - 4u^3 + 4u^2w3u^3v^2w^2 - 5uv^4w^3 - 4v^3w^2 + 4u^2vw2u^3v^3w - 3uv^5w^2 - 2v^4w + 2u^2v^2 \\ -v^3w^2 \sin(uv^3w^2) & -3uv^2w^2 \sin(uv^3w^2) & -2uv^3w \sin(uv^3w^2) \\ v^3w^2 - 2u & 3uv^2w^2 + 2vw & 2uv^3w + v^2 \end{pmatrix}.$$

Die zusammengesetzte lineare Abbildung ist

$$\begin{aligned} & \text{Jak}(g)_{f(P)} \circ \text{Jak}(f)_P \\ &= \text{Jak}(g)_{(uv^3w^2, u^2 - v^2w)} \circ \text{Jak}(f)_P \\ &= \begin{pmatrix} u^2 - v^2w & uv^3w^2 - 2u^2 + 2v^2w \\ -\sin(uv^3w^2) & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} v^3w^2 & 3uv^2w^2 & 2uv^3w \\ 2u & -2vw & -v^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3u^2v^3w^2 - 5w^3 - 4u^3 + 4uv^2w & 3u^3v^2w^2 - 5uv^4w^3 - 4v^3w^2 + 4u^2vw & 2u^3v^3w - 3uv^5w^2 - 2v^4w + 2u^2v^2 \\ -v^3w^2 \sin(uv^3w^2) & -3uv^2w^2 \sin(uv^3w^2) & -2uv^3w \sin(uv^3w^2) \\ v^3w^2 - 2u & 3uv^2w^2 + 2vw & 2uv^3w + v^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 47.4.** Es sei  $I$  ein reelles Intervall,  $V$  und  $W$  seien euklidische Vektorräume und es sei

$$\gamma: I \longrightarrow V$$

eine differenzierbare Kurve. Es sei

$$L: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. In Lemma 34.10 wurde gezeigt, dass die zusammengesetzte Abbildung

$$L \circ \gamma: I \longrightarrow W, t \longmapsto L(\gamma(t)),$$

(ebenfalls differenzierbar ist) und dass die Beziehung

$$(L \circ \gamma)'(t) = L(\gamma'(t))$$

besteht. Hier erhält man also den Richtungsvektor der zusammengesetzten Kurve, indem man den Richtungsvektor der Kurve in die lineare Abbildung einsetzt. Dies ist ein Spezialfall der Kettenregel angewendet auf  $\gamma$  und  $L$ . Es ist  $(DL)_P = L$  nach Proposition 46.4 und es ist  $(D\gamma)_t$  die lineare Abbildung von  $\mathbb{R}$  nach  $V$ , die 1 auf den Richtungsvektor  $\gamma'(t)$  schickt. Gemäß der Kettenregel ist das totale Differential der zusammengesetzten Kurve  $L \circ \gamma$  gleich

$$(DL)_{\gamma(t)} \circ (D\gamma)_t = L \circ (D\gamma)_t = L \circ (1 \mapsto \gamma'(t)).$$

Dies ist die lineare Abbildung von  $\mathbb{R}$  nach  $W$ , die 1 auf  $L(\gamma'(t))$  schickt.

**Bemerkung 47.5.** Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume,  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge und

$$f: G \longrightarrow W$$

eine in  $P \in G$  total differenzierbare Abbildung. Es sei  $v \in V$  ein Vektor und

$$\gamma: I \longrightarrow G, t \longmapsto P + tv,$$

die zugehörige affin-lineare Abbildung durch diesen Punkt (dabei sei das reelle Intervall  $I = [-a, a]$  so gewählt, dass  $\gamma(I) \subseteq G$ ) liegt. Die zusammengesetzte Abbildung

$$I \longrightarrow W, t \longmapsto f(\gamma(t)),$$

wird zur Definition der Richtungsableitung von  $f$  in  $P$  in Richtung  $v$  verwendet, es ist

$$(D_v f)(P) = (f \circ \gamma)'(0).$$

Das zur Kurve  $f \circ \gamma$  gehörige totale Differential in 0 von  $\mathbb{R}$  nach  $W$ , also  $(D(f \circ \gamma))_0$ , ist durch  $1 \mapsto (f \circ \gamma)'(0)$  festgelegt. Andererseits ist nach der Kettenregel

$$(D(f \circ \gamma))_0 = (Df)_{\gamma(0)} \circ (D\gamma)_0$$

und somit ist

$$\begin{aligned} (D_v f)(P) &= (f \circ \gamma)'(0) \\ &= (D(f \circ \gamma))_0(1) \\ &= ((Df)_{\gamma(0)} \circ (D\gamma)_0)(1) \\ &= (Df)_{\gamma(0)}((D\gamma)_0(1)) \\ &= (Df)_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) \\ &= (Df)_{\gamma(0)}(v). \end{aligned}$$

Dies ergibt einen neuen Beweis für Proposition 46.8.

Das folgende Beispiel illustriert, dass das totale Differential unabhängig von der Wahl einer Basis ist, die partiellen Ableitungen aber nicht.

**Beispiel 47.6.** Wir betrachten die Abbildung  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$(x, y, z) \mapsto 2xy^2 + x^2z^3 + z^2$$

gegeben sei. Es ist leicht die partiellen Ableitungen in jedem Punkt zu berechnen, nämlich:

$$(\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z)_{(x,y,z)} = (2y^2 + 2xz^3, 4xy, 3x^2z^2 + 2z).$$

Da diese alle stetig sind, haben wir nach Satz 46.10 das totale Differential in jedem Punkt gefunden.

Nehmen wir nun an, dass wir nur an der Restriktion dieser Funktion auf die Ebene

$$E \subset \mathbb{R}^3, E = \{(x, y, z) \mid 3x + 2y - 5z = 0\}$$

interessiert sind.  $E$  ist also der Kern der linearen Abbildung

$$L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 3x + 2y - 5z.$$

Als Kern ist  $E$  selbst ein (zweidimensionaler) Vektorraum. Die Einschränkung von  $f$  auf die Ebene ergibt also die Abbildung

$$\tilde{f} = f|_E: E \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Diese Abbildung kann man als die Komposition  $E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  auffassen und diese ist nach der Kettenregel differenzierbar. Wenn wir die Inklusion von  $E$  in  $\mathbb{R}^3$  mit  $N$  bezeichnen, so ist das totale Differential der Komposition in einem Punkt  $P \in E$  gemäß der Kettenregel gerade die Abbildung

$$(D\tilde{f})_P = (Df)_P \circ N: E \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Daher macht es hier Sinn vom totalen Differential zu sprechen.

Es macht allerdings keinen Sinn von partiellen Ableitungen der Abbildung  $f|_E: E \rightarrow \mathbb{R}$  zu sprechen, da es keine natürliche Basis auf  $E$  gibt und daher auch keine natürlichen Koordinaten. Es ist leicht eine Basis von  $E$  zu finden

und damit Koordinaten, es gibt aber keine „beste Wahl“, und die partiellen Ableitungen sehen in jeder Basis verschieden aus.

Eine Basis von  $E$  ist beispielsweise durch  $v_1 = (0, 5, 2)$  und  $v_2 = (5, 0, 3)$  gegeben, und eine weitere durch  $w_1 = (1, 1, 1)$  und  $w_2 = (2, -3, 0)$ . Mit solchen Basen erhalten wir Identifikationen  $\mathbb{R}^2 \rightarrow E$  und somit eine numerische Beschreibung der Abbildung  $\mathbb{R}^2 \cong E \rightarrow \mathbb{R}$ , womit wir die partiellen Ableitungen bezüglich der gewählten Basen berechnen können.

In der ersten Basis ist die Identifikation gegeben durch die Abbildung

$$(s, t) \mapsto sv_1 + tv_2 = s(0, 5, 2) + t(5, 0, 3) = (5t, 5s, 2s + 3t)$$

und dieser Ausdruck wird durch  $f$  abgebildet auf

$$\begin{aligned} & 2(5t)(5s)^2 + (5t)^2(2s + 3t)^3 + (2s + 3t)^2 \\ = & 250ts^2 + 25t^2(8s^3 + 36s^2t + 54st^2 + 27t^3) + 4s^2 + 9t^2 + 12st \\ = & 250ts^2 + 200s^3t^2 + 900s^2t^3 + 1350st^4 + 675t^5 + 4s^2 + 9t^2 + 12st. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen dieser Komposition (nennen wir sie  $g$ ) bezüglich dieser Basis sind gegeben durch

$$\partial g / \partial s = 500ts + 600s^2t^2 + 1800st^3 + 1350t^4 + 8s + 12t$$

und

$$\partial g / \partial t = 250s^2 + 400s^3t + 2700s^2t^2 + 5400st^3 + 3375t^4 + 18t + 12s.$$

In der zweiten Basis  $w_1 = (1, 1, 1)$  und  $w_2 = (2, -3, 0)$  ist die Identifikation gegeben durch

$$(r, u) \mapsto rw_1 + uw_2 = r(1, 1, 1) + u(2, -3, 0) = (r + 2u, r - 3u, r)$$

und dieser Ausdruck wird unter  $f$  abgebildet auf

$$\begin{aligned} & 2(r + 2u)(r - 3u)^2 + (r + 2u)^2r^3 + r^2 \\ = & 2r^3 + 4r^2u - 12r^2u - 24ru^2 + 18ru^2 + 36u^3 + r^5 + 4r^4u + 4r^3u^2 + r^2 \\ = & 2r^3 - 8r^2u - 6ru^2 + 36u^3 + r^5 + 4r^4u + 4r^3u^2 + r^2. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen der Komposition (nennen wir sie  $h$ ) bezüglich dieser Basis sind

$$\partial h / \partial r = 6r^2 - 16ru - 6u^2 + 5r^4 + 16r^3u + 12r^2u^2 + 2r$$

und

$$\partial h / \partial u = -8r^2 - 12ru + 108u^2 + 4r^4 + 8r^3u.$$

Fazit: Koordinaten sind gut für Berechnungen aber schlecht für die Mathematik.

## 47. ARBEITSBLATT

**AufwärmAufgaben**

**Aufgabe 47.1.** Leite aus der allgemeinen Kettenregel die Kettenregel für Funktionen in einer Variablen ab.

**Aufgabe 47.2.** Leite aus der allgemeinen Kettenregel die Kettenregel für differenzierbare Kurven (für eine differenzierbare Kurve  $f: J \rightarrow V$  und eine differenzierbare Umparametrisierung  $h: I \rightarrow J$ ) ab.

**Aufgabe 47.3.** Bestätige die Kettenregel anhand der beiden Abbildungen

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \longmapsto (u^2v^2, u + \sin v, v^3),$$

und

$$\psi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (x^2y - z^2, xy^2 + yz \exp x),$$

und ihrer Komposition  $\psi \circ \varphi$  in folgenden Schritten.

- (1) Berechne für einen beliebigen Punkt  $P \in \mathbb{R}^2$  das Differential  $(D\varphi)_P$  mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
- (2) Berechne für einen beliebigen Punkt  $Q \in \mathbb{R}^3$  das Differential  $(D\psi)_Q$  mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
- (3) Berechne explizit die Komposition  $\psi \circ \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .
- (4) Berechne direkt mit partiellen Ableitungen in einem Punkt  $P \in \mathbb{R}^2$  das Differential von  $\psi \circ \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .
- (5) Berechne das Differential von  $\psi \circ \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  in einem Punkt  $P \in \mathbb{R}^2$  mit Hilfe der Kettenregel und den Teilen (1) und (2).

**Aufgabe 47.4.** Es seien  $G \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Mengen, und  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $g: D \rightarrow \mathbb{R}^k$  Abbildungen derart, dass  $f(G) \subseteq D$  gilt. Es sei weiter angenommen, dass  $f$  in  $P \in G$  und  $g$  in  $f(P) \in D$  total differenzierbar ist. Zeige

$$\frac{\partial(g \circ f)_j}{\partial x_i}(P) = \left( \frac{\partial g_j}{\partial y_1}(f(P)), \dots, \frac{\partial g_j}{\partial y_m}(f(P)) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 47.5.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall und seien

$$f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Beweise die Produktregel aus der allgemeinen Kettenregel unter Verwendung von Aufgabe 46.3.

**Aufgabe 47.6.** Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume und

$$f, g: G \longrightarrow W$$

seien Abbildungen auf einer offenen Menge  $G \subseteq V$ , die in Richtung  $v \in V$  differenzierbar seien. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$h: G \longrightarrow \mathbb{R}, P \longmapsto \langle f(P), g(P) \rangle,$$

in Richtung  $v \in V$  differenzierbar ist, und dass

$$(D_v h)(P) = \langle f(P), (D_v g)(P) \rangle + \langle (D_v f)(P), g(P) \rangle$$

gilt.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 47.7.** (5 Punkte)

Wir wollen die Kettenregel anhand der beiden Abbildungen

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \longmapsto (uv, u - v, v^2),$$

und

$$\psi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (xyz^2, y \exp(xz)),$$

und ihrer Komposition  $\psi \circ \varphi$  veranschaulichen.

- (1) Berechne für einen beliebigen Punkt  $P \in \mathbb{R}^2$  das Differential  $(D\varphi)_P$  mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
- (2) Berechne für einen beliebigen Punkt  $Q \in \mathbb{R}^3$  das Differential  $(D\psi)_Q$  mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
- (3) Berechne explizit die Komposition  $\psi \circ \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .
- (4) Berechne direkt mit partiellen Ableitungen in einem Punkt  $P \in \mathbb{R}^2$  das Differential von  $\psi \circ \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .
- (5) Berechne das Differential von  $\psi \circ \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  in einem Punkt  $P \in \mathbb{R}^2$  mit Hilfe der Kettenregel und den Teilen (1) und (2).

**Aufgabe 47.8.** (8 Punkte)

Wir betrachten die Funktionen

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2$$

mit

$$f(u, v) = (u^2, uv, u - v^2),$$

$$g(x, y, z) = (x + y^2 - z, x^2 yz),$$

und

$$h(r, s) = (r^2 s, s^2).$$

Berechne das totale Differential von  $h \circ g \circ f$  in einem beliebigen Punkt  $P = (u, v)$  auf vier verschiedene Arten.

**Aufgabe 47.9.** (4 Punkte)

Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$$

eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, P \longmapsto \|f(P)\|,$$

differenzierbar ist und bestimme das totale Differential davon.

**Aufgabe 47.10.** (5 Punkte)

Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge. Weiter seien  $f, g: G \rightarrow \mathbb{R}$  zwei in  $P \in G$  differenzierbare Funktionen. Wende die Kettenregel und Aufgabe 46.3 auf das Diagramm

$$G \xrightarrow{f,g} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{mult}} \mathbb{R}$$

an, um zu zeigen, dass die Gleichung

$$(D(f \cdot g))_P = g(P) \cdot (Df)_P + f(P) \cdot (Dg)_P$$

gilt.

#### 48. VORLESUNG - TAYLOR-FORMEL

Wir betrachten die Polynomfunktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 2x^3 - 5x^2y - 3y^3 - 4x^2 + 6xy + 7x + 8y - 1.$$

Offenbar ist  $f(0, 0) = -1$ , d.h. der Wert der Funktion ist unmittelbar am konstanten Koeffizienten des Polynoms ablesbar. Ähnliches gilt für die Ableitungen an der Stelle  $(0, 0)$ : Um beispielsweise  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  auszurechnen, muss man lediglich den Term  $7x$  anschauen. Alle anderen Summanden ergeben unter der partiellen Ableitung nach  $x$  direkt 0 (wenn  $x$  gar nicht vorkommt) oder einen Ausdruck der Form  $iax^{i-1}y^j$ . Da man darin  $x = 0$  und  $y = 0$  einsetzt, ergibt sich immer 0, mit der Ausnahme  $i = 1$  und  $j = 0$ . Somit ist  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 7$ .

Die höheren Ableitungen sind ebenfalls „direkt“ aus den Koeffizienten ablesbar. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) &= 2 \cdot (-4) = -8, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) &= 6, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) &= 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12, \end{aligned}$$



$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = 2 \cdot (-5) = -10.$$

### Die Taylor-Formel - Vorbereitungen

Die Taylor-Formel in einer Variablen, die wir im ersten Semester kennengelernt haben, liefert zu einem Punkt und einer gewünschten Ordnung eine optimale Approximation in diesem Punkt einer (hinreichend oft differenzierbaren) Funktion durch ein Polynom, das Taylor-Polynom. Eine entsprechende Aussage gilt auch in mehreren Variablen. Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen.

Zu einem Monom  $x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}$  nennt man die Summe

$$|r| := |(r_1, \dots, r_n)| := \sum_{j=1}^n r_j$$

den *Grad* des Monoms. Ein Polynom in  $n$  Variablen,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n} a_{(r_1, \dots, r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}$$

(wobei die Summe endlich ist) lässt sich entlang des Grades der beteiligten Monome anordnen, also

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{d=0}^e \left( \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n, |r|=d} a_{(r_1, \dots, r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \right).$$

Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  kann man dies auch schreiben als

$$f(x_1, \dots, x_n) = T_k(x_1, \dots, x_n) + R_k(x_1, \dots, x_n)$$

mit  $(x = (x_1, \dots, x_n))$

$$T_k(x) = \sum_{d=0}^k \left( \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n, |r|=d} a_{(r_1, \dots, r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \right)$$

und

$$R_k(x) = \sum_{d=k+1}^e \left( \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n, |r|=d} a_{(r_1, \dots, r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \right).$$

Für  $R_k$  gilt dabei

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|R_k(x)\|}{\|x\|^k} = 0.$$

Bei  $k = 1$  ist

$$T_1(x) = a_{(0, \dots, 0)} + a_{(1, 0, \dots, 0)} x_1 + \dots + a_{(0, \dots, 0, 1)} x_n$$

die affin-lineare Approximation von  $f$  im Punkt  $0 = (0, \dots, 0)$ , und dabei gilt für die Abweichung in der linearen Approximation die Beziehung

$r(x) = \frac{R_1(x)}{|x|}$ . Im Allgemeinen liefern die Polynome  $T_k(x)$  bessere Approximationen im Nullpunkt als die lineare Approximation, und mit  $R_k(x)$  kann man die Abweichung kontrollieren. Entscheidend für uns ist, dass man nicht nur für Polynomfunktionen, sondern generell für hinreichend oft differenzierbare Funktionen  $f$  approximierende Polynome finden und die Abweichung gut kontrollieren kann. Dies ist der Inhalt der *Taylor-Formel für Funktionen in mehreren Variablen*.

Zu einem Vektor  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  und einem Tupel  $r = (r_1, \dots, r_n)$  aus natürlichen Zahlen setzt man abkürzend

$$x^r := x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}.$$

Entsprechend schreibt man für eine Polynomfunktion abkürzend

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n} a_{(r_1, \dots, r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} = \sum_{r \in \mathbb{N}^n} a_r x^r.$$

Die gleiche Abkürzungsphilosophie übernimmt man für Richtungsableitungen. Wenn  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist mit einer Basis  $w_1, \dots, w_n$ , so setzt man  $D_i := D_{w_i}$ , und für  $r = (r_1, \dots, r_n)$  setzt man

$$D^r := D_1^{r_1} \circ D_2^{r_2} \circ \cdots \circ D_n^{r_n}.$$

Diese Bezeichnung verwendet man insbesondere im  $\mathbb{R}^n$ , versehen mit der Standardbasis und den partiellen Ableitungen. Man beachte, dass man aufgrund des Satzes von Schwarz unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen sämtliche Reihenfolgen von Richtungsableitungen in dieser Weise ausdrücken kann. Des weiteren definieren wir für ein Tupel  $r = (r_1, \dots, r_n)$  die *Fakultät* durch

$$r! := r_1! \cdots r_n!$$

und für  $m = (m_1, \dots, m_k)$  mit  $\sum_{j=1}^k m_j = n$  die *Polynomialkoeffizienten* durch

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!} = \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_k!}.$$

Bevor wir die Taylor-Formel beweisen, die das lokale Verhalten einer Funktion in einer „kleinen“ offenen Umgebung eines Punktes beschreibt, wenden wir uns dem lokalen Verhalten in dem Punkt längs einer fixierten Richtung zu, wofür wir die Taylor-Formel in einer Variablen zur Verfügung haben. Zu einer Funktion ( $G \subseteq V$ ,  $V$  euklidischer Vektorraum)

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist die Differenzierbarkeit im Punkt  $P \in G$  in Richtung  $v \in V$  äquivalent zur Differenzierbarkeit der Funktion

$$h: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

für  $t = 0$ , wobei  $I$  ein geeignetes reelles Intervall ist. Wir werden zunächst zeigen, dass eine entsprechende Beziehung auch für höhere Ableitungen gilt.

**Satz 48.1.** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine  $k$ -mal stetig differenzierbare Funktion,  $P \in G$  ein Punkt und  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  eine fixierte Richtung. Es sei

$$h: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

wobei  $I$  ein offenes Intervall um 0 sei mit  $P + tv \in G$  für alle  $t \in I$ . Dann ist  $h$  ebenfalls  $k$ -mal stetig differenzierbar, und es gilt

$$h^{(k)}(t) = \sum_{|r|=k} \frac{k!}{r!} D^r f(P + tv) \cdot v^r$$

für alle  $t \in I$ .

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

**Definition 48.2.** Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge,

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine  $k$ -mal stetig-differenzierbare Funktion und  $P \in G$ . Dann heißt

$$\sum_{r=(r_1, \dots, r_n), |r| \leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r$$

das *Taylor-Polynom vom Grad*<sup>23</sup>  $\leq k$  zu  $f$  in  $P$ .

Es liegt also ein Polynom in den (verschobenen) Variablen  $v_1, \dots, v_n$  vor. Wenn  $P = (a_1, \dots, a_n)$  ist, so schreibt man meistens  $x_i - a_i$  statt  $v_i$ , wobei die  $x_i$  die Standardkoordinaten des  $\mathbb{R}^n$  bezeichnen. Man spricht auch vom *Taylor-Polynom der Ordnung*  $k$  oder einfach vom  $k$ -ten Taylor-Polynom.

Das 0-te Taylor-Polynom ist das konstante Polynom, das durch den Funktionswert  $f(P)$  gegeben ist, das 1-te Taylor-Polynom ist die lineare Approximation von  $f$  in  $P$  und das 2-te Taylor-Polynom ist die *quadratische Approximation* von  $f$  in  $P$ .

**Bemerkung 48.3.** Ein Polynom  $f$  vom Grad  $\leq k$  stimmt mit seinem Taylor-Polynom vom Grad  $\geq k$  im Nullpunkt  $0 = (0, \dots, 0)$  überein. Wegen der Additivität der Richtungsableitungen muss man dies nur für  $f = ax_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$  überprüfen. Es ist aber

$$D^r f(0) = D_1^{r_1} \cdots D_n^{r_n} f(0) = (r_1!) \cdots (r_n!) a = r! a$$

und

$$D^s f(0) = 0$$

für jedes  $n$ -Tupel  $s = (s_1, \dots, s_n) \neq r$ .

<sup>23</sup>Die etwas sperrige Formulierung „vom Grad  $\leq k$ “ ist dem Umstand geschuldet, dass die  $k$ -ten Ableitungen alle 0 sein können. In diesem Fall hat das Taylor-Polynom einen Grad  $< k$ , enthält aber alle Informationen bis zum Grad  $k$ .

Wenn man zu einem Polynom  $f$  die Taylor-Polynome in einem Punkt  $P = (a_1, \dots, a_n)$  berechnen möchte, so kann man (neben der Berechnung der Ableitungen) auch folgendermaßen vorgehen: Man schreibt das Polynom  $f$  in den Variablen  $y_i = x_i - a_i$ . Dazu ersetzt man in  $f$  die Variablen  $x_i$  durch

$$x_i = x_i - a_i + a_i = y_i + a_i$$

und rechnet dies aus, bis ein Polynom in  $y_i$  dasteht. Aus diesem Polynom sind die Taylor-Polynome im Entwicklungspunkt  $P$  direkt ablesbar.

**Beispiel 48.4.** Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto e^y \sin x - 3xy$$

und wollen die Taylor-Polynome bis zur Ordnung 3 dazu im Nullpunkt berechnen. Das Taylor-Polynom der Ordnung 0 ist das konstante Nullpolynom, da  $f(0, 0) = 0$  ist. Für das Taylor-Polynom der Ordnung 1 müssen wir die beiden partiellen Ableitungen ausrechnen. Diese sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \cos x - 3y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^y \sin x - 3x$$

mit den Werten 1 und 0. Daher ist

$$x$$

die lineare Approximation zu  $f$ , also das Taylor-Polynom der Ordnung 1. Für das Taylor-Polynom der Ordnung 2 berechnen wir die zweiten Ableitungen, diese sind

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -e^y \sin x ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = e^y \cos x - 3$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = e^y \sin x .$$

Die Werte dieser zweiten partiellen Ableitungen sind  $0, -2, 0$ , sodass das zweite Taylor-Polynom (also die quadratische Approximation) gleich

$$x - 2xy$$

ist. Für das Taylor-Polynom der Ordnung 3 berechnen wir die dritten Ableitungen, diese sind

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -e^y \cos x ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -e^y \sin x ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = e^y \cos x ,$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = e^y \sin x .$$

Die Werte dieser dritten partiellen Ableitungen sind  $-1, 0, 1, 0$ , sodass (wegen  $(3, 0)! = 6$  und  $(1, 2)! = 2$ ) das dritte Taylor-Polynom gleich

$$x - 2xy - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}xy^2$$

ist.

**Satz 48.5.** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine  $(k+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion,  $P \in G$  ein Punkt und  $v \in \mathbb{R}^n$  derart, dass die Strecke von  $P$  nach  $P + v$  ganz in  $G$  liegt. Dann gibt es ein  $c \in [0, 1]$  mit

$$f(P + v) = \sum_{|r| \leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + \sum_{|r|=k+1} \frac{1}{r!} D^r f(P + cv) \cdot v^r.$$

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt.  $\square$

### Die Taylor-Formel

**Satz 48.6.** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine  $k$ -mal stetig differenzierbare Funktion,  $P \in G$  ein Punkt und  $\epsilon > 0$  derart, dass  $U(P, \epsilon) \subseteq G$  ist. Dann gilt für alle  $v$  mit  $P + v \in U(P, \epsilon)$  die Beziehung

$$f(P + v) = \sum_{|r| \leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + R_k(v),$$

wobei

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|R_k(v)\|}{\|v\|^k} = 0$$

ist.

*Beweis.* Nach Satz 48.5 gibt es zu jedem  $v \in U(0, \epsilon)$  ein (von  $v$  abhängiges)  $c \in [0, 1]$  mit

$$\begin{aligned} f(P + v) &= \sum_{|r| \leq k-1} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} D^r f(P + cv) \cdot v^r \\ &= \sum_{|r| \leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} (D^r f(P + cv) - D^r f(P)) v^r. \end{aligned}$$

Die rechte Summe ist also die Abweichungsfunktion  $R_k$ , die wir abschätzen müssen. Wegen

$$\begin{aligned} \|R_k(v)\| &\leq \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} \|D^r f(P + cv) - D^r f(P)\| \cdot \|v^r\| \\ &= \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} \|D^r f(P + cv) - D^r f(P)\| \cdot |v_1^{r_1}| \cdots |v_n^{r_n}| \\ &\leq \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} \|D^r f(P + cv) - D^r f(P)\| \cdot \|v\|^{r_1} \cdots \|v\|^{r_n} \\ &= \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} \|D^r f(P + cv) - D^r f(P)\| \cdot \|v\|^k \end{aligned}$$

ist

$$\frac{\|R_k(v)\|}{\|v\|^k} \leq \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} \|D^r f(P + cv) - D^r f(P)\|.$$

Da nach Voraussetzung die  $k$ -ten Richtungsableitungen stetig sind, existiert für jede einzelne Funktion  $D^r f(P + cv) - D^r f(P)$  der Limes für  $v \rightarrow 0$  und ist gleich 0. Daher gilt dies auch für die Summe rechts und damit auch für den Ausdruck links.  $\square$

## 48. ARBEITSBLATT

### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 48.1.** Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad  $\leq 3$  für die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y \cdot \sin x,$$

im Nullpunkt  $(0, 0)$ .

**Aufgabe 48.2.** Notiere das Taylor-Polynom für eine (hinreichend oft differenzierbare) Funktion in 2 oder 3 Variablen für die Grade  $k = 1, 2, 3$ .

**Aufgabe 48.3.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  offen,  $P \in G$  und seien

$$f, g: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeige durch ein Beispiel, dass das Taylor-Polynom zum Produkt  $fg$  im Punkt  $P$  vom Grad  $\leq 2$  nicht das Produkt der beiden Taylor-Polynome von  $f$  und  $g$  in  $P$  vom Grad  $\leq 1$  sein muss.

**Aufgabe 48.4.** a) Schreibe das Polynom

$$f = 3x^3 - 4x^2y + 2xy - x + 5y$$

als Polynom in den Variablen  $u = x - 2$  und  $v = y + 1$ .

b) Bestimme mit Teil a) die Taylor-Polynome von  $f$  im Entwicklungspunkt  $(2, -1)$ .

c) Berechne diese Taylor-Polynome über Ableitungen.

**Aufgabe 48.5.** Bestätige Satz 48.1 für  $f(x, y) = x^a y^b$  in  $(0, 0)$  und  $v = (2, 3)$  bis zur dritten Ableitung.

In den folgenden Aufgaben werden einige Eigenschaften der Polynomkoeffizienten besprochen, die eine Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten sind.

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $r = (r_1, \dots, r_n)$  ein  $n$ -Tupel natürlicher Zahlen. Es sei  $k := \sum_{j=1}^n r_j$ . Dann nennt man die Zahl

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r_1! r_2! \cdots r_n!}$$

einen *Polynomialkoeffizienten*.

**Aufgabe 48.6.** Zeige, dass die Anzahl der (geordneten) Partitionen zum Anzahltuplel  $r = (r_1, \dots, r_n)$  einer  $k$ -elementigen Menge gleich

$$\frac{k!}{r!} = \frac{k!}{r_1! \cdots r_n!}$$

ist.

**Aufgabe 48.7.** In einem Studium werden 11 Leistungsnachweise verlangt, und zwar 3 Seminarscheine, 5 Klausuren, 2 mündliche Prüfungen und eine Hausarbeit, die in beliebiger Reihenfolge erbracht werden können. Wieviele Reihenfolgen gibt es, um diese Leistungsnachweise zu erbringen?

**Aufgabe 48.8.** Es seien  $k, n \in \mathbb{N}$  und  $r = (r_1, \dots, r_n)$  mit  $\sum_{j=1}^n r_j =: k$ . Zeige, dass die Anzahl der  $k$ -Tupel

$$(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k,$$

in denen die Zahl  $i$  genau  $r_i$ -mal vorkommt, gleich

$$\frac{k!}{r!} = \frac{k!}{r_1! \cdots r_n!}$$

ist.

**Aufgabe 48.9.** Es seien  $k, n \in \mathbb{N}$  und  $r = (r_1, \dots, r_n)$  mit  $\sum_{j=1}^n r_j =: k$ . Zeige, dass die Anzahl der Abbildungen

$$\{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\},$$

bei denen das Urbild zu  $i \in \{1, \dots, n\}$  aus genau  $r_i$  Elementen besteht, gleich

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r_1! \cdots r_n!}$$

ist.

**Aufgabe 48.10.** Es seien  $a_1, \dots, a_n$  reelle Zahlen. Beweise den *Polynomial-  
satz*, das ist die Gleichung

$$(a_1 + \dots + a_n)^k = \sum_{r=(r_1, \dots, r_n), \sum_{i=1}^n r_i=k} \binom{k}{r} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_n^{r_n}.$$

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 48.11.** (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad  $\leq 3$  für die Funktion

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto z \cdot \exp(xy),$$

im Nullpunkt  $(0, 0, 0)$ .

**Aufgabe 48.12.** (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad  $\leq 4$  für die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \cos(x) \cdot \sin(y),$$

im Punkt  $(\pi, \pi/2)$ .

**Aufgabe 48.13.** (5 Punkte)

Es sei  $f$  ein Polynom in  $n$  Variablen vom Grad  $\leq k$ . Zeige, dass  $f$  mit dem Taylorpolynom vom Grad  $\leq k$  von  $f$  im Nullpunkt übereinstimmt.



**Aufgabe 48.14.** (5 Punkte)

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $P \in G$  ein Punkt und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Zeige, dass es maximal ein Polynom  $p(x_1, \dots, x_n)$  vom Grad  $\leq k$  mit der Eigenschaft geben kann, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|f(x) - p(x)\|}{\|x\|^k} = 0$$

gilt.

## 49. VORLESUNG - EXTREMA

Zu einer reellwertigen Funktion

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einer offenen Menge  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  interessieren wir uns, wie schon bei einem eindimensionalen Definitionsbereich, für die Extrema, also Maxima und Minima, der Funktion, und inwiefern man dies anhand der (höheren) Ableitungen (falls diese existieren) erkennen kann. Wir verallgemeinern zuerst die relevanten Definitionen auf die Situation, wo der Definitionsbereich ein beliebiger metrischer Raum ist.

**Definition 49.1.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass  $f$  in einem Punkt  $x \in M$  ein *lokales Maximum* besitzt, wenn es ein  $\epsilon > 0$  gibt derart, dass für alle  $x' \in M$  mit  $d(x, x') < \epsilon$  die Abschätzung

$$f(x) \geq f(x')$$

gilt. Man sagt, dass  $f$  in  $x \in M$  ein *lokales Minimum* besitzt, wenn es ein  $\epsilon > 0$  gibt derart, dass für alle  $x' \in M$  mit  $d(x, x') < \epsilon$  die Abschätzung

$$f(x) \leq f(x')$$

gilt.

**Definition 49.2.** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass  $f$  in einem Punkt  $x \in M$  ein *isoliertes lokales Maximum* besitzt, wenn es ein  $\epsilon > 0$  gibt derart, dass für alle  $x' \in M$  mit  $d(x, x') < \epsilon$  und  $x' \neq x$  die Abschätzung

$$f(x) > f(x')$$

gilt. Man sagt, dass  $f$  in  $x \in M$  ein *isoliertes lokales Minimum* besitzt, wenn es ein  $\epsilon > 0$  gibt derart, dass für alle  $x' \in M$  mit  $d(x, x') < \epsilon$  und  $x' \neq x$  die Abschätzung

$$f(x) < f(x')$$

gilt.

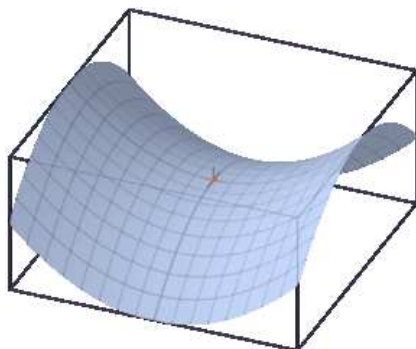
Ein *globales Maximum* liegt in  $x \in M$  vor, wenn  $f(x) \geq f(x')$  für alle  $x' \in M$  ist.

**Beispiel 49.3.** Die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2,$$

hat in  $P = (0, 0)$  den Wert 0 und überall sonst positive Werte, daher liegt in  $P$  ein (isoliertes) globales Minimum vor.

Wenn die Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  ein lokales Minimum im Punkt  $P \in M$  besitzt, so gilt dies auch für die Einschränkung von  $f$  auf jede Teilmenge  $N \subseteq M$ , die  $P$  enthält. Beispielsweise muss ein (lokales) Minimum einer Funktion der Ebene auch auf jeder Geraden durch diesen Punkt ein (lokales) Minimum sein.



Dies heißt umgekehrt, dass wenn eine Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Geraden  $L_1$  durch  $P$  ein isoliertes lokales Maximum und auf einer anderen Geraden  $L_2$  ein isoliertes lokales Minimum besitzt, dass dann kein lokales Extremum vorliegen kann. Solche Punkte nennt man *Sattelpunkt* oder *Passpunkt*, das Standardbeispiel ist das folgende.

**Beispiel 49.4.** Wir betrachten das Verhalten der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^2.$$

in  $P = (0, 0)$ . Die Einschränkung dieser Funktion auf der durch  $y = 0$  gegebenen Geraden (also auf der  $x$ -Achse) ist die Funktion  $x \mapsto x^2$ , die in  $P$  ein (isoliertes) globales Minimum besitzt. Die Einschränkung dieser Funktion auf der durch  $x = 0$  gegebenen Geraden (also auf der  $y$ -Achse) ist die Funktion  $y \mapsto -y^2$ , die in  $P$  ein (isoliertes) globales Maximum besitzt. Daher kann  $f$

in  $P$  kein Extremum besitzen. Auf den durch  $y = x$  und  $y = -x$  gegebenen Geraden ist die Funktion die Nullfunktion.

**Beispiel 49.5.** Wir betrachten im  $\mathbb{R}^2$  die beiden Kreise  $K_1$  und  $K_2$ , wobei  $K_1$  den Mittelpunkt  $(0, 1)$  und Radius 1 und  $K_2$  den Mittelpunkt  $(0, 2)$  und Radius 2 habe.  $K_1$  liegt innerhalb von  $K_2$ , und die beiden Kreise berühren sich in  $P = (0, 0)$ . Durch diese beiden Kreise wird die Ebene (neben den zwei Kreislinien selbst) in drei offene Gebiete aufgeteilt: Das Innere des Kreises  $K_1$  ( $= A$ ), die große offene Kreisscheibe ohne die kleine abgeschlossene Kreisscheibe ( $= B$ ) und das Äußere von  $K_2$  ( $= C$ ). Der innere Kreis  $K_1$  wird als Nullstelle der Funktion  $f_1(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 - 1$  beschrieben. Im Innern von  $K_1$  ist diese Funktion negativ, auf  $K_1$  hat sie den Wert 0 und außerhalb davon hat sie positive Werte. Entsprechendes gilt für  $K_2$  und die Funktion  $f_2(x, y) = x^2 + (y - 2)^2 - 4$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} f(x, y) &:= f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) \\ &= (x^2 + (y - 1)^2 - 1) \cdot (x^2 + (y - 2)^2 - 4) \\ &= (x^2 + y^2 - 2y) \cdot (x^2 + y^2 - 4y) \\ &= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 6y^3 - 6x^2y + 8y^2. \end{aligned}$$

Diese Funktion nimmt auf den beiden Kreisen den Wert 0 an, sie ist auf  $A$  positiv, auf  $B$  negativ und auf  $C$  wieder positiv.

Die Funktion  $f$  besitzt in  $P$  kein lokales Minimum, da sie dort den Wert 0 besitzt und da jede beliebig kleine Ballumgebung  $U(P, \epsilon)$  den Bereich  $B$  trifft, wo  $f$  negative Werte besitzt. Die Einschränkung der Funktion auf jede Gerade durch den Nullpunkt besitzt aber dort ein lokales Minimum. Sei dazu  $G$  eine solche Gerade. Wenn  $G$  die  $x$ -Achse ist, so verläuft diese Gerade (bis auf  $P$  selbst) in  $C$ , wo  $f$  nur positive Werte annimmt, sodass in  $P$  ein (sogar globales) Minimum vorliegt. Sei also  $G$  eine von der  $x$ -Achse verschiedene Gerade durch  $P$ . Die eine Hälfte der Geraden verläuft ganz in  $C$ , wo die Funktion positiv ist. Die andere Hälfte verläuft, ausgehend von  $P$ , zuerst in  $A$ , dann in  $B$  und schließlich in  $C$ . Da die Funktion auf  $A$  positiv ist, kann man ein Teilintervall  $[-\delta, \delta]$  der Gerade wählen derart, dass dieses Teilstück (abgesehen von  $P$ ) nur in  $A$  und  $C$  verläuft. Auf diesem Teilintervall nimmt die Funktion in  $P$  den Wert 0 und sonst überall positive Werte an. Daher besitzt die eingeschränkte Funktion ein lokales Minimum. Das dabei zu wählende  $\delta$  hängt natürlich wesentlich von der Steigung der Geraden ab, es gibt kein gemeinsames  $\delta$  für alle Geraden.

## Der Gradient

Wenn eine Funktion  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  total differenzierbar ist, so ist das totale Differential in einem Punkt eine lineare Abbildung von  $V$  nach  $\mathbb{R}$ . Für solche linearen Abbildungen gibt es einen eigenen Namen.

**Definition 49.6.** Sei  $K$  ein Körper und sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Eine lineare Abbildung

$$V \longrightarrow K$$

heißt auch eine *Linearform* auf  $V$ .

Wenn  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  ist, so bilden die partiellen Ableitungen von

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt  $P \in G$  eine Matrix mit einer einzigen Zeile, die bei stetigen partiellen Ableitungen das totale Differential repräsentiert. Eine solche Matrix kann man aber ebenso auch als ein  $n$ -Tupel in  $\mathbb{R}$  und damit als einen Vektor in  $\mathbb{R}^n$  auffassen.

**Lemma 49.7.** *Es sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum und*

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine Linearform. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor  $w \in V$  mit*

$$f(v) = \langle w, v \rangle.$$

*Wenn  $u_1, \dots, u_n$  eine Orthonormalbasis von  $V$  und  $f(u_i) = a_i$  ist, so ist dieser Vektor gleich  $w = \sum_{i=1}^n a_i u_i$ .*

*Beweis.* Die Aussage folgt aus dem Zusatz. Sei also eine Orthonormalbasis  $u_1, \dots, u_n$  gegeben und sei  $w = \sum_{i=1}^n a_i u_i$ . Dann ist für jedes  $j$

$$\langle w, u_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i u_i, u_j \right\rangle = a_j = f(u_j).$$

D.h. die beiden linearen Abbildungen  $v \mapsto \langle w, v \rangle$  und  $f$  stimmen auf einer Basis überein, sind also nach Satz 9.5 identisch. Für jeden anderen Vektor  $w' = \sum_{i=1}^n b_i u_i$  ist der Wert der zugehörigen Linearform an mindestens einem Basisvektor  $u_j$  von  $f(u_j)$  verschieden, daher liegt Eindeutigkeit vor.  $\square$

**Definition 49.8.** Sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum,  $G \subseteq V$  offen und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in  $P \in G$  differenzierbare Funktion. Dann nennt man den eindeutig bestimmten Vektor  $w \in V$  mit

$$(Df)_P(v) = \langle w, v \rangle$$

für alle  $v \in V$  den *Gradienten* von  $f$  in  $P$ . Er wird mit

$$\text{grad } f(P)$$

bezeichnet.

Man beachte, dass wir durchgehend die endlichdimensionalen Vektorräume mit einem Skalarprodukt versehen, um topologische Grundbegriffe wie Konvergenz und Stetigkeit zur Verfügung zu haben, dass diese Begriffe aber nicht von dem gewählten Skalarprodukt abhängen. Dem entgegen hängt aber der Gradient von dem gewählten Skalarprodukt ab.

Bei  $V = \mathbb{R}^n$ , versehen mit dem Standardskalarprodukt, ist der Gradient einfach gleich

$$\text{grad } f(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 49.9.** Zu einer differenzierbaren Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lässt sich der Gradient (bezüglich des Standardskalarproduktes) einfach durch partielles Differenzieren berechnen. Es wäre aber eine künstliche Einschränkung, nur diese Situation zu betrachten. Um dies zu illustrieren sei beispielsweise

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion und  $E \subset \mathbb{R}^3$  eine Ebene, die etwa als Lösungsmenge der linearen Gleichung  $5x - 4y + 9z = 0$  gegeben sei. Dann induziert das Standardskalarprodukt des  $\mathbb{R}^3$  durch Einschränkung ein Skalarprodukt auf  $E$ . Diese Ebene ist zwar isomorph zu  $\mathbb{R}^2$ , es ergibt aber keinen Sinn, das eingeschränkte Skalarprodukt als Standardskalarprodukt anzusprechen. Der Gradient  $G$  zu  $f$  in einem Punkt  $P \in \mathbb{R}^3$  lässt sich direkt mit den partiellen Ableitungen zu den drei Raumkoordinaten berechnen. Bei  $P \in E$  wird im Allgemeinen der Gradient *nicht* auf  $E$  liegen. Die eingeschränkte Funktion

$$f|_E: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist aber ebenfalls differenzierbar und besitzt daher einen Gradienten  $\tilde{G}$ , der auf  $E$  liegt, und dieser lässt sich nicht über partielle Ableitungen berechnen, da es auf  $E$  keine Standardbasis gibt. Übrigens ist  $\tilde{G}$  die orthogonale Projektion von  $G$  auf  $E$ .

**Satz 49.10.** Sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum, sei  $G \subseteq V$  offen und sei

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in  $P \in G$  differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Für jeden Vektor  $v \in V$  ist

$$|(Df)_P(v)| \leq \|v\| \cdot \|\text{grad } f(P)\|.$$

- (2) Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn  $v$  linear abhängig zum Gradienten ist.
- (3) Sei  $\text{grad } f(P) \neq 0$ . Unter allen Vektoren  $v \in V$  mit  $\|v\| = 1$  ist die Richtungsableitung in Richtung des normierten Gradienten maximal, und zwar gleich der Norm des Gradienten.

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt.  $\square$

Der Gradient gibt demnach die Richtung an, in die die Funktion den stärksten Anstieg hat. In die entgegengesetzte Richtung liegt entsprechend der steilste Abstieg vor.

### Lokale Extrema von Funktionen in mehreren Variablen

Wir wollen mit den Mitteln der Differentialrechnung Kriterien erarbeiten, in welchen Punkten eine Funktion

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum annimmt. Wenn man sich den Graph einer solchen Funktion als ein Gebirge über der Grundmenge  $G$  vorstellt, so geht es also um die Gipfel und die Senken des Gebirges. Der folgende Satz liefert ein notwendiges Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremums, das das entsprechende Kriterium in einer Variablen verallgemeinert.

**Satz 49.11.** *Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge. Es sei*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine Funktion, die im Punkt  $P \in G$  ein lokales Extremum besitzt. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Wenn  $f$  in  $P$  in Richtung  $v \in V$  differenzierbar ist, so ist*

$$(D_v f)(P) = 0.$$

- (2) *Wenn  $f$  in  $P$  total differenzierbar ist, so verschwindet das totale Differential, also*

$$(Df)_P = 0.$$

*Beweis.* (1) Zu  $v \in V$  betrachten wir die Funktion

$$h: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

wobei  $I$  ein geeignetes reelles Intervall ist. Da die Funktion  $f$  in  $P$  ein lokales Extremum besitzt, besitzt die Funktion  $h$  in  $t = 0$  ein lokales Extremum. Nach Voraussetzung ist  $h$  differenzierbar und nach Satz 20.3 ist  $h'(0) = 0$ . Diese Ableitung stimmt aber mit der Richtungsableitung überein, also ist

$$(D_v f)(P) = h'(0) = 0.$$

- (2) folgt aus (1) aufgrund von Proposition 46.8.  $\square$

Ein lokales Extremum kann also nur in einem sogenannten kritischen Punkt einer Funktion auftreten.

**Definition 49.12.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  offen und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann heißt  $P \in G$  ein *kritischer Punkt* von  $f$  (oder ein *stationärer Punkt*), wenn

$$(Df)_P = 0$$

ist. Anderfalls spricht man von einem *regulären Punkt*.

### Die Hesse-Form

Wir sind natürlich auch an hinreichenden Kriterien für das Vorliegen von lokalen Extrema interessiert. Wie schon im eindimensionalen Fall muss man sich die zweiten Ableitungen anschauen, wobei die Situation natürlich dadurch wesentlich verkompliziert wird, dass es zu je zwei Richtungsvektoren  $v$  und  $w$  eine zweite Richtungsableitung  $D_{vw} = D_v D_w$  gibt. Die zweite Richtungsableitung wird dadurch handhabbar, dass man sie in die sogenannte Hesse-Form bzw. Hesse-Matrix zusammenfasst.

**Definition 49.13.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zu  $P \in G$  heißt die Abbildung

$$\text{Hess}_P f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, (u, v) \longmapsto D_u D_v f(P),$$

die *Hesse-Form* im Punkt  $P \in G$ .

**Definition 49.14.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei eine Basis  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , von  $V$  gegeben mit den zugehörigen Richtungsableitungen  $D_i := D_{v_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Zu  $P \in G$  heißt dann die Matrix

$$\begin{pmatrix} D_1 D_1 f(P) & \cdots & D_1 D_n f(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(P) & \cdots & D_n D_n f(P) \end{pmatrix}$$

die *Hesse-Matrix* zu  $f$  im Punkt  $P$  bezüglich der gegebenen Basis.

Die Hesse-Form zu einem festen Punkt  $P$  ordnet also zwei Vektoren eine reelle Zahl zu, und sie ist durch ihre Hesse-Matrix vollständig beschrieben. Damit ordnet sie sich in das Konzept von symmetrischen Bilinearformen ein.

**AufwärmAufgaben**

**Aufgabe 49.1.** Es seien  $L$  und  $M$  metrische Räume und es sei

$$\varphi: L \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung. Es sei

$$\varphi(P) = Q$$

und es sei

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die im Punkt  $Q \in M$  ein lokales Extremum besitze. Zeige, dass

$$f \circ \varphi$$

in  $P$  ein lokales Extremum besitzt.

**Aufgabe 49.2.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass eine von 0 verschiedene lineare Abbildung

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

keine lokalen Extrema besitzt. Gilt dies auch für unendlichdimensionale Vektorräume? Braucht man dazu Differentialrechnung?

**Aufgabe 49.3.** Berechne den Gradienten der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2y - z^3xe^{xyz}$$

in jedem Punkt  $P \in \mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe 49.4.** Es sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Menge,  $P \in G$  ein Punkt und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in  $P$  differenzierbare Funktion. Zeige, dass  $f$  und  $(Df)_P$  im Punkt  $P$  den gleichen Gradienten besitzen.

**Aufgabe 49.5.** Es sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Menge,  $P \in G$  ein Punkt und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in  $P$  differenzierbare Funktion. Zeige, dass ein Vektor  $v \in V$  genau dann zum Kern von  $(Df)_P$  gehört, wenn er orthogonal zum Gradienten  $\text{grad } f(P)$  ist.



**Aufgabe 49.6.** Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

**Aufgabe 49.7.** Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy^2 - x.$$

**Aufgabe 49.8.** Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2y - y^2 + x.$$

**Aufgabe 49.9.** Betrachte die Linearform

$$L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x + 3y - 4z.$$

- (1) Bestimme den Vektor  $u \in \mathbb{R}^3$  mit der Eigenschaft

$$\langle u, v \rangle = L(v) \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^3,$$

wobei  $\langle -, - \rangle$  das Standardskalarprodukt bezeichnet.

- (2) Es sei

$$E = \{(x, y, z) \mid 3x - 2y - 5z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei  $\varphi = L|_E$  die Einschränkung von  $L$  auf  $E$ . Bestimme den Vektor  $w \in E$  mit der Eigenschaft

$$\langle w, v \rangle = \varphi(v) \text{ für alle } v \in E,$$

wobei  $\langle -, - \rangle$  die Einschränkung des Standardskalarprodukts auf  $E$  bezeichnet.

**Aufgabe 49.10.** Es sei

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, wobei  $G \subseteq V$  eine offene Menge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum sei. Zeige, dass für  $P \in G$  und  $v \in V$  die Beziehung

$$\sum_{|r|=2} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r = \frac{1}{2} \text{Hess}_P f(v, v)$$

gilt.

**Aufgabe 49.11.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  offen, und  $P \in G$ . Man gebe ein Beispiel von zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$f, g: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

an derart, dass ihre quadratischen Approximationen in  $P$  übereinstimmen, und die eine Funktion ein Extremum in  $P$  besitzt, die andere nicht.

**Aufgabe 49.12.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $\dim(V) \geq 2$ ,  $G \subseteq V$  offen, und  $P \in G$ . Man gebe ein Beispiel von zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$f, g: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

an derart, dass ihre quadratischen Approximationen in  $P$  übereinstimmen, und die eine Funktion ein Extremum in  $P$  besitzt, die andere nicht.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 49.13.** (3 Punkte)

Sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zeige, dass in der Abschätzung

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

von Cauchy-Schwarz genau dann die Gleichheit gilt, wenn  $v$  und  $w$  linear abhängig sind.

**Aufgabe 49.14.** (4 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy^3 - xy + \sin y.$$

**Aufgabe 49.15.** (4 Punkte)

Bestimme die globalen Extrema für die Funktion

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 + xy,$$

wobei  $D \subset \mathbb{R}^2$  das durch die Eckpunkte  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  gegebene abgeschlossene (volle) Dreieck ist.

**Aufgabe 49.16.** (4 Punkte)

Berechne den Anstieg der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2y - x + y^3,$$

im Punkt  $P = (1, 1)$  in Richtung des Winkels  $\alpha \in [0, 2\pi]$ . Für welchen Winkel ist der Anstieg maximal?

**Aufgabe 49.17.** (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x + \sin y - xz.$$

a) Bestimme den Gradienten  $G$  von  $f$  im Punkt  $P = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  bezüglich des Standardskalarprodukts  $\langle -, - \rangle$ .

b) Es sei

$$E = \{(x, y, z) \mid 2x - y + 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei  $g = f|_E$  die Einschränkung von  $f$  auf  $E$ . Bestimme den Gradienten  $\tilde{G}$  von  $g$  bezüglich der Einschränkung des Standardskalarprodukts auf  $E$ .

c) Zeige, dass  $\tilde{G}$  die orthogonale Projektion von  $G$  auf  $E$  ist.

### Aufgabe zum Hochladen

**Aufgabe 49.18.** (bis 10 Punkte)

Erstelle eine Graphik, die Beispiel 49.5 illustriert (es sollten der Graph der Funktion, geeignete Längsschnitte und die Nullstellenmenge wiedergegeben werden).

## 50. VORLESUNG - KRITERIEN FÜR EXTREMA

### Bilinearformen

**Definition 50.1.** Sei  $K$  ein Körper und sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow K, (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

heißt *Bilinearform*, wenn für alle  $v \in V$  die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K, w \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

und für alle  $w \in V$  die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K, v \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

$K$ -linear sind.

**Definition 50.2.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine Bilinearform. Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Dann heißt die  $n \times n$ -Matrix

$$\langle v_i, v_j \rangle_{1 \leq i, j \leq n}$$

die *Gramsche Matrix* von  $\langle -, - \rangle$  bezüglich dieser Basis.

Die Hesse-Matrix ist beispielsweise die Gramsche Matrix der Hesse-Form bezüglich der Standardbasis im  $\mathbb{R}^n$ . Für Elemente  $v = \sum_i^n a_i v_i$  und  $w = \sum_i^n b_i v_i$  und die Gramsche Matrix  $G$  ist

$$\langle v, w \rangle = (a_1, \dots, a_n) G \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

**Definition 50.3.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine Bilinearform. Die Bilinearform heißt *symmetrisch*, wenn

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

für alle  $v, w \in V$  gilt.

Die Hesse-Form ist eine symmetrische Bilinearform aufgrund des Satzes von Schwarz.

### Definitheit

**Definition 50.4.** Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$ . Diese Bilinearform heißt

- (1) *positiv definit*, wenn  $\langle v, v \rangle > 0$  ist für alle  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ .
- (2) *negativ definit*, wenn  $\langle v, v \rangle < 0$  ist für alle  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ .
- (3) *positiv semidefinit*, wenn  $\langle v, v \rangle \geq 0$  ist für alle  $v \in V$ .
- (4) *negativ semidefinit*, wenn  $\langle v, v \rangle \leq 0$  ist für alle  $v \in V$ .
- (5) *indefinit*, wenn  $\langle -, - \rangle$  weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist.

Positiv definite symmetrische Bilinearformen nennt man auch Skalarprodukte. Eine Bilinearform auf  $V$  kann man auf einen Untervektorraum  $U \subseteq V$  einschränken, wodurch sich eine Bilinearform auf  $U$  ergibt. Wenn die ursprüngliche Form positiv definit ist, so überträgt sich dies auf die Einschränkung. Allerdings kann eine indefinite Form eingeschränkt auf gewisse Unterräume positiv definit und auf andere negativ definit werden.

Wir besprechen nun das Minorenkriterium<sup>24</sup> für Definitheit.

**Lemma 50.5.** Sei  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum und sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Es sei  $G$  die Gramsche Matrix zu  $\langle -, - \rangle$  bezüglich dieser Basis und es seien  $D_k$  die Determinanten der quadratischen Untermatrizen

$$M_k = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

<sup>24</sup>Unter einem *Minor* versteht man die Determinante einer quadratischen Untermatrix einer Matrix. Man könnte also genauso gut von einem Determinantenkriterium sprechen.

- (1) Genau dann ist  $\langle -, - \rangle$  positiv definit, wenn alle  $D_k$  positiv sind.  
 (2) Genau dann ist  $\langle -, - \rangle$  negativ definit, wenn das Vorzeichen in der Folge  $D_0 = 1, D_1, D_2, \dots, D_n$  an jeder Stelle wechselt.

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt.  $\square$

Es gilt auch, dass wenn alle Minoren  $D_k \neq 0$  und weder alle positiv noch abwechselndes Vorzeichen besitzen, dass dann die Matrix indefinit ist.

### Hinreichende Kriterien für lokale Extrema

Wir kommen jetzt zu hinreichenden Kriterien für die Existenz von lokalen Extrema einer Funktion

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R},$$

die auf Eigenschaften der zweiten Richtungsableitungen, genauer der Hesse-Form, beruhen und die entsprechenden Kriterien in einer Variablen verallgemeinern. Zunächst brauchen wir ein Lemma, das beschreibt, wie die Definitheit (oder der „Definitheitstyp“<sup>25</sup>) der Hesse-Form vom Punkt abhängt.

**Lemma 50.6.** *Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge und*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei  $P \in G$  ein Punkt, in dem die Hesse-Form  $\text{Hess}_P f$  positiv (negativ) definit sei. Dann gibt es eine offene Umgebung  $U, P \in U \subseteq G$ , derart, dass die Hesse-Form  $\text{Hess}_Q f$  in jedem Punkt  $Q \in U$  positiv (negativ) definit ist.*

*Beweis.* Sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ , und sei  $G(Q)$  die Gramsche Matrix zur Hesse-Form  $\text{Hess}_Q f$  im Punkt  $Q \in G$  bezüglich dieser Basis. Aufgrund der Differenzierbarkeitsvoraussetzungen hängt  $G(Q)$  stetig von  $Q$  ab. Daher hängen auch die Determinanten der quadratischen Untermatrizen von  $G(Q)$  stetig von  $Q$  ab. Die Determinanten

$$D_k(P) = \det((G(P)_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k})$$

<sup>25</sup>Der *Typ* einer symmetrischen Bilinearform hat eine wohldefinierte Bedeutung:

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$ . Man sagt, dass eine solche Bilinearform den *Typ*

$$(p, q)$$

besitzt, wobei

$$p := \max(\dim_{\mathbb{R}}(U), U \subseteq V, \langle -, - \rangle|_U \text{ positiv definit})$$

$$\text{und } q := \max(\dim_{\mathbb{R}}(W), W \subseteq V, \langle -, - \rangle|_W \text{ negativ definit})$$

ist.

Es ist stets  $p + q \leq \dim(V)$  und es ist  $p = \dim(V)$  genau dann, wenn die Form positiv definit ist.

sind alle von 0 verschieden. Daher gibt es eine offene Umgebung  $U$ ,  $P \in U \subseteq G$ , derart, dass für alle  $Q \in U$  die Determinanten

$$D_k(Q) = \det((G(Q)_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k})$$

das gleiche Vorzeichen haben wie  $D_k(P)$ . Da diese Vorzeichen nach Lemma 50.5 über die Definitheit entscheiden, folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 50.7.** *Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge und*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei  $P \in G$  mit  $(Df)_P = 0$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Wenn  $\text{Hess}_P f$  negativ definit ist, so besitzt  $f$  ein isoliertes lokales Maximum in  $P$ .*
- (2) *Wenn  $\text{Hess}_P f$  positiv definit ist, so besitzt  $f$  ein isoliertes lokales Minimum in  $P$ .*
- (3) *Wenn  $\text{Hess}_P f$  indefinit ist, so besitzt  $f$  in  $P$  weder ein Minimum noch ein Maximum.*

*Beweis.* (1). Aufgrund von Lemma 50.6 gibt es ein  $\delta > 0$  derart, dass die Hesse-Form  $\text{Hess}_Q f$  negativ definit ist für alle  $Q \in U(P, \delta)$ . Für alle Vektoren  $v \in V$ ,  $v \in U(0, \delta)$ , gibt es nach Satz 48.5 ein  $c = c(v) \in [0, 1]$  mit

$$f(P + v) = f(P) + \sum_{|r|=2} \frac{1}{r!} D^r f(P + cv) \cdot v^r = f(P) + \frac{1}{2} \text{Hess}_{P+cv} f(v, v).$$

Da die Hesse-Form negativ definit ist, steht rechts für  $v \neq 0$  eine Zahl, die echt kleiner als  $f(P)$  ist. Daher liegt ein isoliertes lokales Maximum vor. (2) wird wie (1) bewiesen oder durch betrachten von  $-f$  darauf zurückgeführt. (3). Sei  $\text{Hess}_P f$  indefinit. Dann gibt es Vektoren  $v$  und  $w$  mit

$$\text{Hess}_P f(v, v) > 0 \text{ und } \text{Hess}_P f(w, w) < 0.$$

Wegen der stetigen Abhängigkeit der Hesse-Form gelten diese Abschätzungen auch für  $\text{Hess}_Q f$  für  $Q$  aus einer offenen Umgebung von  $P$  (mit den gleichen Vektoren  $v$  und  $w$ ). Wir können durch Skalierung von  $v$  und  $w$  annehmen, dass  $P + v$  und  $P + w$  zu dieser Umgebung gehören. Wie im Beweis zu Teil (1) gilt daher ( $v$  und  $w$  sind nicht 0)

$$f(P + v) = f(P) + \frac{1}{2} \text{Hess}_{P+cv} f(v, v) > f(P)$$

und

$$f(P + w) = f(P) + \frac{1}{2} \text{Hess}_{P+dw} f(w, w) < f(P)$$

mit  $c, d \in [0, 1]$ . Also kann in  $P$  kein Extremum vorliegen.  $\square$

**Beispiel 50.8.** Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x + 3x^2 - 2xy - y^2 + y^3.$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 6x - 2y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 2y + 3y^2.$$

Zur Berechnung der kritischen Punkte dieser Funktion eliminieren wir  $x$  und erhalten die Bedingung

$$9y^2 - 8y + 1 = 0,$$

die zu

$$y = \frac{\pm\sqrt{7}}{9} + \frac{4}{9}$$

führt. Die kritischen Punkte sind also

$$P_1 = \left( \frac{2\sqrt{7} - 1}{54}, \frac{\sqrt{7}}{9} + \frac{4}{9} \right) \quad \text{und} \quad P_2 = \left( \frac{-2\sqrt{7} - 1}{54}, \frac{-\sqrt{7}}{9} + \frac{4}{9} \right).$$

Die Hesse-Form ist in einem Punkt  $Q = (x, y)$  gleich

$$\text{Hess}_Q f = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -2 + 6y \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung des Definitheitstyps ziehen wir Lemma 50.5 heran, wobei der erste Minor, also 6, natürlich positiv ist. Die Determinante der Hesse-Matrix ist

$$-16 + 36y,$$

was genau bei  $y > \frac{4}{9}$  positiv ist. Dies ist im Punkt  $P_1$  der Fall, aber nicht im Punkt  $P_2$ . Daher ist die Hesse-Matrix im Punkt  $P_1$  nach Lemma 50.5 positiv definit und somit besitzt die Funktion  $f$  im Punkt  $P_1$  nach Satz 50.7 ein lokales Minimum, das zugleich ein globales Minimum ist. In  $P_2$  ist die Determinante negativ, so dass dort die Hesse-Form indefinit ist und somit, wiederum nach Satz 50.7, kein Extremum vorliegen kann.

**Beispiel 50.9.** Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^y.$$

Es ist

$$x^y = e^{(\ln x) \cdot y}.$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y}{x} \cdot e^{(\ln x) \cdot y} = \frac{y}{x} \cdot x^y \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (\ln x) \cdot e^{(\ln x) \cdot y} = (\ln x) \cdot x^y.$$

Da die Exponentialfunktion stets positiv ist, ist  $P = (1, 0)$  der einzige kritische Punkt. Die Hesse-Matrix in einem Punkt  $(x, y)$  ist

$$\begin{pmatrix} \frac{-y+y^2}{x^2} \cdot e^{(\ln x) \cdot y} & \frac{1+y \ln x}{x} \cdot e^{(\ln x) \cdot y} \\ \frac{1+y \ln x}{x} \cdot e^{(\ln x) \cdot y} & (\ln x)^2 \cdot e^{(\ln x) \cdot y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-y+y^2}{x^2} \cdot x^y & \frac{1+y \ln x}{x} \cdot x^y \\ \frac{1+y \ln x}{x} \cdot x^y & (\ln x)^2 \cdot x^y \end{pmatrix}.$$

In  $P$  ist dies

$$\text{Hess}_P \varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 50.5 ist daher die Hesse-Form im kritischen Punkt weder positiv definit noch negativ definit. Man kann direkt zeigen, dass diese Matrix indefinit ist (vom Typ  $(1, 1)$ ), da diese Bilinearform auf  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  positiv und auf  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  negativ definit ist. Nach Satz 50.7 liegt in diesem Punkt also kein Extremum vor.

Dies kann man auch ohne Differentialrechnung erkennen. Für  $x = 1$  oder  $y = 0$  ist  $x^y = 1$ . Ansonsten gelten die folgenden Beziehungen.

- (1) Für  $0 < x < 1$  und  $y > 0$  ist  $x^y < 1$ .
- (2) Für  $x > 1$  und  $y > 0$  ist  $x^y > 1$ .
- (3) Für  $0 < x < 1$  und  $y < 0$  ist  $x^y > 1$ .
- (4) Für  $x > 1$  und  $y < 0$  ist  $x^y < 1$ .

Daher gibt es in jeder Umgebung von  $(1, 0)$  Punkte, an denen die Funktionswerte größer bzw. kleiner als 1 sind.

**Bemerkung 50.10.** Es sei

$$g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b = x_{n+1}$$

eine Unterteilung des Intervalls durch  $n$  Zwischenpunkte (in  $n+1$  Teilintervalle). Dazu gehört die Treppenfunktion, die auf  $[x_i, x_{i+1}[$  den konstanten Wert  $g(x_i)$  annimmt. Wenn  $g$  monoton wachsend ist, so ist dies eine untere Treppenfunktion, und das zugehörige Treppenintegral ist eine untere Schranke für das bestimmte Integral  $\int_a^b g(t) dt$ . Das Treppenintegral ist gegeben durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n g(x_i) (x_{i+1} - x_i).$$

Wir fragen uns, für welche Intervallunterteilung mit  $n$  Teilpunkten das Treppenintegral maximal oder minimal wird. Dazu kann man die differentiellen Methoden zur Bestimmung von Extrema für Funktionen in mehreren Variablen verwenden, vorausgesetzt, dass  $g$  (hinreichend oft) differenzierbar (in einer Variablen) ist. In diesem Fall sind die partiellen Ableitungen von  $f$  gleich

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g'(x_i) (x_{i+1} - x_i) - g(x_i) + g(x_{i-1})$$

für  $i = 1, \dots, n$  (wobei  $x_0 = a$  und  $x_{n+1} = b$  zu lesen ist). Als Definitionsbereich von  $f$  kann man die offene Menge

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b\} \subseteq \mathbb{R}^n$$



oder aber  $[a, b]^n$  wählen. Es ist im Allgemeinen schwierig, die kritischen Punkte dieser Abbildung zu bestimmen.

**Beispiel 50.11.** Wir wollen für die Funktion

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto g(t) = 1 - t^3,$$

und das Einheitsintervall  $[0, 1]$  bestimmen, für welche zwei Unterteilungspunkte  $0 < x < y < 1$  das Treppenintegral der zugehörigen (dreistufigen) unteren Treppenfunktion maximal wird. Das Treppenintegral wird durch die Funktion

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x(1 - x^3) + (y - x)(1 - y^3) \\ &= x - x^4 + y - y^4 - x + xy^3 \\ &= -x^4 + y - y^4 + xy^3 \end{aligned}$$

beschrieben. Die partiellen Ableitungen dieser Funktion sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x^3 + y^3$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - 4y^3 + 3xy^2.$$

Wir bestimmen die kritischen Punkte. Aus der ersten partiellen Ableitung ergibt sich die Bedingung

$$y = \sqrt[3]{4x}$$

und daraus ergibt sich mit der zweiten partiellen Ableitung die Bedingung

$$1 - 16x^3 + 3 \cdot 4^{2/3}x^3 = 0,$$

also

$$(16 - 3 \cdot 4^{2/3})x^3 = 1$$

bzw.

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{16 - 3 \cdot 4^{2/3}}} \cong 0,4911.$$

Somit ist

$$P = \left( \frac{1}{\sqrt[3]{16 - 3 \cdot 4^{2/3}}}, \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{16 - 3 \cdot 4^{2/3}}} \right) \cong (0,4911, 0,7796)$$

der einzige kritische Punkt. Wir bestimmen die Hesse-Matrix in diesem Punkt, sie ist

$$\text{Hess}_P f = \begin{pmatrix} -12x^2 & 3y^2 \\ 3y^2 & -12y^2 + 6xy \end{pmatrix}$$

und in  $P$  gleich

$$\begin{pmatrix} -2,8942 & 1,8233 \\ 1,8233 & -4,9961 \end{pmatrix},$$

also negativ definit nach Lemma 50.5. Daher liegt in  $P$  ein Maximum nach Satz 50.7 vor.

**Beispiel 50.12.** Wir wollen für die Funktion

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto t,$$

und das Einheitsintervall  $[0, 1]$  bestimmen, für welche  $n$  Unterteilungspunkte  $0 < x_1 < \dots < x_n < 1$  das Treppenintegral der zugehörigen  $((n+1)$ -stufigen) unteren Treppenfunktion maximal wird. Das Treppenintegral wird durch die Funktion

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= x_1(x_2 - x_1) + x_2(x_3 - x_2) + \dots \\ &\quad + x_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + x_n(1 - x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} + x_n - \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{aligned}$$

beschrieben. Die partiellen Ableitungen dieser Funktion sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= x_2 - 2x_1, \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} &= x_{i-1} + x_{i+1} - 2x_i \end{aligned}$$

für  $i = 2, \dots, n-1$  und

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = x_{n-1} + 1 - 2x_n.$$

Wir bestimmen die kritischen Punkte, indem wir die partiellen Ableitungen gleich 0 setzen. Die ersten  $n-1$  Gleichungen ergeben sukzessive die Bedingungen

$$x_i = ix_1$$

für alle  $i$ . Dies zeigt man durch Induktion, der Induktionsanfang ( $i = 1$ ) ist trivial,  $i = 2$  folgt direkt aus der ersten Gleichung und der Induktionsschritt ergibt sich aus

$$x_{i+1} = -x_{i-1} + 2x_i = -(i-1)x_1 + 2ix_1 = (i+1)x_1.$$

Aus der letzten Gleichung folgt schließlich

$$0 = x_{n-1} + 1 - 2x_n = 1 + (n-1-2n)x_1 = 1 - (n+1)x_1$$

und somit  $x_1 = \frac{1}{n+1}$ . Der einzige kritische Punkt liegt also in der äquidistanten Unterteilung vor. Die Hesse-Form ist (unabhängig vom Punkt) gleich

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist negativ definit nach Lemma 50.5. Daher liegt in der äquidistanten Unterteilung nach Satz 50.7 das Maximum vor.

## 50. ARBEITSBLATT

**Aufwärmataufgaben**

Wenn in den folgenden Aufgaben nach Extrema gefragt wird, so ist damit gemeint, dass man die Funktionen auf (isolierte) lokale und globale Extrema untersuchen soll. Zugleich soll man, im differenzierbaren Fall, die kritischen Punkte bestimmen.

**Aufgabe 50.1.** Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

auf Extrema.

**Aufgabe 50.2.** Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^4,$$

auf Extrema.

**Aufgabe 50.3.** Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2 + 5xy,$$

auf Extrema.

**Aufgabe 50.4.** Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2 + 4xy,$$

auf Extrema.

**Aufgabe 50.5.** Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy^2 - x^3y,$$

auf Extrema.

**Aufgabe 50.6.** Bestimme für die Funktion

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy\sqrt{3 - x^2 - y^2},$$

den maximalen Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  und untersuche die Funktion auf Extrema.

**Aufgabe 50.7.\***

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto (3x^2 - 2xy - y^2 + 5x),$$

und entscheide, ob in diesen kritischen Punkten ein lokales Extremum vorliegt.

**Aufgabe 50.8.\***

Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + xy - 6y^2 - y,$$

auf kritische Punkte und Extrema.

**Aufgabe 50.9.\***

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der auf der abgeschlossenen Kreisscheibe  $B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  definierten Funktion

$$f: B(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^3 - y^2 - y.$$

**Aufgabe 50.10.\***

Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto \frac{xz}{x^2 + y^2}$$

(es ist also  $y > 0$ ).

- Berechne die partiellen Ableitungen von  $f$  und stelle den Gradienten zu  $f$  auf.
- Bestimme die isolierten lokalen Extrema von  $f$ .

**Aufgabe 50.11.\***

Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto -3x^2 + 2xy - 7y^2 + x,$$

auf Extrema.

**Aufgabe 50.12.** Wir betrachten die Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto 1 - t^2.$$

Für welches  $x \in [0, 1]$  besitzt die zugehörige zweistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu  $f$  den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

**Aufgabe 50.13.\***

Wir betrachten die Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto 1 - t^2.$$

Für welche  $x, y \in [0, 1]$ ,  $x < y$ , besitzt die zugehörige dreistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu  $f$  den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

**Aufgabe 50.14.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine Bilinearform auf  $V$ . Zeige, dass  $\langle -, - \rangle$  genau dann symmetrisch ist, wenn es eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $V$  gibt mit

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle$$

für alle  $1 \leq i, j \leq n$ .

**Aufgabe 50.15.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  auf  $V$ . Es sei  $u_1, \dots, u_n$  eine Orthogonalbasis auf  $V$  mit der Eigenschaft  $\langle u_i, u_i \rangle > 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Zeige, dass  $\langle -, - \rangle$  positiv definit ist.

**Aufgabe 50.16.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Zeige, dass die Gramsche Matrix zu dieser Bilinearform bezüglich einer geeigneten Basis eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge 1,  $-1$  oder 0 sind.

**Aufgabe 50.17.** Man gebe ein Beispiel einer symmetrischen Bilinearform, das zeigt, dass der Unterraum maximaler Dimension, auf dem die Einschränkung der Form positiv definit ist, nicht eindeutig bestimmt ist.

**Aufgabe 50.18.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass die Hesse-Form von  $f$  in jedem Punkt  $P \in G$  symmetrisch ist.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 50.19.** (3 Punkte)

Bestimme die Gramsche Matrix des Standardskalarproduktes im  $\mathbb{R}^3$  bezüglich der Basis  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 50.20.** (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  auf  $V$  und einer Basis  $u_1, \dots, u_n$  von  $V$  derart, dass  $\langle u_i, u_i \rangle > 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$  ist, aber  $\langle -, - \rangle$  nicht positiv definit ist.

**Aufgabe 50.21.** (4 Punkte)

Sei  $I = ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ . Untersuche die Funktion

$$f: I \times I \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{\cos x}{\cos y},$$

auf Extrema.

**Aufgabe 50.22.** (4 Punkte)

Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + 9y^2 + 6xy,$$

auf Extrema.

**Aufgabe 50.23.** (5 Punkte)

Sei

$$h: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und betrachte

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto h(x^2 + y^2).$$

Zeige, dass  $f$  allenfalls im Nullpunkt  $(0, 0)$  ein isoliertes lokales Extremum besitzen kann, und dass dies genau dann der Fall ist, wenn  $h$  in 0 ein isoliertes lokales Extremum besitzt.

## 51. VORLESUNG - DIFFEOMORPHISMEN

**Der Satz über die Umkehrabbildung**

Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall und

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion mit  $f'(x_0) \neq 0$  in einem Punkt  $x_0 \in I$ . Nehmen wir an es gelte  $f'(x_0) > 0$ . Da die Ableitung stetig ist, gibt es auch ein offenes Intervall  $J = ]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[ \subseteq I$  derart, dass  $f'(x) > 0$  ist für alle  $x \in J$ . Aufgrund von Satz 20.7 (2) ist somit  $f$  auf  $J$  streng wachsend. Daher ist insbesondere  $f$  auf  $J$  injektiv. Das Bild  $J' = f(J)$  ist nach dem Zwischenwertsatz ein Intervall und daher liegt eine Bijektion

$$f|_J: J \longrightarrow J'$$

vor. Nach Satz 19.9 ist die Umkehrfunktion

$$g: J' \longrightarrow J$$

ebenfalls differenzierbar, und ihre Ableitung in  $y \in J'$  ist  $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$ . Daher ist die Umkehrfunktion auf  $J'$  auch stetig differenzierbar. Eine ähnliche Argumentation ist durchführbar, wenn  $f'(x_0) < 0$  ist. Insgesamt bedeutet dies, dass aus dem Nichtverschwinden der Ableitung in einem Punkt folgt, dass die Funktion sich in einer kleinen offenen Umgebung des Punktes bijektiv verhält mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung.

Der Satz über die (lokale) Umkehrabbildung verallgemeinert diese Beobachtung auf höhere Dimensionen. Er gehört zu den wichtigsten Sätzen der mehrdimensionalen Analysis und besagt, dass eine stetig differenzierbare Abbildung  $\varphi$  zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen, für die das totale Differential in einem Punkt bijektiv ist (was voraussetzt, dass die Dimension des Definitionsraum mit der Dimension des Zielraums übereinstimmt), die Abbildung selbst auf geeigneten kleinen offenen Umgebungen von  $P$  und von  $\varphi(P)$  eine Bijektion ist. D.h. die Abbildung verhält sich *lokal* so wie das totale Differential.

Der folgende Satz heißt *Satz über die Umkehrbarkeit*. Wir verzichten auf den recht aufwändigen Beweis.

**Satz 51.1.** *Es seien  $V_1$  und  $V_2$  euklidische Vektorräume, sei  $G \subseteq V_1$  offen und es sei*

$$\varphi: G \longrightarrow V_2$$

*eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $P \in G$  ein Punkt derart, dass das totale Differential*

$$(D\varphi)_P$$

bijektiv ist. Dann gibt es eine offene Menge  $U_1 \subseteq G$  und eine offene Menge  $U_2 \subseteq V_2$  mit  $P \in U_1$  und mit  $\varphi(P) \in U_2$  derart, dass  $\varphi$  eine Bijektion

$$\varphi|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2$$

induziert, und dass die Umkehrabbildung

$$(\varphi|_{U_1})^{-1}: U_2 \longrightarrow U_1$$

ebenfalls stetig differenzierbar ist.

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Dabei ergibt sich das totale Differential der Umkehrabbildung in einem Punkt  $\varphi(P)$  aufgrund der Kettenregel einfach als Umkehrabbildung des totalen Differentials in  $P$ .

**Definition 51.2.** Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei  $G \subseteq V$  offen, sei  $P \in G$  und sei

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine in  $P$  differenzierbare Abbildung. Dann heißt  $P$  ein *regulärer Punkt* von  $\varphi$ , wenn

$$\text{rang}(D\varphi)_P = \min(\dim(V), \dim(W))$$

ist. Andernfalls heißt  $P$  ein *kritischer Punkt* oder ein *singulärer Punkt*.

**Bemerkung 51.3.** Eine differenzierbare Abbildung  $\varphi: G \rightarrow W$  ist genau dann regulär in einem Punkt  $P \in G$ , wenn das totale Differential  $(D\varphi)_P$  den maximal möglichen Rang besitzt. Der Rang ist nach Lemma 11.2 und nach Lemma 11.3 gleich dem Spalten- bzw. Zeilenrang einer beschreibenden Matrix. Daher ist der Rang maximal gleich der Anzahl der Zeilen und maximal gleich der Anzahl der Spalten, also maximal gleich dem Minimum der beiden Dimensionen.

Bei  $\dim(W) = 1$  ist  $P$  ein regulärer Punkt genau dann, wenn  $(D\varphi)_P$  nicht die Nullabbildung ist. Daher stimmt diese Definition von regulär mit Definition überein. Bei  $\dim(V) = 1$  bedeutet die Regularität wiederum, dass  $(D\varphi)_P \neq 0$  ist. Generell bedeutet bei  $\dim(V) \leq \dim(W)$  die Regularität, dass  $(D\varphi)_P$  injektiv ist, und bei  $\dim(V) \geq \dim(W)$  bedeutet die Regularität, dass  $(D\varphi)_P$  surjektiv ist. Insbesondere bedeutet bei  $\dim(V) = \dim(W)$  die Regularität in  $P$ , dass das totale Differential bijektiv ist und dass daher die Voraussetzung im Satz über die lokale Umkehrbarkeit erfüllt ist.

**Beispiel 51.4.** Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2 - y, x + xy).$$

Diese Abbildung ist differenzierbar und die Jacobi-Matrix in einem Punkt  $P = (x, y)$  ist

$$\begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 + y & x \end{pmatrix}.$$



Die Determinante davon ist

$$2x^2 + 1 + y,$$

so dass die Bedingung

$$y \neq -2x^2 - 1$$

die regulären Punkte der Abbildung charakterisiert. Im Nullpunkt  $(0, 0)$  liegt beispielsweise ein regulärer Punkt vor, so dass dort aufgrund des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit lokal eine Bijektion vorliegt, d.h. es gibt offene Umgebungen  $U_1$  und  $U_2$  von  $(0, 0)$  derart, dass die eingeschränkte Abbildung

$$\varphi|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2$$

bijektiv ist (mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung).

Wie groß kann dabei  $U_1$  gewählt werden? Wir beschränken uns auf offene Ballumgebungen  $U(0, r)$ . Bei  $r > 1$  enthält eine solche Kreisscheibe zwei Punkte der Art

$$(\pm x, -1).$$

Diese werden unter  $\varphi$  auf

$$\varphi(\pm x, -1) = (x^2 - (-1), x + x(-1)) = (x^2 + 1, 0)$$

abgebildet, also auf den gleichen Punkt. Daher ist die Einschränkung der Abbildung auf eine solche Kreisscheibe nicht injektiv, und auf einer solchen Menge kann es keine Umkehrabbildung geben.

Betrachten wir hingegen  $U_1 = U(0, r)$  mit  $r \leq 1$  und  $U_2 := \varphi(U_1)$ . Da  $U_1$  keine kritischen Punkte enthält, ist nach Aufgabe 51.14 das Bild  $U_2$  offen. Die eingeschränkte Abbildung  $\varphi|_{U_1}: U_1 \rightarrow U_2$  ist nach Definition von  $U_2$  surjektiv, so dass nur die Injektivität zu untersuchen ist.

Das Gleichungssystem

$$x^2 - y = u \text{ und } x + xy = v$$

führt auf

$$y = x^2 - u$$

und auf

$$x(1 + x^2 - u) = x^3 + (1 - u)x = v.$$

Seien  $(x, y)$  und  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  aus  $U((0, 0), 1)$  mit

$$\varphi(x, y) = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y})$$

gegeben. Dann ist

$$x^3 + (1 - u)x = v = \tilde{x}^3 + (1 - u)\tilde{x}$$

und somit

$$0 = x^3 - \tilde{x}^3 + (1 - u)(x - \tilde{x}) = (x - \tilde{x})(x^2 + x\tilde{x} + \tilde{x}^2 + 1 - u).$$

Bei  $x \neq \tilde{x}$  muss also

$$x^2 + x\tilde{x} + \tilde{x}^2 + 1 - u = 0$$

sein. Dies bedeutet  $y = x^2 - u = -x\tilde{x} - \tilde{x}^2 - 1$  und ebenso  $\tilde{y} = -x\tilde{x} - x^2 - 1$ . Wegen

$$x(y + 1) = v$$

und  $y + 1 > 0$  müssen  $x$  und  $v$  das gleiche Vorzeichen besitzen. Daher müssen auch  $x$  und  $\tilde{x}$  das gleiche Vorzeichen besitzen. Daraus folgt aber

$$y = -x\tilde{x} - \tilde{x}^2 - 1 \leq -1,$$

so dass es in der offenen Kreisumgebung mit Radius 1 keine zwei verschiedenen Urbilder geben kann.<sup>26</sup>

## Diffeomorphismen

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit gibt Anlass zu folgender Definition.

**Definition 51.5.** Es seien  $V_1$  und  $V_2$  euklidische Vektorräume und  $U_1 \subseteq V_1$  und  $U_2 \subseteq V_2$  offene Teilmengen. Eine Abbildung

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_2$$

heißt  *$C^k$ -Diffeomorphismus*, wenn  $\varphi$  bijektiv und  $k$ -mal stetig differenzierbar ist, und wenn die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}: U_2 \longrightarrow U_1$$

ebenfalls  $k$ -mal stetig differenzierbar ist.

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit besagt also, dass eine stetig differenzierbare Abbildung mit invertierbarem totalen Differential lokal (!) ein  $C^1$ -Diffeomorphismus ist (es gibt auch  $C^k$ -Versionen von diesem Satz). Zwei offene Mengen  $U_1$  und  $U_2$  heißen  *$C^k$ -diffeomorph*, wenn es einen  $C^k$ -Diffeomorphismus zwischen ihnen gibt.

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit macht keine Aussage über die Größe der offenen Mengen, auf denen ein Diffeomorphismus vorliegt. Abbildungen, die auf großen und übersichtlichen Teilmengen umkehrbar sind, werden durch Koordinatensysteme bereit gestellt. Wir besprechen hier Polarkoordinaten und Kugelkoordinaten.

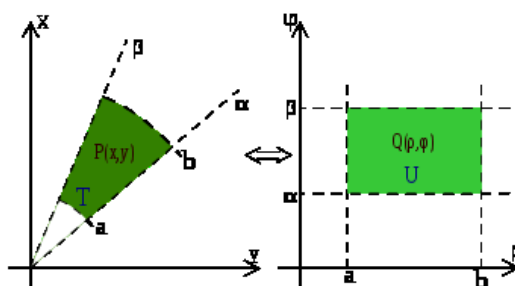
Wir haben gelegentlich für die reelle Ebene (bzw. die komplexen Zahlen) Polarkoordinaten verwendet. Hier besprechen wir Polarkoordinaten in Hinblick auf lokale Umkehrbarkeit.

---

<sup>26</sup>Man kann auch folgendermaßen argumentieren: Die Ableitung von  $x^3 + (1-u)x$  nach  $x$  ist  $3x^2 + (1-u) = 3x^2 + 1 - (x^2 - y) = 2x^2 + 1 + y$ . Wegen  $|y| < 1$  ist dies positiv. Somit ist  $x^3 + (1-u)x$  streng wachsend in  $x$  nach Satz 20.7. Daher gibt es zu einem vorgegebenen Punkt  $(u, v) \in U_2$  nur ein  $x$ , das die Bedingung

$$x^3 + (1-u)x = v$$

erfüllt. Wegen  $y = x^2 - u$  ist auch die zweite Komponente  $y$  eindeutig bestimmt.



**Beispiel 51.6.** Die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (r, \alpha) \longmapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha),$$

heißt *Polarkoordinatenauswertung*. Sie ordnet einem Radius und einem Winkel denjenigen Punkt der Ebene (in kartesischen Koordinaten) zu, zu dem man gelangt, wenn man in Richtung des Winkels (gemessen von der  $x$ -Achse aus gegen den Uhrzeigersinn) die Strecke  $r$  zurücklegt. Sie ist in jedem Punkt  $(r, \alpha)$  stetig differenzierbar mit der Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist nicht injektiv, da die Abbildung im zweiten Argument, also im Winkel  $\alpha$ , periodisch mit der Periode  $2\pi$  ist. Bei  $r = 0$  ist - unabhängig von  $\alpha$  - das Bild gleich  $(0, 0)$ . Ferner ist  $\varphi(-r, \alpha + \pi) = \varphi(r, \alpha)$ . Die Abbildung kann also nicht global invertierbar sein.

Die Determinante der Jacobi-Matrix ist

$$r(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = r.$$

Bei  $r \neq 0$  liegt also nach Satz 11.11 ein bijektives totales Differential vor. Nach dem Satz über die lokale Umkehrabbildung gibt es zu jedem Punkt  $(r, \alpha)$  mit  $r \neq 0$  eine offene Umgebung  $(r, \alpha) \in U_1$  und eine bijektive Abbildung

$$\varphi|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2 = \varphi(U_1).$$

Bei  $r > 0$  kann man beispielsweise als offene Umgebung das offene Rechteck

$$U_1 = ]r - \delta, r + \delta[ \times ]\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon[$$

mit  $r > \delta > 0$  und mit  $\pi > \epsilon > 0$  wählen. Das Bild davon, also  $U_2$ , ist der Schnitt des (offenen) Kreisringes zu den Radien  $r - \delta$  und  $r + \delta$  und dem (offenen) Kreissektor, der durch die beiden Winkel  $\alpha - \epsilon$  und  $\alpha + \epsilon$  begrenzt ist.

Man kann diese Abbildung zu einer bijektiven Abbildung, und zwar zu einem Diffeomorphismus, auf großen offenen Mengen einschränken, beispielsweise zu

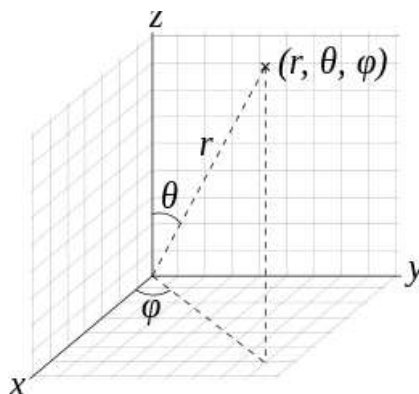
$$\mathbb{R}_+ \times ]-\pi, \pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}, (r, \alpha) \longmapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha).$$

Die Bijektivität folgt dabei aus den grundlegenden Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, siehe insbesondere Satz 21.8. Wenn man das offene Intervall  $] -\pi, \pi[$  durch das halboffene Intervall  $] -\pi, \pi]$  ersetzt, so bekommt man eine Bijektion zwischen  $\mathbb{R}_+ \times ] -\pi, \pi]$  und  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Man kann aber nicht von einem Diffeomorphismus sprechen, da dies nur für offene Mengen definiert ist. Die Umkehrabbildung ist übrigens noch nicht einmal stetig.

**Beispiel 51.7.** Die Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi) \longmapsto (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$$

(bzw. die Einschränkung davon auf Teilmengen wie  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ ) nennt man *Kugelkoordinatenauswertung*. Diese Abbildung bildet die *Kugelkoordinaten*  $(r, \theta, \varphi)$  auf die zugehörigen kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$  ab.



Die Bedeutung der Kugelkoordinaten sind folgendermaßen:  $r$  ist der Abstand von  $(x, y, z)$  zum Nullpunkt. Bei  $r = 1$  definieren die beiden Winkel  $\varphi$  und  $\theta$  einen Punkt auf der Einheitskugel, und zwar bestimmt  $\varphi$  einen Punkt auf dem Einheitskreis in der  $x - y$ -Ebene (auf dem Äquator) und  $\theta$  bestimmt einen Punkt auf dem zugehörigen Halbkreis (der durch den Äquatorpunkt und Nord- und Südpol festgelegt ist), wobei der Winkel zum Nordpol gemessen wird. Für ( $r = 1$  und) einen festen Winkel  $\theta$  parametrisiert  $\varphi$  einen *Breitenkreis*, wobei  $\theta = \frac{\pi}{2}$  den Äquator beschreibt. Bei einem festen Winkel  $\varphi$  hingegen parametrisiert  $\theta$  den oben angesprochenen Halbkreis, einen *Längenkreis*. In der Geographie herrschen übrigens etwas andere Konventionen, man wählt den zweiten Winkel aus  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  (statt  $+$  und  $-$  spricht man von nördlicher und südlicher Breite) und nimmt  $-\sin \theta$ .

Die Jacobi-Matrix der Abbildung ist

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

und die Determinante davon ist

$$r^2 \sin \theta .$$

D.h. bei  $r \neq 0$  und  $\theta \notin \mathbb{Z}\pi$  ist das totale Differential invertierbar und daher liegt nach Satz 51.1 ein lokaler Diffeomorphismus vor. Die inhaltliche Interpretation der Abbildung zeigt, dass hier überhaupt ein Diffeomorphismus zwischen  $\mathbb{R}_+ \times ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$  und  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$  vorliegt.

## 51. ARBEITSBLATT

### Aufwärmataufgaben

**Aufgabe 51.1.** Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, (x, y) \longmapsto (x, e^{x+y}),$$

bijektiv ist. Man gebe explizit eine Umkehrabbildung an.

**Aufgabe 51.2.** Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x),$$

eine Funktion. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x, y + f(x)),$$

bijektiv ist. Bestimme explizit eine Umkehrabbildung.

**Aufgabe 51.3.** Man gebe ein Beispiel einer bijektiven differenzierbaren Abbildung

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_2$$

mit einer stetigen Umkehrabbildung  $\psi$  derart, dass  $\psi$  nicht differenzierbar ist.

**Aufgabe 51.4.** Definiere explizit einen Diffeomorphismus zwischen  $\mathbb{R}^n$  und einer offenen Kugel  $U(0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Aufgabe 51.5.** Es seien

$$f_1, \dots, f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen. Betrachte die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)),$$

Zeige:

- (1) Die Abbildung  $f$  ist differenzierbar.
- (2) Das totale Differential von  $f$  in 0 ist genau dann bijektiv, wenn von sämtlichen Funktionen  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , die Ableitungen in 0 nicht 0 sind.
- (3)  $f$  ist genau dann auf einer offenen Umgebung von 0 bijektiv, wenn die einzelnen  $f_i$  in einer geeigneten Umgebung bijektiv sind.

**Aufgabe 51.6.** Bestimme die regulären Punkte der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2y, x - \sin y).$$

Zeige, dass  $\varphi$  in  $P = (1, 0)$  regulär ist und bestimme das totale Differential der Umkehrabbildung von  $\varphi|_U$  in  $\varphi(P)$ , wobei  $U$  eine offene Umgebung von  $P$  sei (die nicht explizit angegeben werden muss).

**Aufgabe 51.7.** Seien  $U, V, W$  euklidische Vektorräume und seien  $\varphi: U \longrightarrow V$  und  $\psi: V \longrightarrow W$  differenzierbare Abbildungen. Es sei  $\varphi$  regulär in  $P \in U$  und  $\psi$  regulär in  $Q = \varphi(P) \in V$ . Ist dann  $\psi \circ \varphi$  regulär in  $P$ ? Unter welchen Voraussetzungen stimmt dies?

**Aufgabe 51.8.** Das komplexe Quadrieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^2,$$

kann man reell schreiben als

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, x + iy = (x, y) \longmapsto (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Untersuche  $\varphi$  auf reguläre Punkte. Auf welchen (möglichst großen) offenen Teilmengen ist  $\varphi$  umkehrbar?

**Aufgabe 51.9.\***

Man gebe ein Beispiel einer Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

das zeigt, dass im Satz über die (lokale) Umkehrbarkeit die Bijektivität im Allgemeinen nur auf echten Teilintervallen besteht.

**Aufgabe 51.10.\***

Man gebe für jedes  $n \in \mathbb{N}_+$  eine bijektive, total differenzierbare Abbildung

$$\varphi_n: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

an, für die das totale Differential in mindestens einem Punkt nicht regulär ist.

## Aufgaben zum Abgeben

### Aufgabe 51.11. (2 Punkte)

Seien  $U_1$  und  $U_2$  offene Mengen in euklidischen Vektorräumen  $V_1$  und  $V_2$ . Es sei

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_2$$

eine bijektive Abbildung, die in einem Punkt  $P \in U_1$  differenzierbar sei derart, dass die Umkehrabbildung in  $Q = \varphi(P)$  auch differenzierbar ist. Zeige, dass das totale Differential  $(D\varphi)_P$  bijektiv ist.

### Aufgabe 51.12. (4 Punkte)

Bestimme die Umkehrabbildung zur Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + y^2, -y^4 - 2xy^2 - x^2 + y^2 + x + y).$$

(Tipp: Versuche, diese Funktion als Hintereinanderschaltung von einfacheren Abbildungen zu schreiben.)

### Aufgabe 51.13. (3 Punkte)

Seien  $V_1$  und  $V_2$  endlichdimensionale reelle Vektorräume,  $G \subseteq V_1$  offen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow V_2$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $U \subseteq G$  eine offene Teilmenge derart, dass für jeden Punkt  $P \in U$  das totale Differential  $(D\varphi)_P$  bijektiv ist. Zeige, dass dann das Bild  $\varphi(U)$  offen in  $V_2$  ist.

### Aufgabe 51.14. (7 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + y, xy).$$

- (1) Bestimme die regulären Punkte von  $\varphi$ .
- (2) Zeige, dass in den kritischen Punkten die Abbildung  $\varphi$  nicht lokal invertierbar ist, dass also die Einschränkung von  $\varphi$  in keiner offenen Umgebung eines kritischen Punktes bijektiv wird.
- (3) Lässt sich jedes reelle Zahlenpaar  $(s, p)$  schreiben als  $(s, p) = (x + y, xy)$ ?
- (4) Ist ein reelles Zahlenpaar  $(x, y)$  bis auf Vertauschen der Komponenten eindeutig durch die Summe  $x + y$  und das Produkt  $xy$  festgelegt?

**Aufgabe 51.15.** (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, xy + xz + yz, xyz).$$

Zeige, dass ein Punkt  $(x, y, z)$  genau dann ein kritischer Punkt von  $\varphi$  ist, wenn in  $(x, y, z)$  zwei Zahlen doppelt vorkommen.

**Aufgabe 51.16.** (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (x^2 - y^2z, y + \sin xz).$$

Zeige, dass die Menge der kritischen Punkte von  $\varphi$  eine Gerade umfasst, aber auch noch weitere (mindestens einen) Punkte enthält.

## 52. VORLESUNG - IMPLIZITE ABBILDUNGEN

**Der Satz über implizite Abbildungen**

**Definition 52.1.** Zu einer Abbildung

$$\varphi: L \longrightarrow M$$

zwischen zwei Mengen  $L$  und  $M$  heißt zu  $y \in M$  die Menge

$$F_y = \{x \in L \mid \varphi(x) = y\}$$

die *Faser* von  $\varphi$  über  $y$ .

Die Faser zu einem Punkt ist also einfach das Urbild  $\varphi^{-1}(\{y\})$  von  $y$ . Zu einem Punkt  $P \in L$  nennt man die Faser über  $\varphi(P)$  auch die *Faser durch*  $P$ . Bei  $M = \mathbb{R}$  sagt man statt Fasern auch *Niveaumengen* oder, insbesondere bei  $L = \mathbb{R}^2$ , auch *Höhenlinien*.

**Beispiel 52.2.** Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

Da diese nur nichtnegative Werte annimmt, sind die Fasern zu  $z \in \mathbb{R}_-$  leer. Die Faser zum Wert 0 besteht aus dem einzigen Punkt  $(0, 0)$ . Die Faser zu einem positiven Wert  $z \in \mathbb{R}_+$  ist

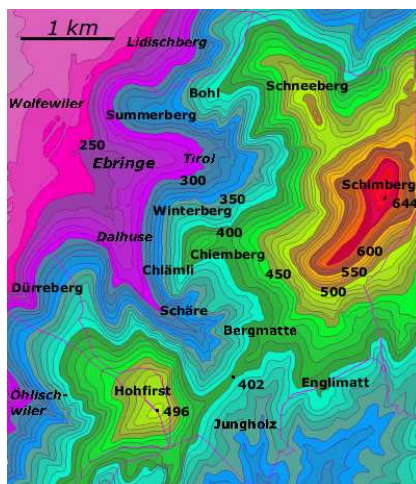
$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = z\},$$

das ist der Kreis mit dem Radius  $\sqrt{z}$ . Zu jedem Punkt  $P = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$  ist die Faser (oder die Niveaumenge) durch diesen Punkt also ein Kreis  $Z$ . Eine hinreichend kleine offene Ballumgebung  $U(P, \delta)$  von  $P$  enthält nur einen Teil des Kreisbogens, der homöomorph zu einem offenen Intervall ist. Die differenzierbare Abbildung

$$]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \sqrt{x_0^2 + y_0^2} (\cos t, \sin t)$$



(mit geeignet gewählten Intervallgrenzen) induziert dabei eine Homöomorphie zwischen  $]a, b[$  und dem Kreisbogenausschnitt  $Z \cap U(P, \delta)$ .



In einer topographischen Karte wird ein Gebirge durch seine Niveaulinien (Höhenlinien) repräsentiert.



Die Küstenlinie ist die Nullfaser der Höhenabbildung. In den regulären Punkten der Küste kann man eine Tangente anlegen und die Küste lokal als Graph einer Funktion beschreiben. Ein singulärer Punkt einer Küste ergibt sich beispielsweise bei einer Meereselevation, die genau in einem Punkt an die Wasseroberfläche stößt, oder einem Sattelpunkt zwischen „zwei“ Inseln, der sich auf Meeresniveau befindet.<sup>27</sup>

**Beispiel 52.3.** Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x)$ , eine Funktion in einer Variablen. Dazu kann man die Funktion in zwei Variablen,

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto y - f(x),$$

<sup>27</sup>Dass man solche singulären Punkte in der Natur nur selten antrifft, liegt daran, dass das Höhenprofil der Erde nur endlich viele kritische Punkte und damit nur endlich viele Gipfel und Sattelpunkte besitzt. Es ist daher unwahrscheinlich, dass der Meeresspiegel genau auf der Höhe eines solchen kritischen Punktes liegt. Wenn man aber Ebbe und Flut betrachtet, so werden solche Punkte immer wieder durchlaufen.

betrachten. Die Fasern von  $\varphi$  über  $c \in \mathbb{R}$  sind durch

$$F_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) + c\}$$

charakterisiert. D.h. die Faser über  $c$  ist einfach der Graph der durch  $x \mapsto f(x) + c$  definierten Funktion. Alle Fasern gehen durch eine Verschiebung ineinander über, sie sind parallel zueinander. Die Punkte einer jeden Faser stehen in Bijektion mit der  $x$ -Achse, indem nämlich  $x$  auf  $(x, f(x) + c)$  abgebildet wird.

Der *Satz über implizite Abbildungen* wird zeigen, dass unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen die Fasern einer Abbildung sich *lokal* als Graphen von Abbildungen realisieren lassen.

Eine Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) = (y_1, \dots, y_m)$$

führt unmittelbar zu einem Gleichungssystem

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n).$$

Die Lösungsmenge eines solchen Gleichungssystems ist gerade die Faser über  $y = (y_1, \dots, y_m)$ . Man kann sich fragen, wie zu gegebenem  $y = (y_1, \dots, y_m)$  die Lösungsmenge aussieht, welche Struktur sie hat und wie sie sich mit  $y$  verändert. Das „grobe Muster“ zeigt sich schon deutlich bei einem *linearen Gleichungssystem* in  $n$  Variablen und  $m$  Gleichungen. Dort sind bei  $n \geq m$ , und wenn die Gleichungen linear unabhängig sind, die Lösungsmengen  $(n - m)$ -dimensionale affine Untervektorräume des  $\mathbb{R}^n$ . Insbesondere sind alle Lösungsmengen gleich und besitzen die gleiche Dimension.

Das Bestimmen der Lösungsmengen ist im Allgemeinen sehr viel schwieriger als im linearen Fall und auch gar nicht effektiv durchführbar. Dennoch vermittelt die lineare Approximation durch das totale Differential den richtigen Ansatz für das Studium allgemeiner Fasern. Eine reichhaltige Strukturaussage über die Gestalt der Faser in einem Punkt  $P$  ist nur dann zu erwarten, wenn das totale Differential in  $P$  surjektiv ist. In diesem Fall ist der Kern des totalen Differentials, also die Lösungsmenge des durch diese lineare Abbildung gegebenen linearen Gleichungssystems, *tangential* an die Faser durch  $P$ , und man kann auf hinreichend kleinen offenen Mengen eine Bijektion zwischen dem Kern und der Faser stiften.



Der Querschnitt eines Achats. Die chemische Zusammensetzung variiert mit dem Ort und damit variiert auch die Frequenz des reflektierten Lichts, also die optische Erscheinung, mit dem Ort. Man sieht also die (verdickten) Fasern der Lichtabbildung.

**Satz 52.4.** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $P \in G$  und es sei  $Z = \varphi^{-1}(\varphi(P))$  die Faser durch  $P$ . Das totale Differential  $(D\varphi)_P$  sei surjektiv. Dann gibt es eine offene Menge  $W \subseteq G$ , eine offene Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$  und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\psi: V \longrightarrow W$$

derart, dass  $\psi(V) \subseteq Z \cap W$  ist und  $\psi$  eine Bijektion

$$\psi: V \longrightarrow Z \cap W$$

induziert. Die Abbildung  $\psi$  ist in jedem Punkt  $Q \in V$  regulär und für das totale Differential von  $\psi$  gilt

$$(D\varphi)_{\psi(Q)} \circ (D\psi)_Q = 0.$$

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

**Bemerkung 52.5.** Den Satz über implizite Abbildungen kann man auch so formulieren: Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale reelle Vektorräume,  $G \subseteq V$  offen und es sei  $\varphi: G \rightarrow W$  eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $a \in G$  ein Punkt, in dem das totale Differential  $(D\varphi)_a$  surjektiv sei, und es sei  $V = E_1 \oplus E_2$  eine direkte Summenzerlegung von  $V$  in Untervektorräume  $E_1$  und  $E_2$  (mit  $a = (a_1, a_2)$ ) derart, dass  $E_1 = \ker(D\varphi)_a$  und  $(D\varphi)_a|_{E_2}$  surjektiv (und damit bijektiv ist) ist (dadurch ist  $E_1$ , aber nicht  $E_2$  eindeutig festgelegt). Dann gibt es offene Mengen  $U_1 \subseteq E_1$  und  $U_2 \subseteq E_2$  mit  $U_1 \times U_2 \subseteq G$  und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\theta: U_1 \longrightarrow U_2$$

derart, dass der Graph von  $\theta$ , also

$$\Gamma = \{(x, \theta(x)) \mid x \in U_1\},$$

mit der Faser über  $b = \varphi(a)$ , geschnitten mit  $U_1 \times U_2$ , also

$$\{(x, v) \in U_1 \times U_2 \mid \varphi(x, v) = b\},$$

übereinstimmt. Sind auf  $E_1$  und  $E_2$  jeweils Basen fixiert mit Koordinaten  $(x_1, \dots, x_{n-m})$  bzw.  $(v_1, \dots, v_m)$  ( $k = n$  und  $m$  seien die Dimensionen von  $V$  und  $W$ ), so wird lokal die Faser durch den Graph von  $m$  Funktionen  $\theta_1, \dots, \theta_m$  in den  $n - m$  Variablen  $(x_1, \dots, x_{n-m})$  gegeben. Die Faser ist dann nach den Variablen  $(v_1, \dots, v_m)$  „aufgelöst“, d.h. diese Koordinaten lassen sich unter der impliziten Bedingung, dass die Punkte zur Faser gehören sollen, explizit durch die anderen, frei wählbaren Koordinaten  $(x_1, \dots, x_{n-m})$  ausdrücken.

**Definition 52.6.** Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei  $G \subseteq V$  offen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $P \in G$  ein Punkt, in dem das totale Differential  $(D\varphi)_P$  surjektiv sei, und sei  $Y$  die Faser von  $\varphi$  durch  $P$ . Dann nennt man

$$T_P Y := \text{kern}(D\varphi)_P = \{v \mid (D\varphi)_P(v) = 0\}$$

den *Tangentialraum* an die Faser  $Y$  in  $P$ .

Häufig wird auch der an  $P$  angelegte affine Raum

$$P + \text{kern}(D\varphi)_P = \{P + v \mid (D\varphi)_P(v) = 0\}$$

als Tangentialraum bezeichnet. In diesem Sinne ist der Tangentialraum kein Untervektorraum von  $V$ , da er nicht durch den Nullpunkt verlaufen muss, er ist aber die Verschiebung eines Untervektorraums. Solche Räume nennt man *affin-lineare Unterräume*. Sie besitzen eine sinnvoll definierte Dimension, nämlich die Dimension des zugehörigen Vektorraumes. Der Tangentialraum an einem regulären Punkt zu einer Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  besitzt die Dimension  $n - m$ . Der Satz über implizite Abbildungen besagt, dass eine offene Teilmenge des Tangentialraumes an  $P$  sich bijektiv und differenzierbar auf eine offene Umgebung von  $P$  auf der Faser abbilden lässt. Der Tangentialraum ist also eine *lineare Approximation* der Faser.

**Beispiel 52.7.** Wir betrachten die differenzierbare Funktion

$$\varphi: \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x}{y}.$$

Die Jacobi-Matrix dieser Funktion ist

$$\left( \frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} \right),$$

so dass die Funktion in jedem Punkt regulär ist und Satz 52.5 anwendbar ist. In diesem Fall kann man die Fasern auch direkt bestimmen. Die Bedingung

$$\frac{x}{y} = c$$

mit  $c \in \mathbb{R}$  führt auf

$$x = cy,$$

so dass die Fasern der Abbildung die *punktierten Geraden* (d.h. ein Punkt ist rausgenommen) durch den Nullpunkt sind (außer der  $x$ -Achse, auf der die Abbildung nicht definiert ist). Damit hat man explizit eine Auflösung der Faser nach  $x$  gegeben. Dass die Fasern unter dieser *Divisionsabbildung* (punktierte) Geraden sind ist ein Ausdruck davon, dass man Brüche erweitern kann, ohne ihren Wert zu ändern.

Der Tangentialraum in  $P = (x, y)$  wird nach der Definition durch den Kern der Jacobi-Matrix gegeben, und dieser wird durch den Vektor  $(x, y)$  selbst aufgespannt. Der Tangentialraum an  $P$  ist hier also die Gerade, die durch  $P$  und den Nullpunkt definiert ist, und stimmt (bis auf den Nullpunkt) mit der Faser überein.

**Beispiel 52.8.** Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^y$$

und knüpfen an Beispiel 50.9 an. Der einzige kritische Punkt ist  $P = (1, 0)$ , ansonsten ist die Abbildung in jedem Punkt regulär und daher lassen sich lokal die Fasern als Graphen beschreiben. Die Faser über 1 besteht aus der durch  $x = 1$  gegebenen Geraden und der durch  $y = 0$  gegebenen Halbgeraden, die sich im kritischen Punkt senkrecht schneiden. Ansonsten sind die Fasern durch die Gleichung

$$x^y = c$$

mit einem  $c \in \mathbb{R}_+$  bestimmt (für nichtpositives  $c$  sind die Fasern leer). Wir schreiben diese Bedingung als  $e^{(\ln x)y} = c$  und daher als

$$(\ln x)y = \ln c.$$

Bei  $x \neq 1$  kann man dies zu

$$y = \frac{\ln c}{\ln x}$$

auflösen und bei  $y \neq 0$  zu

$$x = e^{\frac{\ln c}{y}}.$$

### Der Satz über die injektive Abbildung

Als ein weiteres Korollar aus dem Satz über die Umkehrabbildung besprechen wir die Situation, wo das totale Differential injektiv ist.

**Satz 52.9.** *Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei  $G \subseteq V$  offen und sei*

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

*eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $P \in V$  ein Punkt, in dem das totale Differential  $(D\varphi)_P$  injektiv sei. Dann gibt es eine offene Umgebung  $U$ ,  $P \in U \subseteq G$ , derart, dass  $\varphi|_U$  injektiv ist.*

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

## 52. ARBEITSBLATT

### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 52.1.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ ,  $U \subseteq V$  offen und

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Es sei

$$\gamma: I \longrightarrow U$$

eine differenzierbare Kurve, die ganz in einer Niveaumenge von  $f$  verläuft. Zeige, dass

$$\langle \text{grad } f(P), \gamma'(t) \rangle = 0$$

ist für  $P = \gamma(t)$  und alle  $t \in I$ .

**Aufgabe 52.2.** Es seien  $L$  und  $M$  Mengen und  $L \times M$  ihre Produktmenge. Beschreibe die Faser der Projektion

$$L \times M \longrightarrow M, (x, y) \longmapsto y,$$

über einem Punkt  $y \in M$ . Kann die Faser leer sein?

**Aufgabe 52.3.** Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3 - x^2 - 2x + 2.$$

Für welche Punkte  $P \in \mathbb{R}$  ist  $\varphi$  regulär? Was besagt der Satz über implizite Abbildungen in dieser Situation? Wie sieht lokal die Faser in einem regulären Punkt aus? Kann es leere Fasern geben? Bestimme die Faser über 0.

**Aufgabe 52.4.** Seien  $L_1, \dots, L_n$  und  $M_1, \dots, M_n$  Mengen und seien

$$\varphi_i: L_i \longrightarrow M_i$$

Abbildungen. Zu einem Punkt  $P_i \in M_i$  sei  $F_i \subseteq L_i$  die Faser von  $\varphi_i$  über  $P_i$ . Zeige, dass die Faser der Produktabbildung  $\varphi = \varphi_1 \times \dots \times \varphi_n$  über  $P = (P_1, \dots, P_n)$  gleich  $F_1 \times \dots \times F_n$  ist.

**Aufgabe 52.5.** Es seien

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetig differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen  $f'$  und  $g'$  stets positiv seien. Zeige, dass die Funktion

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x) + g(y),$$

stetig differenzierbar und in jedem Punkt regulär ist. Man gebe explizit eine Beschreibung der Fasern von  $\varphi$  als Graph an.

**Aufgabe 52.6.** Beschreibe die Fasern der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy.$$

Man gebe, falls dies möglich ist, Diffeomorphismen zwischen  $\mathbb{R}$  und den Fasern von  $\varphi$  an.

**Aufgabe 52.7.** Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy.$$

**Aufgabe 52.8.\***

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto \left( \frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x^2} \right).$$

- Bestimme die regulären Punkte der Abbildung  $\varphi$ .
- Zeige, dass  $\varphi$  in  $P = (1, 2)$  lokal eine differenzierbare Umkehrabbildung  $\psi = \varphi^{-1}$  besitzt, und bestimme das totale Differential von  $\psi$  im Punkt  $\varphi(P)$ .
- Man gebe alle Punkte  $Q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$  an, in denen  $\varphi$  nicht lokal invertierbar ist.

**Aufgabe 52.9.\***

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^4, (a, b, c, d, u, v) \longmapsto (au + bv + c + d, ad - bc, ac - b^2, bd - c^2).$$

- Bestimme die Jacobi-Matrix zu dieser Abbildung.
- Zeige, dass  $\varphi$  im Nullpunkt nicht regulär ist.
- Zeige, dass  $\varphi$  in  $(1, 1, 0, 0, 1, 1)$  regulär ist.

Die nächste Aufgabe knüpft an Aufgabe 33.17 an.

**Aufgabe 52.10.** Im Nullpunkt  $0 \in \mathbb{R}^3$  befinde sich die Pupille eines Auges (oder eine Linse) und die durch  $x = -1$  bestimmte Ebene sei die Netzhaut  $N \cong \mathbb{R}^2$  (oder eine Fotoplatte). Bestimme die Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die das Sehen (oder Fotografieren) beschreibt (d.h. einem Punkt des Halbraumes wird durch den Lichtstrahl ein Punkt der Netzhaut zugeordnet). Ist diese Abbildung differenzierbar? Für welche Punkte ist diese Abbildung regulär, wie sehen die Fasern aus?

In der speziellen Relativitätstheorie ist auf dem  $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  die *Lorentz-Form*

$$\langle v, w \rangle = \langle (t, x_1, \dots, x_n), (s, y_1, \dots, y_n) \rangle := -c^2ts + x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

wichtig, wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit repräsentiert. Diese Form ist eine nicht-ausgeartete Bilinearform vom Typ  $(n, 1)$ . Sie erlaubt es, die „Welt“ in lichtartige, zeitartige und raumartige Vektoren aufzuteilen, und den Zusammenhang dieser fundamentalen Größen zu verstehen. Die zugehörige quadratische Form ist die Abbildung

$$\varphi: V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x_1, \dots, x_n) \longmapsto -c^2t^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Ein Vektor  $v \in V$  heißt *zeitartig*, wenn  $\varphi(v) < 0$  ist, *lichtartig*, wenn  $\varphi(v) = 0$  ist und *raumartig*, wenn  $\varphi(v) > 0$  ist. Mathematisch setzt man im Allgemeinen  $c = 1$ .

**Aufgabe 52.11.** Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x) \longmapsto -t^2 + x^2.$$

Bestimme die regulären Punkte und die Fasern dieser Abbildung.

**Aufgabe 52.12.** Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x, y) \longmapsto -t^2 + x^2 + y^2.$$

Bestimme die regulären Punkte und die Fasern dieser Abbildung.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 52.13.** (5 Punkte)

Zeige, dass die Fasern der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^3,$$

in jedem Punkt  $P = (x, y)$  lokal homöomorph zu einem offenen reellen Intervall sind. D.h. dass es zu jedem Punkt  $P = (x, y)$  eine offene Umgebung  $(x, y) \in U$ , ein offenes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  und eine stetige Bijektion

$$I \longrightarrow U \cap F_P,$$



gibt (wobei  $F_P$  die Faser von  $\varphi$  durch  $P$  bezeichnet), deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

**Aufgabe 52.14.** (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und es sei  $P \in \mathbb{R}^2$  ein isolierter Punkt, d.h. es gebe eine offene Umgebung  $P \in U$  derart, dass  $\varphi(Q) \neq \varphi(P)$  ist für alle  $Q \in U$ ,  $Q \neq P$ . Zeige, dass dann  $\varphi$  in  $P$  ein isoliertes lokales Extremum besitzt.

**Aufgabe 52.15.** (3 Punkte)

Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

**Aufgabe 52.16.** (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2,$$

im Punkt  $P = (1, -1, 2)$ . Man gebe eine differenzierbare Abbildung

$$\psi: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

an, wobei  $U$  eine möglichst große offene Teilmenge des Tangentialraumes  $T_P F$  an die Faser  $F_P$  von  $\varphi$  durch  $P$  ist, die eine Bijektion zwischen  $U$  und  $V \cap F_P$  stiftet ( $P \in V \subseteq \mathbb{R}^3$  offen).

### Aufgaben zum Hochladen

**Aufgabe 52.17.** (5 Punkte)

Sei

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

Man fertige eine Skizze an, die die Fasern, die Tangentialräume und lokale Diffeomorphismen zwischen Tangentialraum und Faser sichtbar macht.

**Aufgabe 52.18.** (5 Punkte)

Sei

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^y.$$

Man fertige Skizzen für den (1) Graph und (2) die Fasern und die Tangentialräume dieser Abbildung an.

## 53. VORLESUNG - PICARD-LINDELÖF

Wir haben schon für verschiedene Differentialgleichungen gezeigt, dass eine Lösung existiert und durch eine Anfangswertbedingung eindeutig bestimmt ist. Der *Satz von Picard-Lindelöf* beweist dies recht allgemein unter der Voraussetzung, dass das Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

**Lipschitz-Bedingung**

Rudolf Lipschitz (1832-1903)

Für den Satz von Picard-Lindelöf wird die Voraussetzung wesentlich sein, dass das Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

**Definition 53.1.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf  $U$ . Man sagt, dass das Vektorfeld  $f$  einer *Lipschitz-Bedingung* genügt, wenn es eine reelle Zahl  $L \geq 0$  gibt mit

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L \cdot \|u - v\|$$

für alle  $t \in I$  und  $u, v \in U$ .

Die reelle Zahl  $L$  nennt man auch eine *Lipschitz-Konstante* für das Vektorfeld  $f$ .

**Definition 53.2.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf  $U$ . Man sagt, dass das Vektorfeld  $f$  lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, wenn es zu jedem Punkt  $(t, v) \in I \times U$  eine offene Umgebung

$$(t, v) \in I' \times U' \subseteq I \times U$$

gibt derart, dass das auf  $I' \times U'$  eingeschränkte Vektorfeld einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Die folgende Aussage liefert ein wichtiges und leicht überprüfbares hinreichendes Kriterium, wann ein Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

**Lemma 53.3.** *Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles offenes Intervall,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und*

$$f: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, v_1, \dots, v_n) \longmapsto f(t, v_1, \dots, v_n),$$

*ein Vektorfeld auf  $U$  derart, dass die partiellen Ableitungen nach  $v_j$  existieren und stetig sind. Dann genügt  $f$  lokal einer Lipschitz-Bedingung.*

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Für ein lineares Differentialgleichungssystem

$$v' = A(t)v + z(t)$$

mit einer stetigen Matrix  $A(t)$  sind die Bedingungen der vorstehenden Aussage erfüllt. Die  $i$ -te Komponente des Vektorfelds besitzt ja die Gestalt

$$f_i(t, v_1, \dots, v_n) = a_{i1}(t)v_1 + \dots + a_{in}(t)v_n + z_i(t).$$

Daraus folgt, dass  $f_i$  nach  $v_j$  partiell ableitbar ist mit der stetigen Ableitung  $a_{ij}(t)$ , so dass die Bedingungen erfüllt sind.

## Differential- und Integralgleichungen

Mit dem Begriff des Integrals einer Kurve, das wir in Vorlesung 36 eingeführt haben, kann man Differentialgleichungen auch als Integralgleichungen schreiben.

**Lemma 53.4.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und*

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

*ein stetiges Vektorfeld auf  $U$ . Es sei  $(t_0, w) \in I \times U$  vorgegeben. Dann ist eine stetige Abbildung*

$$v: J \longrightarrow V, t \longmapsto v(t),$$

*auf einem Intervall  $J \subseteq I$  mit  $t_0 \in J$  genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems (insbesondere muss  $v$  differenzierbar sein)*

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w,$$

wenn  $v$  die Integralgleichung

$$v(t) = w + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds$$

erfüllt.

*Beweis.* Sei die Integralbedingung erfüllt. Dann ist  $v(t_0) = w$  und aufgrund des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung gilt  $v'(t) = f(t, v(t))$ . Insbesondere sichert die Integralbedingung, dass  $v$  differenzierbar ist. Wenn umgekehrt  $v$  eine Lösung des Anfangswertproblems ist, so ist  $v'(s) = f(s, v(s))$  und daher

$$w + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds = w + \int_{t_0}^t v'(s) ds = w + v(t) - v(t_0) = v(t).$$

□

### Der Satz von Picard-Lindelöf

Wir kommen nun zum wichtigsten Existenz- und Eindeutigkeitsatz für die Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

**Satz 53.5.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und*

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

*ein Vektorfeld auf  $U$ . Es sei vorausgesetzt, dass dieses Vektorfeld stetig sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. Dann gibt es zu jedem  $(t_0, w) \in I \times U$  ein offenes Intervall  $J$  mit  $t_0 \in J \subseteq I$  derart, dass auf diesem Intervall eine eindeutige Lösung für das Anfangswertproblem*

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w$$

*existiert.*

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

### Die Picard-Lindelöf-Iteration

Der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf, den wir nicht vorgeführt haben, läuft über die äquivalente Integralgleichung und ist prinzipiell konstruktiv. Darauf beruht die *Picard-Lindelöf-Iteration*, mit der man Lösungen approximieren kann. Die Güte der Approximationen wird dabei durch geeignete Normen auf Funktionenräumen gemessen, was wir nicht ausführen.

**Bemerkung 53.6.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf  $U$ . Es sei  $(t_0, w) \in I \times U$  eine Anfangsbedingung. Es sei vorausgesetzt, dass dieses Vektorfeld stetig sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. In der *Picard-Lindelöf-Iteration* definiert man iterativ eine Folge von Funktionen

$$\varphi_n: I \longrightarrow V$$

durch  $\varphi_0 = w$  (dies ist also die konstante Funktion mit dem Wert  $w$ ) und durch

$$\varphi_{n+1}(t) = w + \int_{t_0}^t F(s, \varphi_n(s)) ds.$$

Dann gibt es ein Teilintervall  $]a, b[ \subseteq I$  mit  $t_0 \in ]a, b[$  derart, dass für  $t \in ]a, b[$  die Folge  $\varphi_n(t)$  gegen einen Punkt  $\varphi(t)$  konvergiert (man sagt, dass die Funktionenfolge punktweise konvergiert; es gelten hier auch stärkere Konvergenzaussagen). Diese Grenzfunktion  $\varphi$  ist dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w.$$

Bei einer linearen Differentialgleichung mit stetigen Koeffizientenfunktionen konvergiert dieses Verfahren auf ganz  $I$ .

Wir wenden dieses Verfahren auf eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen an, für die wir die Lösung schon kennen (siehe Aufgabe 30.7).

**Beispiel 53.7.** Wir wenden die Picard-Lindelöf-Iteration auf die Differentialgleichung

$$y' = F(t, y) = ty$$

mit der Anfangsbedingung  $y(0) = 1$  an. Daher ist  $\varphi_0 = 1$ . Die erste Iteration liefert

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t s ds = 1 + \frac{1}{2}t^2.$$

Die zweite Iteration liefert

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= 1 + \int_0^t F(s, \varphi_1(s)) ds \\ &= 1 + \int_0^t F\left(s, 1 + \frac{1}{2}s^2\right) ds \\ &= 1 + \int_0^t s + \frac{1}{2}s^3 ds \\ &= 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4. \end{aligned}$$

Die dritte Iteration liefert

$$\varphi_3(t) = 1 + \int_0^t F(s, \varphi_2(s)) ds$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \int_0^t F\left(s, 1 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{8}s^4\right) ds \\
&= 1 + \int_0^t s + \frac{1}{2}s^3 + \frac{1}{8}s^5 ds \\
&= 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{48}t^6.
\end{aligned}$$

### Zur Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen

Der Satz von Picard-Lindelöf sagt, dass es unter den gegebenen Voraussetzungen lokal, also auf einem gewissen Teilintervall, eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung gibt. Die folgende Aussage zeigt, dass eine Lösung dort, wo sie definiert ist, eindeutig bestimmt ist. Wir verwenden die folgende Zusammenhangseigenschaft eines reellen Intervalls  $J$ , die aus dem Zwischenwertsatz folgt: Eine nichtleere Teilmenge  $M \subseteq J$ , die sowohl offen als auch abgeschlossen ist, muss gleich ganz  $J$  sein.

**Satz 53.8.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und*

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

*ein stetiges Vektorfeld auf  $U$ , das lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Es sei  $J \subseteq I$  offen und es seien*

$$v_1, v_2: J \longrightarrow V$$

*Lösungen des Anfangswertproblems*

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w.$$

*Dann ist  $v_1 = v_2$ .*

*Beweis.* Wir betrachten die Menge

$$M = \{t \in J \mid v_1(t) = v_2(t)\}.$$

Wegen  $t_0 \in M$  ist diese Menge nicht leer. Zu jedem Punkt  $t \in I$  gibt es nach Satz 53.5 eine offene Intervallumgebung  $t \in J'$ , worauf es zu gegebener Anfangsbedingung  $v(t) = v_0$  genau eine Lösung der Differentialgleichung gibt. Wenn  $t \in M$  ist, so ist  $v_1(t) = v_2(t)$  und daher stimmen  $v_1$  und  $v_2$  in einer offenen Umgebung  $t \in J'$  mit der eindeutigen Lösung und damit untereinander überein. Also ist  $J' \subseteq M$ . Dies bedeutet, dass  $M$  eine offene Teilmenge von  $J$  ist. Andererseits sind  $v_1$  und  $v_2$  stetig und daher ist nach Aufgabe 33.6 die Menge  $M$  auch abgeschlossen in  $M$ . Aus der Vorbemerkung folgt  $M = J$ .  $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, dass ohne die Lipschitz-Bedingung die Lösung eines Anfangswertproblems nicht eindeutig bestimmt ist. In diesem Beispiel

ist das Vektorfeld nach  $v$  ableitbar, die Ableitung ist aber nicht stetig, so dass Lemma 53.3 nicht anwendbar ist.

**Beispiel 53.9.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$v' = 3v^{2/3} \text{ mit } v(0) = 0$$

zum zeitunabhängigen Vektorfeld

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto 3v^{2/3} = 3\sqrt[3]{v^2}.$$

Offensichtlich gibt es die stationäre Lösung

$$h(t) = 0,$$

aber auch

$$g(t) = t^3$$

ist eine Lösung, wie man durch Nachrechnen sofort bestätigt. Aus diesen beiden Lösungen kann man sich noch weitere Lösungen basteln. Seien dazu  $a < b$  reelle Zahlen. Dann ist auch

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t-a)^3 & \text{für } t < a, \\ 0 & \text{für } a \leq t \leq b, \\ (t-b)^3 & \text{für } t > b, \end{cases}$$

eine Lösung. D.h. es gibt Lösungen, bei denen das Teilchen beliebig lange (im Zeitintervall von  $a$  nach  $b$ ) ruht und danach (und davor) sich bewegt. Sobald sich das Teilchen in einem Punkt  $\neq 0$  befindet, ist der Bewegungsablauf lokal eindeutig bestimmt.

**Bemerkung 53.10.** Zu einem stetigen Vektorfeld

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

kann man sich fragen, ob es ein maximales Definitionsintervall  $J$  für die Lösung eines Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w$$

gibt. Dies ist in der Tat der Fall! Man kann nämlich alle Teilmengen

$$J \subseteq I \text{ offen, } t_0 \in J, \text{ es gibt eine Lösung } v_J \text{ auf } J$$

betrachten. Wegen Satz 53.8 stimmen zwei Lösungen  $v_J$  und  $v_{J'}$  auf dem Durchschnitt  $J \cap J'$  überein, und liefern daher eine eindeutige Lösung auf der Vereinigung  $J \cup J'$ . Daher enthält die Menge der Teilintervalle, auf denen eine Lösung definiert ist, ein maximales Teilintervall  $J$ .

Dieses Teilintervall kann kleiner als  $I$  sein. Die Grenzen des maximalen Teilintervalls, auf dem eine Lösung definiert ist, heißen auch *Entweichzeiten*.

**Aufwärmaufgaben**

**Aufgabe 53.1.** Zeige, dass die Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto |x|,$$

Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante 1.

Es sei

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen  $L$  und  $M$ . Dann heißt  $f$  *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt mit folgender Eigenschaft: Für alle  $x, x' \in L$  mit  $d(x, x') \leq \delta$  ist  $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ .

**Aufgabe 53.2.** Es sei

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen  $L$  und  $M$ , die Lipschitz-stetig sei. Zeige, dass  $f$  auch gleichmäßig stetig ist.

**Aufgabe 53.3.** Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x),$$

eine Polynomfunktion vom Grad  $\geq 2$ . Zeige, dass  $f$  nicht gleichmäßig stetig ist.

**Aufgabe 53.4.** Zeige, dass die Funktion

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < \sqrt{2}, \\ 1, & \text{falls } x > \sqrt{2}, \end{cases}$$

stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.



**Aufgabe 53.5.** Sei

$$f: I \times U \longrightarrow V$$

ein stetiges Vektorfeld, das auf einer offenen Menge  $U \subseteq V$  eines endlich-dimensionalen reellen Vektorraums definiert sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Es sei  $W \subseteq V$  ein Untervektorraum mit der Eigenschaft, dass für alle  $t \in I$  und  $P \in U \cap W$  die Beziehung  $f(t, P) \in W$  gilt. Zeige, dass eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ mit } v(t_0) = w \in U \cap W$$

ganz in  $W$  verläuft.

**Aufgabe 53.6.** Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f: ]0, 1[ \longrightarrow \mathbb{R},$$

derart, dass das Bild von  $f$  beschränkt ist und  $f$  nicht gleichmäßig stetig ist.

**Aufgabe 53.7.** Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y^2 + t + yt^2$$

mit der Anfangsbedingung  $y(0) = 0$ .

**Aufgabe 53.8.** Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -t & t^2 \\ 2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung  $x(0) = 1$  und  $y(0) = -1$ .

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 53.9.** (4 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, u, v) \longmapsto (t^2 uv, u^2 - tv^2).$$

Bestimme für jedes  $t \in \mathbb{R}$  die nicht-regulären Punkte des Vektorfeldes

$$f_t: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \longmapsto (t^2 uv, u^2 - tv^2).$$

Welche Ortspunkte sind zu keinem Zeitpunkt regulär?

**Aufgabe 53.10.** (3 Punkte)

Finde für das zeitunabhängige Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Lösungen mit  $u(0) = a$  und  $v(0) = b$ , wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  sind.

**Aufgabe 53.11.** (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(1) = (3, 2, 6)$$

zum ortsunabhängigen Vektorfeld

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, x, y, z) \mapsto t^3(3, 1, 4) - e^{-2t}(2, -1, 7) \\ + (t - t^2 e^t)(0, 4, 5) + (2, 2, 2).$$

**Aufgabe 53.12.** (2 Punkte)

Bestimme in Beispiel 53.7 eine explizite Formel für die Iterationen  $\varphi_n$ .

**Aufgabe 53.13.** (4 Punkte)

Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ t & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung  $x(0) = 1$  und  $y(0) = 1$ .

**Aufgabe 53.14.** (4 Punkte)

Wir betrachten das zeitunabhängige Vektorfeld

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto 3v^{2/3} = 3\sqrt[3]{v^2}.$$

Zeige direkt, dass dieses Vektorfeld stetig ist, aber nicht lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

## 54. VORLESUNG - GRADIENTENFELDER

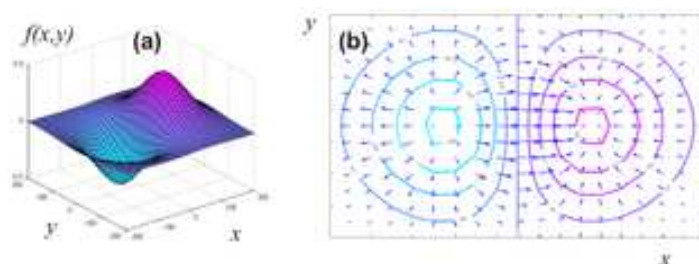
**Definition 54.1.** Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum,  $U \subseteq V$  offen und

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann nennt man die Abbildung

$$U \longrightarrow V, P \longmapsto \text{grad } h(P),$$

das zugehörige *Gradientenfeld*.



Ein Gradientenfeld ist also ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Man spricht auch von einem *Potentialfeld*, die Funktion  $h$  (manchmal  $-h$ ) heißt dann ein Potential des Vektorfeldes. Wenn  $h$  zweimal stetig differenzierbar ist, so genügt nach Lemma 53.3 das zugehörige Gradientenfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung.

Die folgende Aussage zeigt, dass die Lösungskurven der zugehörigen Differentialgleichung  $v' = \text{grad } h(v)$  senkrecht auf den Fasern von  $h$  liegen. Die Fasern beschreiben, wo das Potential (oder die Höhenfunktion) konstant ist, die Lösungen beschreiben den Weg des steilsten Abstiegs. Wenn  $h$  beispielsweise die Höhenfunktion eines Gebirges ist, so gibt das Gradientenfeld in jedem Punkt den steilsten Anstieg an und die Trajektorie einer Lösungskurve beschreibt den Verlauf eines Baches (wir behaupten nicht, dass die Bewegung eines Wassermoleküls im Bach durch diese Differentialgleichung bestimmt ist, sondern lediglich, dass der zurückgelegte Weg, also das Bild der Kurve, mit dem Bild der Lösungskurve übereinstimmt). Der Bach verläuft immer senkrecht zu den Höhenlinien.

**Lemma 54.2.** Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum,  $U \subseteq V$  offen,

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion und

$$U \longrightarrow V, P \longmapsto G(P) = \text{grad } h(P),$$

das zugehörige Gradientenfeld. Es sei

$$\varphi: J \longrightarrow U$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$v' = G(v).$$

Dann steht  $\varphi'(t)$  senkrecht auf dem Tangentialraum  $T_{\varphi(t)}F$  der Faser  $F$  von  $h$  durch  $\varphi(t)$  für alle  $t \in J$ , für die  $\varphi(t)$  reguläre Punkte von  $h$  sind.

*Beweis.* Sei  $P = \varphi(t)$  ein regulärer Punkt von  $h$  und sei  $v \in T_P F$  ein Vektor aus dem Tangentialraum. Dann gilt direkt

$$\langle v, \varphi'(t) \rangle = \langle v, G(\varphi(t)) \rangle = \langle v, \text{grad } h(P) \rangle = (Dh)_P(v) = 0.$$

□

**Beispiel 54.3.** Wir betrachten die *Produktabbildung*

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy.$$

Das zugehörige Gradientenfeld ist

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto G(x, y) = (y, x).$$

Die Fasern von  $h$  sind das Achsenkreuz (die Faser über 0) und die durch  $xy = c$ ,  $c \neq 0$ , gegebenen Hyperbeln. Die Lösungen der Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

sind von der Form

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (a \cosh t + b \sinh t, a \sinh t + b \cosh t)$$

mit beliebigen  $a, b \in \mathbb{R}$ , wie man direkt nachrechnet. Dabei ist  $\varphi(0) = (a, b)$ . Für  $a = b = 0$  ist dies die stationäre Lösung im Nullpunkt, in dem die Produktabbildung nicht regulär ist. Bei  $a = b = 1$  ist  $\varphi(t) = (e^t, e^t)$ , das Bild dieser Lösung ist die obere Halbdiaagonale (ohne den Nullpunkt), bei  $a = b = -1$  ist  $\varphi(t) = (-e^t, -e^t)$ , das Bild dieser Lösung ist die untere Halbdiaagonale, bei  $a = 1$  und  $b = -1$  ist  $\varphi(t) = (e^{-t}, -e^{-t})$ , das Bild dieser Lösung ist die untere Hälfte der Nebendiagonalen, bei  $a = -1$  und  $b = 1$  ist  $\varphi(t) = (-e^{-t}, e^{-t})$ , das Bild dieser Lösung ist die obere Hälfte der Nebendiagonalen.

Ansonsten treffen die Lösungskurven das Achsenkreuz in einem Punkt  $\neq (0, 0)$ . Wenn man diesen Punkt als Anfangswert zum Zeitpunkt  $t = 0$  nimmt, so kann man die Lösungskurven als

$$(a \cosh t, a \sinh t)$$

(zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich die Lösung auf der  $x$ -Achse im Punkt  $(a, 0)$ ), und als

$$(b \sinh t, b \cosh t)$$

(zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich die Lösung auf der  $y$ -Achse im Punkt  $(0, b)$ ) realisieren. Die Bahnen dieser Lösungen erfüllen die Gleichung  $x^2(t) - y^2(t) = a^2$  bzw.  $x^2(t) - y^2(t) = b^2$ , d.h. sie sind selbst Hyperbeln.

## Wegintegrale und Gradientenfelder

**Lemma 54.4.** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und*

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine differenzierbare Funktion mit dem zugehörigen Gradientenfeld  $G = \text{grad } h$ . Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  ein stetig differenzierbarer Weg in  $U$ . Dann gilt für das Wegintegral*

$$\int_{\gamma} G = h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)).$$

*D.h. das Wegintegral hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab.*<sup>28</sup>

*Beweis.* Aufgrund der Kettenregel ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} G &= \int_a^b \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n G_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \\ &= \int_a^b (h \circ \gamma)'(t) dt \\ &= h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)). \end{aligned}$$

□

**Korollar 54.5.** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und*

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine differenzierbare Funktion mit dem zugehörigen Gradientenfeld  $G = \text{grad } h$ . Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  ein stetig differenzierbarer Weg mit  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Dann ist*

$$\int_{\gamma} G = 0.$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Lemma 54.4. □

**Satz 54.6.** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene zusammenhängende Teilmenge<sup>29</sup> und*

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

<sup>28</sup>In einem Potentialfeld ist also die geleistete Arbeit gleich der Potentialdifferenz von Start- und Endpunkt.

<sup>29</sup>Eine offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt (Weg-)zusammenhängend, wenn man je zwei Punkte  $P, Q \in U$  durch einen stetigen Weg miteinander verbinden kann.

- (1)  $G$  ist ein Gradientenfeld.  
 (2) Für jeden stetig differenzierbaren Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  hängt das Wegintegral  $\int_{\gamma} G$  nur vom Anfangspunkt  $\gamma(a)$  und Endpunkt  $\gamma(b)$  ab.

*Beweis.* Die Implikation (1)  $\Rightarrow$  (2) folgt aus Lemma 54.4. Sei umgekehrt die Eigenschaft (2) erfüllt. Wir geben eine auf  $U$  definierte Funktion  $h$  an, die differenzierbar ist und deren Gradientenfeld gleich dem vorgegebenen Vektorfeld ist. Dazu sei ein Punkt  $P \in U$  fixiert. Für jeden Punkt  $Q \in U$  gibt es einen stetig differenzierbaren Weg<sup>30</sup>

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$$

mit  $\gamma(a) = P$  und  $\gamma(b) = Q$ . Wir setzen

$$h(Q) := \int_{\gamma} G.$$

Aufgrund der vorausgesetzten Wegunabhängigkeit des Integrals ist  $h(Q)$  wohldefiniert. Wir müssen zeigen, dass diese so definierte Funktion in jedem Punkt  $Q \in U$  und in jede Richtung  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar ist und die Richtungsableitung mit  $\langle G(Q), v \rangle$  übereinstimmt. Dazu betrachten wir

$$h(Q + tv) - h(Q) = \int_{\delta} G = \int_0^t \sum_{i=1}^n G_i(Q + sv) \cdot v_i ds,$$

wobei  $\delta$  der verbindende lineare Weg von  $Q$  nach  $Q + tv$  sei (und  $t$  hinreichend klein sei, sodass  $Q + tv \in U$  ist). Für den Differentialquotienten ist

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(Q + tv) - h(Q)}{t} &= \sum_{i=1}^n \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t G_i(Q + sv) \cdot v_i ds \\ &= \sum_{i=1}^n G_i(Q) \cdot v_i \\ &= \langle G(Q), v \rangle. \end{aligned}$$

□

## Die Integrabilitätsbedingung

Wie kann man erkennen, ob ein gegebenes Vektorfeld ein Gradientenfeld ist? Eine notwendige Bedingung schlägt sich in der folgenden Definition nieder.

**Definition 54.7.** Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

<sup>30</sup>Aus der Existenz eines verbindenden stetigen Weges folgt die Existenz eines verbindenden stetig differenzierbaren Weges. Man könnte also auch diese Eigenschaft als Definition für zusammenhängend nehmen.

ein differenzierbares Vektorfeld. Man sagt, dass  $G$  die *Integrabilitätsbedingung* erfüllt (oder *lokal integrabel* ist), wenn

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(P) = \frac{\partial G_j}{\partial x_i}(P)$$

für alle  $P \in U$  und alle  $i, j$  gilt.

**Lemma 54.8.** *Das Gradientenfeld einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion erfüllt die Integrabilitätsbedingung.*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 45.11. □

**Beispiel 54.9.** Das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (-y, x),$$

erfüllt wegen

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial G_2}{\partial x}$$

nicht die Integrabilitätsbedingung. Es kann also nach Lemma 54.8 kein Gradientenfeld sein.

**Definition 54.10.** Eine Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *sternförmig* bezüglich eines Punktes  $P \in T$ , wenn für jeden Punkt  $Q \in T$  die Verbindungsstrecke  $sQ + (1-s)P$ ,  $s \in [0, 1]$ , ganz in  $T$  liegt.

**Satz 54.11.** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine sternförmige offene Teilmenge und*

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

- (1)  $G$  ist ein Gradientenfeld.
- (2)  $G$  erfüllt die Integrabilitätsbedingung.
- (3) Für jeden stetig differenzierbaren Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  hängt das Wegintegral  $\int_\gamma G$  nur vom Anfangspunkt  $\gamma(a)$  und Endpunkt  $\gamma(b)$  ab.

*Beweis.* Die Äquivalenz (1)  $\iff$  (3) folgt aus Satz 54.6 und die Implikation (1)  $\implies$  (2) aus Lemma 54.8. Es bleibt also (2)  $\implies$  (1) zu zeigen, wobei wir explizit eine Stammfunktion  $h$  zum Vektorfeld  $G$  angeben. Es sei  $P \in U$  ein Punkt derart, dass  $U$  bezüglich  $P$  sternförmig ist. Wir definieren  $h(Q)$  über das Wegintegral zu  $G$  zum linearen Verbindungsweg

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow U, t \longmapsto P + t(Q - P),$$

also

$$h(Q) = \int_\gamma G = \int_0^1 \langle G(\gamma(t)), Q - P \rangle.$$

Wir müssen zeigen, dass der Gradient zu  $h$  gleich  $G$  ist, d.h. es ist  $\frac{\partial h}{\partial x_i} = G_i$  zu zeigen. Dafür können wir  $P = 0$  annehmen und wir schreiben  $v$  statt  $Q$ . Mit diesen Bezeichnungen und Voraussetzungen ist

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_i} h(v) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \int_0^1 \langle G(tv), v \rangle dt \right) \\
 &= \int_0^1 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \langle G(tv), v \rangle \right) dt \\
 &= \int_0^1 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^n G_j(tv) \cdot v_j \right) \right) dt \\
 &= \int_0^1 t \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_i} G_j(tv) + G_i(tv) dt \\
 &= \int_0^1 t \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j} G_i(tv) + G_i(tv) dt \\
 &= \int_0^1 (t \mapsto t \cdot G_i(tv))' dt \\
 &= G_i(v).
 \end{aligned}$$

Dabei beruht die zweite Gleichung auf der Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation (das haben wir nicht bewiesen), die vierte Gleichung auf Aufgabe 54.9, die fünfte Gleichung auf der Integrabilitätsbedingung und die sechste Gleichung auf der Kettenregel.  $\square$

**Beispiel 54.12.** Wir betrachten das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x,y) \longmapsto \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x).$$

Wegen

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-(x^2 + y^2) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

und

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

erfüllt dieses Vektorfeld die Integrabilitätsbedingung. Es handelt sich aber nicht um ein Gradientenfeld, da das Wegintegral zum Einheitskreis nicht 0 ist im Gegensatz zu Korollar 54.5.



## 54. ARBEITSBLATT

## Aufwärmaufgaben

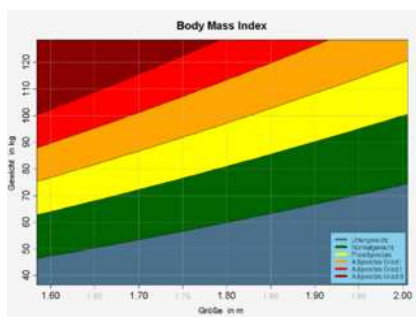
**Aufgabe 54.1.** Es sei

$$h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform. Bestimme das zugehörige Gradientenfeld und die Lösungen der zugehörigen Differentialgleichung.

**Aufgabe 54.2.** Skizziere die Höhenlinien und das Gradientenfeld zur Funktion

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 2(x - 3)^2 + 3(y - 1)^2.$$



**Aufgabe 54.3.** Der Body-Mass-Index wird bekanntlich über die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, (m, l) \longmapsto \frac{m}{l^2},$$

berechnet, wobei  $m$  für die Masse und  $l$  für die Länge eines Menschen (oder eines Tieres, einer Pflanze, eines Gebäudes) steht (in den Einheiten Kilogramm und Meter).

- (1) Für welche Punkte ist diese Abbildung regulär?
- (2) Skizziere das zugehörige Gradientenfeld.
- (3) Wenn man seinen Body-Mass-Index verringern möchte, und dabei dem Gradienten dieser Abbildung vertraut, sollte man dann besser abnehmen oder größer werden? Inwiefern hängt dies vom Punkt, inwiefern von den gewählten Einheiten ab?
- (4) Wie lassen sich die Fasern dieser Abbildung als Graphen von Funktionen beschreiben?
- (5) Berechne die Hesse-Matrix von  $\varphi$  und bestimme ihren Typ in jedem Punkt.

- (6) Zu welchen Daten wird das Maximum bzw. das Minimum des Body-Mass-Index angenommen, wenn man ihn auf  $[30, 300] \times [1, 2]$  einschränkt, und welche Werte besitzt er dann?
- (7) Modelliere die Abbildung, die den Menschen aus einer Menge  $T$  ihren Body-Mass-Index zuordnet, mittels Messungen, Produktabbildung und Hintereinanderschaltung.

### Aufgabe 54.4.\*

Sei

$$G: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein Gradientenfeld und sei

$$\varphi: J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

( $J \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall) eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung  $v' = G(v)$ . Es gelte  $\varphi'(t) \neq 0$  für alle  $t \in J$ . Zeige, dass  $\varphi$  injektiv ist.



Die Himmelscheibe von Nebra. Ist die Mondsichel darauf sternförmig?

**Aufgabe 54.5.** Betrachte zu  $r, s \in \mathbb{R}_+$  mit  $r + s > 1$  und  $s < r + 1$  die „sichelförmige“ Menge

$$M_{r,s} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq r, \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq s \right\}.$$

Für welche  $r, s$  ist diese Menge sternförmig?

**Aufgabe 54.6.** Zeige, dass das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (2x - y \cos x, -\sin x),$$

ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potential dazu.

Ob ein Vektorfeld auf  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  die Integrabilitätsbedingung erfüllt lässt sich äquivalent mit der sogenannten Rotation ausdrücken.

Zu einem partiell differenzierbaren Vektorfeld

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  nennt man

$$\operatorname{rot}(G)(P) := \begin{pmatrix} \frac{\partial G_3}{\partial x_2}(P) - \frac{\partial G_2}{\partial x_3}(P) \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_3}(P) - \frac{\partial G_3}{\partial x_1}(P) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(P) - \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(P) \end{pmatrix}$$

die *Rotation* von  $G$ .

Die Rotation ist ebenfalls ein Vektorfeld.

**Aufgabe 54.7.** Es sei

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ . Zeige, dass  $G$  genau dann die Integrabilitätsbedingung erfüllt, wenn  $\operatorname{rot}(G) = 0$  ist.

**Aufgabe 54.8.** Berechne zum Vektorfeld

$$G: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto \left( x^3 - z^2, \frac{xy}{z}, \frac{z}{x^2y} \right)$$

die Rotation.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 54.9.** (4 Punkte)

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung, die zum Gradientenfeld der Funktion

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x + y^2,$$

gehört.

**Aufgabe 54.10.** (3 Punkte)

Welche linearen Vektorfelder

$$G: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, v \longmapsto Mv,$$

sind Gradientenfelder? Wie sehen die Potentialfunktionen dazu aus?

**Aufgabe 54.11.** (3 Punkte)

Zeige, dass das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (ye^z - 3x^2z, xe^z + 2yz, xye^z + y^2 - x^3),$$

ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potential dazu.

**Aufgabe 54.12.** (3 Punkte)

Berechne zum Vektorfeld

$$G: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0, z > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto \left( \frac{e^{3x} - z}{y}, \frac{\cos x}{z^2}, \frac{\ln z}{xy} \right)$$

die Rotation.

**Aufgabe zum Hochladen****Aufgabe 54.13.** (5 Punkte)

Fertige eine Illustration zu Beispiel 54.3 an.

## 55. VORLESUNG - VOLUMINA

**Volumenberechnungen**

Ein  $n$ -dimensionaler (achsenparalleler) Quader

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$$

hat nach Definition das  $n$ -dimensionale Volumen

$$\lambda^n(Q) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Bei  $n = 1$  handelt es sich um die Streckenlänge, bei  $n = 2$  um den Flächeninhalt eines Rechtecks, bei  $n = 3$  um das Volumen eines Quaders. Im Rahmen der Maßtheorie versucht man „möglichst vielen“ Teilmengen  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  ein sinnvolles Volumen, geschrieben

$$\lambda^n(T),$$

zuzuordnen. Dies ist eine recht aufwändige Theorie, von der wir hier nur einige Prinzipien, Ergebnisse und Berechnungsansätze vorstellen können. Wir beschränken uns auf kompakte, also abgeschlossene und beschränkte Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  (diese stellen wir uns als einen „starrten Körper“ vor). Für den Subgraphen zu einer Funktion, also die Menge (die in der Tat beschränkt und abgeschlossen ist)

$$\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

zu einer stetigen Funktion

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

haben wir schon verwendet, dass der Flächeninhalt durch das bestimmte Integral der Funktion berechnet werden kann. Integration ist das wichtigste Hilfsmittel zur numerischen Bestimmung von allgemeinen Volumina.

Wir besprechen nun einige wichtige Prinzipien von Volumina.

### Überpflasterungseigenschaften

Integrierbare Funktionen hatten wir über Ober- und Untersummen eingeführt. Für eine beliebige (kompakte) Teilmenge  $T$  kann man das Volumen ebenfalls über Obersummen berechnen, wobei man Überpflasterungen von  $T$  mit einer Familie von (achsenparallelen) Quadern  $Q_i$ ,  $i \in I$ , betrachtet.

**Definition 55.1.** Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge. Eine Familie von (achsenparallelen) Quadern  $Q_i$ ,  $i \in I$ , mit  $T \subseteq \bigcup_{i \in I} Q_i$  nennt man eine *Quader-Überpflasterung* von  $T$ .

Zu einer endlichen Überpflasterung (bei der also die Indexmenge  $I$  endlich ist) nennt man die Summe  $\sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i)$  die *Quadersumme* (oder *Quadervolumensumme* oder *Gesamtvolumensumme*) der Überpflasterung. Eine wichtige Charakterisierung des Volumens einer kompakten Teilmenge ist, dass sie gleich dem Infimum über alle Quadersummen von Überpflasterungen ist.

**Satz 55.2.** *Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge. Dann ist das  $n$ -dimensionale Volumen von  $T$  gleich dem Infimum über die Volumensumme aller endlichen Quader-Überpflasterungen  $Q_i$ ,  $i \in I$ , von  $T$ , also*

$$\lambda^n(T) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i) \mid T \subseteq \bigcup_{i \in I} Q_i \right\}.$$

Man könnte insbesondere die rechte Seite, also das Infimum über die Quadervolumensummen von Überpflasterungen, als Definition des Volumens ansetzen. Die Aussage gilt auch, wenn man mit beliebigen Quadern statt nur mit achsenparallelen Quadern arbeitet.

**Bemerkung 55.3.** Eine abgeschlossene, aber nicht beschränkte Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  wird nicht durch endlich viele Quader überpflastert. Diese Mengen haben aber dennoch ein sinnvolles Volumen (das unendlich sein kann) und es gilt auch eine entsprechende Aussage zu Satz 55.2, wobei man allerdings als Indexmenge die natürlichen Zahlen zulassen muss. Zu einer Überpflasterung  $T \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$  muss man  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda^n(Q_i)$  als Reihe von nichtnegativen Zahlen interpretieren. Da wir uns für das Infimum interessieren, sind hierbei nur die konvergenten Reihen relevant (wenn es keine Überpflasterung mit endlicher

Volumensumme gibt, so besitzt die Teilmenge das Volumen  $\infty$ ). Diese Betrachtung ist beispielsweise dann nötig, wenn man uneigentliche Integrale als Flächeninhalt eines (unbeschränkten) Subgraphen verstehen möchte.

Wir erwähnen einige weitere wichtige Eigenschaften des Volumens. Diese Eigenschaften werden natürlich von einer sinnvollen Volumentheorie erwartet, ihr Nachweis kann aber im einzelnen schwierig sein.

**Lemma 55.4.** (1) Für kompakte Teilmengen  $T_1$  und  $T_2$  in  $\mathbb{R}^n$  mit  $T_1 \subseteq T_2$  ist

$$\lambda^n(T_1) \leq \lambda^n(T_2).$$

(2) Für  $T \subseteq \bigcup_{i \in I} T_i$  mit kompakten Teilmengen  $T, T_i$  ( $I$  endlich) ist

$$\lambda^n(T) \leq \sum_{i \in I} \lambda^n(T_i).$$

*Beweis.* Wir argumentieren über die Überpflasterungseigenschaft im Sinne von Satz 55.2. Die Eigenschaft (1) ist klar, da eine Quaderüberpflasterung der größeren Menge insbesondere eine Überpflasterung der kleineren Menge ist.

Zum Beweis von (2) können wir uns auf zwei kompakte Teilmengen  $T_1$  und  $T_2$  beschränken. Wenn  $Q_i, i \in I$ , eine endliche Überpflasterung von  $T_1$  und  $P_i, i \in I$ , eine endliche Überpflasterung von  $T_2$  ist, so ist deren Vereinigung eine Überpflasterung von  $T_1 \cup T_2$ . Daher ist das Volumen von  $T_1 \cup T_2$  maximal gleich der Summe.  $\square$

**Lemma 55.5.** Es seien  $T_1$  und  $T_2$  disjunkte kompakte Teilmengen im  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist

$$\lambda^n(T_1 \cup T_2) = \lambda^n(T_1) + \lambda^n(T_2).$$

*Beweis.* Die Abschätzung  $\leq$  folgt aus Lemma 55.4 (2).

Für die andere Abschätzung sei eine Überpflasterung von  $T_1 \cup T_2$  gegeben. Aufgrund der Disjunktheit und der Kompaktheit gibt es einen positiven Abstand zwischen den beiden Mengen, d.h. es gibt ein  $\epsilon > 0$  derart, dass  $d(P_1, P_2) > 0$  ist für alle  $P_1 \in T_1, P_2 \in T_2$ . Einen Quader aus der Überpflasterung, der beide Teilmengen schneidet, kann man dann in endlich viele Quader unterteilen, so dass diese zu (mindestens) einer der beiden Mengen disjunkt sind. So erreicht man eine Verfeinerung der Überpflasterung mit der gleichen Quadervolumensumme, deren Quader nur eine Teilmenge treffen. Daher ist die Volumensumme dieser Überpflasterung gleich der Summe der Volumensumme der beiden Teilüberpflasterungen und damit mindestens so groß wie  $\lambda^n(T_1) + \lambda^n(T_2)$ .  $\square$

**Lemma 55.6.** Es seien  $T_1 \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $T_2 \subseteq \mathbb{R}^m$  kompakte Teilmengen. Dann gilt für die Produktmenge  $T_1 \times T_2 \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$  die Beziehung

$$\lambda^{n+m}(T_1 \times T_2) = \lambda^n(T_1) \cdot \lambda^m(T_2).$$

Eine typische Produktmenge ist ein *Zylinder*, also das Produkt aus einer Grundmenge  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  und einer Strecke, also einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Sein Volumen ist das Produkt aus dem Volumen der Grundmenge und der Streckenlänge.

**Lemma 55.7.** *Es sei  $V \subset \mathbb{R}^n$  ein Untervektorraum der Dimension  $k < n$  und  $T \subseteq V$  eine kompakte Teilmenge. Dann ist  $\lambda^n(T) = 0$ .*

Man beachte, dass dies eine Aussage über das  $n$ -dimensionale Volumen ist, nicht über das  $k$ -dimensionale Volumen als Teilmenge in  $V \cong \mathbb{R}^k$ . Insbesondere besitzen einzelne Punkte im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , das Volumen 0. Da sich jede Teilmenge aus seinen Einzelpunkten zusammensetzt, kann die obige Vereinigungsregel nicht für beliebige Vereinigungen gelten, d.h. die Gleichungskette

$$\lambda^n(T) = \lambda^n\left(\bigcup_{P \in T} \{P\}\right) = \sum_{P \in T} \lambda^n(\{P\}) = \sum_{P \in T} 0 = 0$$

ist falsch (andernfalls hätte jede Teilmenge das Volumen 0). Teilmengen, deren Volumen 0 ist, nennt man *Nullmenge*.

### Volumina und lineare Abbildungen

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Maßtheorie ist die *Translationsinvarianz*. Für eine beliebige Teilmenge  $T \subseteq V$  in einem Vektorraum  $V$  und einen Vektor  $v \in V$  nennt man

$$T + v = \{x + v \mid x \in T\}$$

die um  $v$  *verschobene Menge*.

**Lemma 55.8.** *Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge und  $v \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist*

$$\lambda^n(T + v) = \lambda^n(T).$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus der Überpflasterungseigenschaft, da beliebige Quader-Überpflasterungen mitverschoben werden können und so über die gleiche Menge das Infimum gebildet wird.  $\square$

Für lineare Abbildungen gilt die folgende Beziehung zwischen dem Volumen einer Teilmenge und dem Volumen ihres Bildes.

**Satz 55.9.** *Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge und*

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, x \longmapsto \varphi(x),$$

*eine lineare Abbildung. Dann ist*

$$\lambda^n(\varphi(T)) = |\det \varphi| \cdot \lambda^n(T).$$

*Beweis.* Dies folgt u.A. aus der multiplikativen Zerlegung einer Matrix in Elementarmatrizen und eine Diagonalmatrix (siehe Satz 10.8) und aus dem Determinantenmultiplikationssatz.  $\square$

**Korollar 55.10.** *Bei einer Streckung*

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, v \longmapsto av,$$

um den Streckungsfaktor  $a \in \mathbb{R}$  gilt für jede kompakte Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  die Formel

$$\lambda^n(\varphi(T)) = |a|^n \cdot \lambda^n(T).$$

*Beweis.* Dies ist ein Spezialfall von Satz 55.9  $\square$

**Beispiel 55.11.** Den Flächeninhalt des Einheitskreises haben wir in Beispiel 25.10 über ein Integral als  $\pi$  bestimmt. Unter der durch die Matrix  $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$  gegebenen linearen Abbildung wird der Einheitskreis

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

auf

$$\begin{aligned} \{(ax, by) | x^2 + y^2 \leq 1\} &= \left\{ (u, v) \mid \frac{1}{a^2}u^2 + \frac{1}{b^2}v^2 \leq 1 \right\} \\ &= \{(u, v) | b^2u^2 + a^2v^2 \leq a^2b^2\} \end{aligned}$$

abgebildet. Das Bild ist eine (achsenparallele) Ellipse. Ihr Flächeninhalt ist nach Satz 55.9 gleich  $\pi ab$ .

### Das Cavalieri-Prinzip



Bonaventura Cavalieri (1598-1647)



Für Berechnungen ist das *Cavalieri-Prinzip* entscheidend. Mit ihm wird die Berechnung eines  $n$ -dimensionalen Volumens auf die Integration des  $(n - 1)$ -dimensionalen Volumens des Querschnitts des Körpers  $T$  zurückgeführt. Zu einer Teilmenge  $T \subseteq [a, b] \times \mathbb{R}^{n-1}$  und einem  $x \in [a, b]$  nennt man  $T(x) = (\{x\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap T$  den *Querschnitt* von  $T$  durch  $x$ . Der Querschnitt ist eine kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^{n-1}$  und besitzt somit ein  $(n - 1)$ -dimensionale Volumen, das mit  $x$  variiert.



**Satz 55.12.** *Es sei  $T \subseteq [a, b] \times \mathbb{R}^{n-1}$  eine kompakte Teilmenge und es sei vorausgesetzt, dass die Funktion*

$$h: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto h(x) = \lambda^{n-1}(x \times \mathbb{R}^{n-1} \cap T)$$

*stetig ist. Dann ist*

$$\lambda^n(T) = \int_a^b h(x) dx.$$

**Beispiel 55.13.** Wir wollen das Volumen einer dreidimensionalen abgeschlossenen Kugel vom Radius  $r$  berechnen, also von

$$B(r) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq r\}.$$

Wegen Satz 55.9 gilt dabei  $\lambda^3(B(r)) = r^3 \lambda^3(B(1))$ , d.h. es geht im Wesentlichen darum, das Volumen der Einheitskugel auszurechnen.

Für jedes fixierte  $u$ ,  $-1 \leq u \leq 1$ , kann man den Querschnitt als

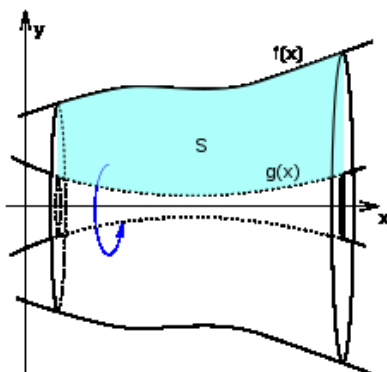
$$\begin{aligned} T(h) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in B(1) \mid x_3 = u\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1 - u^2\} \end{aligned}$$

schreiben, d.h. als eine Kreisfläche vom Radius  $\sqrt{1 - u^2}$ . Aufgrund des Cavalieri-Prinzips ist daher

$$\begin{aligned} \lambda^3(B(1)) &= \int_{-1}^1 \lambda^2(B_2(\sqrt{1 - u^2})) dh \\ &= \pi \int_{-1}^1 1 - u^2 du \\ &= \pi \left( u - \frac{1}{3} u^3 \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \pi \left( 1 - \frac{1}{3} - \left( -1 + \frac{1}{3} \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \pi \frac{4}{3}.$$

### Rotationsmengen und Kegel



**Definition 55.14.** Zu einer Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  nennt man

$$\{(x, y \cos \alpha, y \sin \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T, \alpha \in [0, 2\pi]\}$$

die zugehörige *Rotationsmenge* (um die  $x$ -Achse).

Zu einer Funktion

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

nennt man die Rotationsmenge (oder Rotationskörper) zum Subgraphen zu  $f$  auch den Rotationskörper zu  $f$ .

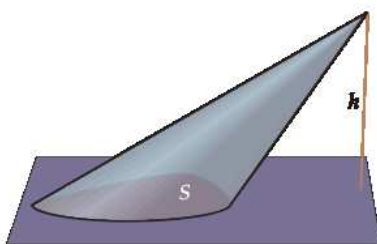
**Satz 55.15.** *Es sei*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, t \longmapsto f(t),$$

*eine stetige Funktion und sei  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  der Rotationskörper zu  $f$  um die  $x$ -Achse. Dann besitzt  $K$  das Volumen*

$$\lambda^3(K) = \pi \cdot \int_a^b f(t)^2 dt.$$

*Beweis.* Die Querschnittsfläche zu  $t$  ist ein Kreis mit Radius  $f(t)$ , dessen Flächeninhalt ist  $\pi f(t)^2$  nach Beispiel 25.10. Somit folgt die Aussage aus dem Cavalieri-Prinzip.  $\square$



**Definition 55.16.** Es sei  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $P \in \mathbb{R}^{n+1}$  ein Punkt. Dann nennt man die Menge

$$K_B = \{P + t(Q - P) \mid Q \in B, t \in [0, 1]\}$$

den *Kegel* zur Basis  $B$  mit der Spitze  $P$ .

**Satz 55.17.** Es sei  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt,  $P \in \mathbb{R}^{n+1}$  ein Punkt und  $K_B$  der zugehörige Kegel. Es sei  $h = P_{n+1}$  die letzte Koordinate von  $P$ . Dann ist  $K_B$  ebenfalls kompakt, und es gilt

$$\lambda^{n+1}(K_B) = \frac{1}{n+1} \lambda^n(B) \cdot |h|.$$

*Beweis.* Der Durchschnitt von  $K = K_B$  mit der durch  $x_{n+1} = u$ ,  $u$  zwischen 0 und  $h$ , gegebenen Hyperebene ist

$$K(u) = \{(x_1, \dots, x_n, u) \mid (x_1, \dots, x_n, u) \in K_B\} = \left\{ P + \frac{(h-u)}{h}(Q - P) \mid Q \in B \right\}.$$

Wegen der Translationsinvarianz und Korollar 55.10 ist dessen Volumen gleich  $\left|\frac{h-u}{h}\right|^n \lambda^n(B)$ . Nach dem Cavalieri-Prinzip ist also (mit  $s = h - u$ )

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1}(K_B) &= \int_0^{|h|} \lambda^n(K(s)) \, ds \\ &= \int_0^{|h|} \lambda^n(B) \cdot \left(\frac{s}{|h|}\right)^n \, ds \\ &= \lambda^n(B) \cdot \frac{1}{|h|^n} \cdot \int_0^{|h|} s^n \, ds \\ &= \lambda^n(B) \cdot \frac{1}{|h|^n} \cdot \frac{1}{n+1} |h|^{n+1} \\ &= \lambda^n(B) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot |h|. \end{aligned}$$

□

### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 55.1.** Bestimme das Volumen einer gleichseitigen Pyramide (eines *Tetraeders*) mit Seitenlänge 1.

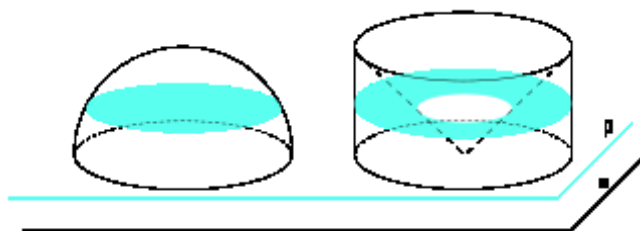
**Aufgabe 55.2.** Es seien drei Punkte  $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$  gegeben. Zeige, dass der Flächeninhalt des durch diese drei Punkte bestimmten Dreiecks eine rationale Zahl ist.

**Aufgabe 55.3.** Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Sinusbogen zwischen 0 und  $\pi$  um die  $x$ -Achse gedreht wird.

**Aufgabe 55.4.** Bestimme das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die Standardparabel um die  $y$ -Achse gedreht wird und dies mit der Ebene zu  $y = h$  „gedeckt“ wird, in Abhängigkeit von  $h \geq 0$ .

**Aufgabe 55.5.** Berechne das Volumen der Einheitskugel mit dem Cavalieri-Prinzip.

**Aufgabe 55.6.** Fasse die Einheitskugel als Rotationskörper auf und berechne damit ihr Volumen.



**Aufgabe 55.7.** Bestimme das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn man aus dem Einheitszylinder, dessen Grundfläche eine Einheitskreisscheibe ist und der die Höhe 1 besitzt, den (offenen) Kegel herausnimmt, der den oberen Zylinderdeckel als Grundfläche und den unteren Kreismittelpunkt als Spitze besitzt.

**Aufgabe 55.8.\***

Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man den Graphen der Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, t \longmapsto t + \sqrt{t} + 1,$$

um die  $t$ -Achse rotieren lässt.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 55.9.** (5 Punkte)

Es sei  $K$  die Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt in  $(0, R)$  und dem Radius  $0 < r < R$ . Berechne das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn sich  $K$  um die  $x$ -Achse dreht.

**Aufgabe 55.10.** (6 Punkte)

Es sei  $V$  der Viertelkreis mit dem Mittelpunkt in  $(1, 0)$ , dem Radius 1 und den Eckpunkten  $(0, 0)$  und  $(1, 1)$ . Berechne das Volumen des „runden Trichters“, der entsteht, wenn man  $V$  um die  $y$ -Achse dreht.

**Aufgabe 55.11.** (5 Punkte)

Es sei  $D$  das Dreieck mit den Eckpunkten  $(3, 4)$ ,  $(5, 5)$  und  $(4, 6)$ . Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man  $D$  um die  $x$ -Achse dreht.

**Aufgabe 55.12.** (4 Punkte)

Berechne das Volumen des Kegels, dessen Spitze in  $(2, 3, 5)$  liegt und dessen Grundfläche die durch

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 2y^2 \leq 4\}$$

gegebene Ellipse ist.

**Aufgabe 55.13.** (6 Punkte)

Es sei  $T$  ein Kreissektor des Einheitskreises zum Winkel  $\alpha$  (im Bogenmaß). Begründe mit Überpflasterungseigenschaften und mit Satz 55.9, dass der Flächeninhalt von  $T$  gleich  $\frac{\alpha}{2}$  ist.

## 56. VORLESUNG - MEHRFACHINTEGRALE

Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge und es sei

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine stetige Funktion. Wir wollen das Integral  $\int_T f d\lambda^n$  definieren, wofür man, wenn die Variablen des  $\mathbb{R}^n$  mit  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bezeichnet werden, auch

$$\int \int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

schreibt. Diese Schreibweise wird dann bevorzugt, wenn die jeweiligen Grenzen sinnvoll beschrieben werden können und so die Berechnung des Integrals auf die sukzessive Berechnung von  $n$  Einzelintegralen (in einer Variablen) zurückgeführt werden kann. Bei  $n = 2$  spricht man von einem *Doppelintegral* und bei  $n = 3$  von einem *Dreifachintegral*.

Eine wichtige Interpretation des Integrals ist, dass  $f$  eine *Massenverteilung* (oder Ladungsverteilung oder Temperaturverteilung) auf dem Körper  $T$  beschreibt. In diesem Fall ist das Integral gleich der Gesamtmasse des Körpers  $T$ . Bei  $f = 1$ , also bei einer konstanten Massenverteilung, erhält man über ein Integral das Volumen des Grundkörpers. Wir führen das Integral als  $(n + 1)$ -dimensionales Volumen des Subgraphen ein.

**Definition 56.1.** Sei  $T$  eine Menge und

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine nichtnegative Funktion. Dann nennt man die Menge

$$S(f) = \{(x, y) \in T \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

den *Subgraph* der Funktion.

**Definition 56.2.** Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge und

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine stetige Funktion. Es sei  $S(f)$  der Subgraph dieser Funktion. Dann setzt man

$$\int_T f d\lambda^n := \lambda^{n+1}(S(f))$$

und nennt dies das (mehrdimensionale) *Integral* über  $T$  zu  $f$ .

Damit wird der Integralbegriff auf den Volumenbegriff zurückgeführt. Für eine stetige, aber nicht notwendigerweise nichtnegative Funktion  $f$  zerlegt man den Definitionsbereich in die beiden Teilmengen  $T_{\geq 0} = \{P \in T \mid f(P) \geq 0\}$  und  $T_{\leq 0} = \{P \in T \mid f(P) \leq 0\}$ , die ebenfalls kompakt sind, und setzt

$$\int_T f d\lambda^n = \int_{T_{\geq 0}} f d\lambda^n - \int_{T_{\leq 0}} (-f) d\lambda^n.$$

Ebenso kann man die positiven und negativen Funktionen  $f_+ = \min(f, 0)$  und  $f_- = \min(-f, 0)$  einführen und das Integral als  $\int_T f_+ d\lambda^n - \int_T f_- d\lambda^n$  ansetzen.

Aus allgemeinen Volumenregeln ergeben sich die folgenden Integrationsregeln.

**Lemma 56.3.** *Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge und es seien*

$$f, g: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

*stetige Funktionen. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_T af + bg d\lambda^n = a \int_T f d\lambda^n + b \int_T g d\lambda^n.$$

(2) Aus  $f(P) \leq g(P)$  für alle  $P \in T$  folgt  $\int_T f d\lambda^n \leq \int_T g d\lambda^n$ .

(3) Wenn es eine Zerlegung  $T = T_1 \cup T_2$  in kompakte Teilmengen mit  $\lambda^n(T_1 \cap T_2) = 0$  gibt, so ist

$$\int_T f d\lambda^n = \int_{T_1} f d\lambda^n + \int_{T_2} f d\lambda^n.$$

Die letzte Aussage ist auch ein Ansatz, um das Integral zu einer Funktion zu definieren, die nicht notwendigerweise stetig ist. Wenn es eine Zerlegung  $T = \bigcup_{i \in I} T_i$  in endlich viele kompakte Teilmengen  $T_i$  gibt derart, dass das Volumen der Durchschnitte  $T_i \cap T_j$  für  $i \neq j$  jeweils 0 ist (die Durchschnitte müssen also Nullmengen sein) und dass die Einschränkungen  $f_i = f|_{T_i}$  stetig sind, so setzt man  $\int_T f d\lambda^n = \sum_{i \in I} \int_{T_i} f_i d\lambda^n$ . Eine solche Zerlegung ist auch bei stetigen Funktionen häufig sinnvoll.

### Der Satz von Fubini

Ein besonders einfacher Fall liegt vor, wenn  $T = [a, b] \times [c, d]$  ein Rechteck ist. Diese Situation wird durch den *Satz von Fubini* abgedeckt.



**Satz 56.4.** *Es sei*

$$f: [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} f d\lambda^2 = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) d\lambda^1 \right) d\lambda^1 = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) d\lambda^1 \right) d\lambda^1.$$

*Beweis.* Der Querschnitt des Subgraphen zu  $x = x_0$  ist der Subgraph der auf  $x = x_0$  eingeschränkten Funktion, also

$$\{(x_0, y, z) \mid 0 \leq z \leq f(x_0, y), c \leq y \leq d\}.$$

Sein Flächeninhalt ist  $\int_c^d f(x_0, y) dy$ , und dieser Flächeninhalt hängt selbst stetig von  $x_0$  ab (das haben wir nicht bewiesen). Daher ergibt sich die Aussage aus dem Cavalieri-Prinzip.  $\square$

Zumeist schreibt man in der vorstehenden Situation  $\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ .

**Beispiel 56.5.** Wir wollen das Integral der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - xy + 2y^3,$$

über dem Rechteck  $Q = [-2, 1] \times [0, 2]$  mit dem Satz von Fubini ausrechnen. Dies führt auf

$$\begin{aligned} \int_Q f d\lambda^2 &= \int_0^2 \left( \int_{-2}^1 (x^2 - xy + 2y^3) dx \right) dy \\ &= \int_0^2 \left( \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y + 2y^3x \right) \Big|_{-2}^1 \right) dy \\ &= \int_0^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2}y + 2y^3 + \frac{8}{3} + 2y + 4y^3 \right) dy \\ &= \int_0^2 \left( 3 + \frac{3}{2}y + 6y^3 \right) dy \\ &= \left( 3y + \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{2}y^4 \right) \Big|_0^2 \\ &= 6 + 3 + 24 \\ &= 33. \end{aligned}$$

**Korollar 56.6.** *Es seien*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

*und*

$$g: [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

*stetige Funktionen. Dann gilt*

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} fg d\lambda^2 = \left( \int_a^b f(x) dx \right) \cdot \left( \int_c^d g(y) dy \right).$$



*Beweis.* Nach Satz 56.4 ist

$$\begin{aligned} \int_{[a,b] \times [c,d]} fg d\lambda^2 &= \int_a^b \left( \int_c^d f(x)g(y)dy \right) dx \\ &= \int_a^b f(x) \left( \int_c^d g(y)dy \right) dx \\ &= \left( \int_c^d g(y)dy \right) \cdot \left( \int_a^b f(x)dx \right). \end{aligned}$$

□

### Mehrfachintegrale über stetig berandeten Gebieten

Wir betrachten nun Mehrfachintegrale über komplizierteren Teilmengen  $T$ , wobei zunächst  $T$  eine kompakte Teilmenge im  $\mathbb{R}^2$  sei. Eine handhabbare Klasse von Teilmengen sind diejenigen, die (zumindest stückweise) durch stetige Funktionen in einer Variablen berandet sind. Die Grundversion sieht dabei folgendermaßen aus: Es sei  $I = [a, b]$  ein reelles Intervall und es seien

$$g, h: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen mit  $g(x) \leq h(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ . Diese zwei Funktionen (bzw. ihre Graphen) legen dann ein Flächenstück  $T$  fest, nämlich

$$T = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

Man spricht von einem *stetig berandeten Flächenstück*. Das Integral über  $T$  zu einer stetigen Funktion  $f: T \rightarrow \mathbb{R}$  kann man folgendermaßen berechnen.

**Satz 56.7.** *Es sei  $I = [a, b]$  ein reelles Intervall und es seien*

$$g, h: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

*zwei stetige Funktionen mit  $g(x) \leq h(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ . Es sei  $T$  das durch die beiden zugehörigen Graphen begrenzte Flächenstück über  $[a, b]$ , und es sei*

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine stetige Funktion. Dann ist*

$$\int_T f d\lambda^2 = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

*Beweis.* Dies folgt aus dem Cavalieri-Prinzip: Indem man  $f_+$  und  $f_-$  getrennt betrachtet, kann man annehmen, dass  $f$  keine negativen Werte annimmt. Für diese Funktionen ist das Integral durch das Volumen des Subgraphen definiert. Die Querschnittsfläche des Subgraphen zu  $x_0 \in [a, b]$  ist gerade  $\int_{g(x_0)}^{h(x_0)} f(x_0, y) dy$ . Diese Flächeninhalte hängen stetig von  $x_0$  ab (das haben wir nicht bewiesen) und somit ist das Integral über diese Flächeninhalte nach dem Cavalieri-Prinzip das Volumen des Subgraphen. □

**Beispiel 56.8.** Es sei  $T$  die obere Einheitskreisscheibe und

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x, y) = x^2y + xy^3.$$

Dann ist nach Satz 56.7

$$\begin{aligned} \int_T f d\lambda^2 &= \int_{-1}^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2y + xy^3 dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}xy^4 \right) \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{2}x^2\sqrt{1-x^2}^2 + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}^4 \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{2}x^2(1-x^2) + \frac{1}{4}x(1-x^2)^2 \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^5 \right) dx \\ &= \left( \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^6 \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Natürlich können die begrenzenden Funktionen auch von  $y$  abhängen. Allgemeiner kann man häufig ein komplizierteres Flächenstück durch Einführung eines „Gitters“ in Flächenstücke zerlegen, die zu diesem Grundtyp gehören. In diesem Fall erhält man das Gesamtintegral durch Aufsummieren der Teilintegrale.

Wir betrachten nun dreidimensionale Bereiche  $T$  und Integrale darüber. Eine typische Situation ist dabei wieder, dass  $T$  durch stetige Funktionen berandet wird, und zwar in der folgenden Weise: Es sei  $I = [a, b]$  ein reelles Intervall,

$$g, h: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien zwei stetige Funktionen mit  $g(x) \leq h(x)$  und

$$p, q: \{(x, y) \mid x \in I, g(x) \leq y \leq h(x)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien zwei stetige Funktionen mit  $p(x, y) \leq q(x, y)$ . Diese Funktionen begrenzen dann den Bereich

$$T = \{(x, y, z) \mid x \in I, g(x) \leq y \leq h(x), p(x, y) \leq z \leq q(x, y)\}.$$

Eine stetige Funktion  $f: T \rightarrow \mathbb{R}$  kann man integrieren, indem man die berandenden Funktionen als Integrationsgrenzen verarbeitet.

**Satz 56.9.** *Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^3$  eine kompakte Teilmenge, die durch folgende Daten beschrieben werde: Ein reelles Intervall  $I = [a, b]$ , zwei stetige Funktionen*

$$g, h: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

*mit  $g(x) \leq h(x)$  für alle  $x \in [a, b]$  und zwei stetige Funktionen*

$$p, q: \{(x, y) \mid x \in I, g(x) \leq y \leq h(x)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit  $p(x, y) \leq q(x, y)$  derart, dass

$$T = \{(x, y, z) \mid x \in I, g(x) \leq y \leq h(x), p(x, y) \leq z \leq q(x, y)\}$$

ist. Es sei

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_T f d\lambda^3 = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} \left( \int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

*Beweis.* Dies folgt ebenfalls aus dem Cavalieri-Prinzip.  $\square$

Häufig lässt man dabei die Klammern weg, da die Integralzeichen und das Integrationssymbol  $du$  als Klammerung ausreichen. Ein Mehrfachintegral ist von innen nach außen zu lesen und zu berechnen. Die einzelnen Integrale sind dabei, abgesehen davon, dass sie von zusätzlichen unbestimmten Parametern abhängen, gewöhnliche eindimensionale Integrale.

**Beispiel 56.10.** Es sei  $R = [a, b] \times [c, d]$  ein Rechteck,

$$q: [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, (x, y) \longmapsto q(x, y),$$

eine stetige Funktion und  $T$  der Subgraph zu dieser Funktion, also  $T = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq q(x, y)\}$ . Für eine auf  $T$  definierte stetige Funktion  $f$  ist somit nach Satz 56.9

$$\int_T f d\lambda^3 = \int_a^b \int_c^d \int_0^{q(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

## Der Schwerpunkt

**Definition 56.11.** Zu einer kompakten Teilmenge (einem Körper)  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  und einer stetigen Massenverteilung

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit dem Gesamtvolumen  $M = \int_T f d\lambda^n$  (das als positiv vorausgesetzt sei) nennt man den Punkt  $S = (s_1, \dots, s_n)$  mit

$$s_i := \frac{1}{M} \int_T x_i f d\lambda^n = \frac{1}{M} \int_T x_i \cdot f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

den *Schwerpunkt* von  $T$  (bezüglich der Massenverteilung  $f$ ).

Um die  $i$ -te Koordinate des Schwerpunktes zu erhalten muss man also über das Produkt aus  $i$ -ter Koordinatenfunktion und der Massenverteilung integrieren. Wenn die Massenverteilung (oder Massendichte)  $f$  konstant (also der Körper homogen ist), so nennt man den Schwerpunkt auch den *geometrischen Schwerpunkt*.

**Beispiel 56.12.** Wir berechnen den Schwerpunkt der oberen Einheitshalbkugel, also von

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}.$$

Die  $x$ - und die  $y$ -Koordinate muss aus Symmetriegründen natürlich 0 sein. Für die  $z$ -Koordinate berechnen wir

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} (1-x^2-y^2) \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( (1-x^2)y - \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2) \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3} (1-x^2) \sqrt{1-x^2} \\ &\quad - \left( - (1-x^2) \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3} (1-x^2) \sqrt{1-x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{4}{3} (1-x^2) \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (1-x^2) \sqrt{1-x^2} dx. \end{aligned}$$

Wir führen die Substitution mit  $x = \sin u$  durch und erhalten (ohne den Vorfaktor)

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 u) \cos u \cdot \cos u \, du &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 u) (1 - \sin^2 u) \, du \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2 \sin^2 u + \sin^4 u \, du \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2 \sin^2 u + \sin^4 u \, du. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Beispiel 25.3 ist dieses Integral gleich

$$2 \left( \frac{\pi}{2} - 2 \frac{\pi}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3}{8} \pi.$$

Das Volumen der halben Einheitskugel ist nach Beispiel 55.13 gleich  $\frac{2}{3}\pi$ . Daher ist die  $z$ -Koordinate des Schwerpunkts gleich

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \pi}{\frac{2}{3} \pi} = \frac{3}{8}.$$

## 56. ARBEITSBLATT

**Aufwärmaufgaben**

**Aufgabe 56.1.** Berechne das Integral

$$\int_Q xy \, d\lambda^2$$

über dem Quader  $Q = [a, b] \times [c, d]$ .

**Aufgabe 56.2.** Es sei  $G$  der Subgraph unterhalb der Standardparabel zwischen 1 und 3. Berechne das Integral

$$\int_G x^2 + xy - y^3 \, d\lambda^2.$$

**Aufgabe 56.3.** Bestimme den Schwerpunkt des oberen Einheitshalbkreises

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}.$$

**Aufgabe 56.4.\***

Berechne das Integral zur Funktion

$$f(r, s, t) = s^2 t + r \cos t$$

über dem Einheitswürfel  $W = [0, 1]^3$ .

**Aufgabe 56.5.** Berechne das Integral  $\int_T f \, d\lambda^3$ , wobei  $f(x, y, z) = xz$  und  $T$  der Einheitszylinder  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq x, y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$  ist.

**Aufgabe 56.6.** Auf der quadratischen Platte  $P = [-1, 1] \times [-1, 1]$  sei eine elektrische Ladung gemäß  $f(x, y) = y - x^2$  verteilt. Bestimme den Schwerpunkt der positiven Teilladung und den Schwerpunkt der negativen Teilladung.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 56.7.** (4 Punkte)

Es sei  $G$  der Subgraph der Sinusfunktion zwischen 0 und  $\pi$ . Berechne die Integrale

a)  $\int_G x \, d\lambda^2$ ,

b)  $\int_G y \, d\lambda^2$ .

**Aufgabe 56.8.** (5 Punkte)

Berechne das Integral zur Funktion  $f(x, y) = x(\sin x)(\cos(xy))$  über dem Rechteck  $Q = [0, 3\pi] \times [0, 1]$ .

**Aufgabe 56.9.** (4 Punkte)

Berechne mittels Integration den Schwerpunkt eines Dreiecks, das durch die drei Punkte  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$  und  $(b, c)$  (mit  $a, c > 0$ ) gegeben sei.

**Aufgabe 56.10.** (6 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (u, v) \longmapsto \frac{2uv}{(u^2 + 1)(v^2 + v + 1)}.$$

Für welche Quadrate  $Q = [a, a + 1] \times [b, b + 1]$  der Kantenlänge 1 wird das Integral

$$\int_Q f \, d\lambda^2$$

maximal? Welchen Wert besitzt es?

**Aufgabe 56.11.** (5 Punkte)

Berechne das Integral  $\int_{B(P,r)} x^2 - y^3 \, d\lambda^2$  über der Kreisscheibe  $B(P, r)$  in Abhängigkeit von  $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  und  $r \in \mathbb{R}_+$ .

## 57. VORLESUNG - DIE TRANSFORMATIONSFORMEL

**Die Transformationsformel für Integrale**

Wir kommen zur *Transformationsformel für Integrale*, wofür wir noch eine Bezeichnung einführen.

**Definition 57.1.** Sei  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum und sei

$$\varphi: G \longrightarrow V$$

eine total differenzierbare Abbildung. Dann nennt man die Determinante

$$\det(D\varphi)_P$$

die *Jacobi-Determinante* (oder *Fundamental-Determinante*) von  $\varphi$  in  $P \in G$ .

Wir betrachten die Jacobi-Determinante als eine auf  $G$  definierte reellwertige Funktion  $P \mapsto J(\varphi)(P) = J(P) := \det(D\varphi)_P$ . Bei einer stetig partiell differenzierbaren Abbildung ist sie stetig, da dann die Einträge in der Jacobi-Matrix stetige Funktionen sind. Bei einer linearen Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

stimmt das totale Differential in jedem Punkt mit  $\varphi$  selbst überein, und daher ist die Jacobi-Determinante konstant. In Satz 55.9 haben wir gesehen, dass die Determinante der linearen Abbildung das Verhältnis zwischen dem Volumen von Bild und Urbild festlegt. Eine wesentliche Verallgemeinerung von dieser Beziehung wird durch die beiden folgenden Aussagen gegeben.

**Satz 57.2.** *Es seien  $G$  und  $H$  offene Mengen im  $\mathbb{R}^n$  und es sei*

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

*ein  $C^1$ -Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante  $(J(\varphi))(x) = \det(D\varphi)_x$  für  $x \in G$ . Es sei  $T \subseteq H$  eine (in  $\mathbb{R}^n$ ) kompakte Teilmenge und es sei*

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine stetige Funktion. Dann ist  $\varphi^{-1}(T)$  ebenfalls kompakt und es gilt*

$$\int_T f \, d\lambda^n = \int_{\varphi^{-1}(T)} (f \circ \varphi) |J(\varphi)| \, d\lambda^n.$$

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Häufig startet man auch mit einer kompakten Teilmenge  $S \subseteq G$  und setzt  $T = \varphi(S)$  (dann gilt  $S = \varphi^{-1}(T)$ ). Es kann auch auf  $S$  eine stetige Funktion  $\tilde{f}$  definiert sein, dann muss man  $f = \tilde{f} \circ \varphi^{-1}$  setzen. Da ein Diffeomorphismus vorausgesetzt wird, ist die Aussage dieses Satzes grundsätzlich symmetrisch.

**Korollar 57.3.** *Es seien  $G$  und  $H$  offene Mengen im  $\mathbb{R}^n$  und es sei*

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

*ein  $C^1$ -Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante  $(J(\varphi))(x) = \det(D\varphi)_x$  für  $x \in G$ . Es sei  $T \subseteq H$  eine (in  $\mathbb{R}^n$ ) kompakte Teilmenge. Dann gilt*

$$\lambda^n(T) = \int_{\varphi^{-1}(T)} |J(\varphi)| d\lambda^n.$$

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 57.2, angewendet auf die konstante Funktion  $f = 1$ . □

### Beispiele zur Transformationsformel

**Beispiel 57.4.** Wir betrachten das komplexe Quadrieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^2.$$

In reellen Koordinaten ist dies die differenzierbare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2 - y^2, 2xy).$$

Diese Abbildung ist wegen  $\varphi(x, y) = \varphi(-x, -y)$  nicht injektiv. Allerdings ist die Einschränkung auf die positive Halbebene  $G = \{(x, y) | x > 0\}$  injektiv, und das Bild davon ist  $H = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-$  (also die Ebene ohne die negative reelle Achse). Die Jacobi-Matrix von  $\varphi$  ist

$$\text{Jak}(\varphi)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

mit der Jacobi-Determinante

$$(J(\varphi))(x, y) = 4x^2 + 4y^2.$$

Wir möchten den Flächeninhalt des Bildes  $T = \varphi(S)$  des Einheitswürfels  $S = [0, 1] \times [0, 1]$  unter dieser Abbildung berechnen (die eine Seite des Einheitswürfels gehört nicht zu  $G$ , dieser Rand ist aber eine Nullmenge nach Lemma 55.7 und daher für den Flächeninhalt und die Integration unerheblich). Aufgrund von Korollar 57.3 ist dann

$$\begin{aligned} \lambda^2(T) &= \int_S 4x^2 + 4y^2 d\lambda^2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (4x^2 + 4y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{4}{3}x^3 + 4xy^2 \right) \Big|_0^1 dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{4}{3} + 4y^2 \right) dy \\ &= \left( \frac{4}{3}y + \frac{4}{3}y^3 \right) \Big|_0^1 \end{aligned}$$



$$= \frac{8}{3}.$$

**Korollar 57.5.** *Es sei*

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (r, \theta) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

die Polarkoordinatenauswertung und es seien  $G$  und  $H$  offene Mengen, auf denen  $\varphi$  einen Diffeomorphismus induziert. Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^2$  eine (in  $\mathbb{R}^2$ ) kompakte Teilmenge und

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_T f(x, y) d\lambda^2(x, y) = \int_{\varphi^{-1}(T)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r d\lambda^2(r, \theta).$$

Dies gilt auch dann, wenn außerhalb von Nullmengen ein Diffeomorphismus vorliegt. Insbesondere gilt bei stetigem  $f$  die Formel

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda^2(x, y) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r d\theta dr.$$

*Beweis.* Dies folgt wegen

$$\det(D\varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

direkt aus Satz 57.2. □

**Lemma 57.6.** *Es ist*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

*Beweis.* Durch eine einfache Substitution ist die Aussage äquivalent zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

Nennen wir dieses Integral  $I$ . Nach einer Variante des Satzes von Fubini für uneigentliche Integrale ist

$$I^2 = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} d\lambda^2.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten  $x = r \cos \theta$  und  $y = r \sin \theta$  ist dieses Integral nach Korollar 57.5 und nach Fubini gleich

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi] \times \mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r d\lambda^2(r, \theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{[0, 2\pi]} 1 d\lambda^1(\theta) \right) \left( \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r d\lambda^1(r) \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r d\lambda^1(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r \, dr \\
&= -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^\infty \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Damit ist auch  $I = 1$ . □

**Korollar 57.7.** *Für die Zylinderkoordinatenauswertung*

$$\Psi: G = \mathbb{R}_+ \times ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, z) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z),$$

eine kompakte Teilmenge  $T \subseteq \Psi(G)$  und eine stetige Funktion

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

gilt die Beziehung

$$\int_T f \, d\lambda^3 = \int_{\Psi^{-1}(T)} (f \circ \Psi) \cdot r \, d\lambda^3.$$

Dies kann man auch als

$$\int \int \int_T f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int \int \int_{\Psi^{-1}(T)} \tilde{f}(r, \theta, z) \cdot r \, dr \, d\theta \, dz$$

schreiben, wobei  $\tilde{f} = f \circ \Psi$  bezeichnet.

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 57.2, da die Jacobi-Determinante der Zylinderkoordinatenauswertung gleich  $r$  ist. □

**Korollar 57.8.** *Für die Kugelkoordinatenauswertung*

$$\Psi: G = \mathbb{R}_+ \times ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi) \longmapsto (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta),$$

eine kompakte Teilmenge  $T \subseteq \Psi(G)$  und eine stetige Funktion

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

gilt die Beziehung

$$\int_T f \, d\lambda^3 = \int_{\Psi^{-1}(T)} (f \circ \Psi) r^2 \sin \theta \, d\lambda^3.$$

Dies kann man auch als

$$\int \int \int_T f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int \int \int_{\Psi^{-1}(T)} \tilde{f}(r, \theta, \varphi) \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

schreiben, wobei  $\tilde{f} = f \circ \Psi$  bezeichnet.

*Beweis.* Nach Beispiel 51.7 ist die Jacobi-Determinante von  $\Psi$  im Punkt  $(r, \theta, \varphi)$  gleich  $r^2 \sin \theta$ , so dass die Aussage aus Satz 57.2 folgt. □



**Beispiel 57.9.** Es soll eine Straße in der Ebene der Breite  $2a$  asphaltiert werden. Dabei wird die Straße durch den Verlauf des Mittelstreifen vorgegeben, der durch die Kurve

$$[0, s] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \psi(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix},$$

bestimmt ist. Dabei sei  $\psi$  zweimal stetig differenzierbar und bogenparametrisiert, d.h. es sei  $f'(t)^2 + g'(t)^2 = 1$ , was bedeutet, dass die Mittelstreifenkurve mit normierter Geschwindigkeit durchlaufen wird. Die Breite ist dabei senkrecht zum Mittelstreifen zu messen. Die zu asphaltierende Trasse wird dann durch die Abbildung

$$\varphi: [0, s] \times [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, r) \longmapsto \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -g'(t) \\ f'(t) \end{pmatrix},$$

parametrisiert. Wir nehmen an, dass diese Parametrisierung injektiv ist, was erfüllt ist, wenn die Mittelstreifenabbildung  $\psi$  injektiv ist und die Straße nicht zu breit werden soll.

Die Jacobi-Matrix der Parametrisierung ist

$$(D\varphi)_{(t,r)} = \begin{pmatrix} f'(t) - rg''(t) & -g'(t) \\ g'(t) + rf''(t) & f'(t) \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$\begin{aligned} f'(t)f'(t) + g'(t)g'(t) - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)) \\ = 1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)). \end{aligned}$$

Daher ist die Asphaltfläche nach der Transformationsformel gleich

$$\int_{[0,s] \times [-a,a]} |1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t))| d\lambda^2.$$

Wenn wir weiter annehmen, dass

$$|g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)| \leq \frac{1}{a}$$

ist (was bedeutet, dass die Straßenbreite nicht allzu groß ist), so ist dieses Integral nach Korollar 56.6 gleich

$$\begin{aligned} & \int_{[0,s] \times [-a,a]} 1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)) \, d\lambda^2 \\ &= 2as + \left( \int_{-a}^a r \, dr \right) \left( \int_0^s g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t) \, dt \right) \\ &= 2as + 0 \cdot \left( \int_0^s g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t) \, dt \right) \\ &= 2as. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Asphaltfläche gleich der Mittelstreifenlänge mal der Straßenbreite ist.

### Volumentreue Abbildungen

In Vorlesung 31 haben wir über Isometrien gesprochen, also lineare Abbildungen zwischen euklidischen Vektorräumen, die das Skalarprodukt und insbesondere die Norm respektieren. Aufgrund von Aufgabe 57.7 ist die Determinante einer Isometrie auf dem  $\mathbb{R}^n$  gleich 1 oder  $-1$ , so dass sich gemäß Korollar 57.3 das Volumen von beliebigen kompakten Teilmengen  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  unter der Abbildung nicht ändert, d.h. es ist stets  $\lambda^n(\varphi(T)) = \lambda^n(T)$ .

**Definition 57.10.** Es seien  $G$  und  $H$  offene Mengen im  $\mathbb{R}^n$  und es sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein  $C^1$ -Diffeomorphismus. Man sagt, dass  $\varphi$  *volumentreu* ist, wenn

$$|(J(\varphi))(x)| = |\det(D\varphi)_x| = 1$$

ist für alle  $x \in G$ .

Im ebenen Fall spricht man natürlich von *flächentreu*. Für einen volumentreuen Diffeomorphismus ist  $\lambda^n(\varphi(T)) = \lambda^n(T)$  nach Korollar 57.3.

**Beispiel 57.11.** Es sei  $h \in \mathbb{R}[y]$  ein beliebiges Polynom in der einen Variablen  $y$ . Dann ist die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + h(y), y)$$

ein flächentreuer Diffeomorphismus. Die Jacobi-Matrix von  $\varphi$  ist ja

$$\text{Jak}(\varphi)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & h'(y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so dass die Jacobi-Determinante konstant gleich 1 ist. Wenn man die Rollen von  $x$  und  $y$  vertauscht und die Hintereinanderschaltung von solchen Abbildungen betrachtet, so erhält man flächentreue Abbildungen, denen man es nicht auf den ersten Blick ansieht. Beispielsweise ist zu  $\varphi(x, y) = (x + y^2, y)$  und  $\psi(x, y) = (x, y + x^3)$  die Hintereinanderschaltung

$$(\psi \circ \varphi)(x, y) = \psi(\varphi(x, y))$$

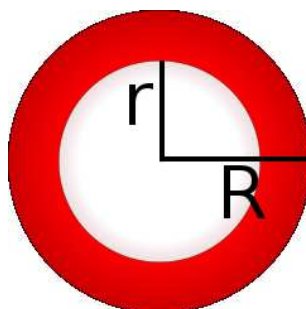
$$\begin{aligned}
&= \psi(x + y^2, y) \\
&= (x + y^2, y + (x + y^2)^3) \\
&= (x + y^2, y + x^3 + 3x^2y^2 + 3xy^4 + y^6).
\end{aligned}$$

## 57. ARBEITSBLATT

**Aufwärmataufgaben**

**Aufgabe 57.1.** Interpretiere die Substitutionsregel als einen Spezialfall der Transformationsformel.

**Aufgabe 57.2.** Zeige, dass der Flächeninhalt eines Annulus gleich dem Produkt aus der Länge des Mittelkreises und der Breite ist.



**Aufgabe 57.3.** Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + y^2, -y^4 - 2xy^2 - x^2 + y^2 + x + y)$$

flächentreu ist.

**Aufgabe 57.4.** Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + \sin y, y + \cos x).$$

Berechne das Minimum und das Maximum von  $|\det(D\varphi)_P|$  auf dem Quadrat  $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ . Welche Abschätzung ergibt sich daraus für  $\lambda^2(\varphi(Q))$ ?

**Aufgabe 57.5.** Beschreibe die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^3,$$

in reellen Koordinaten und bestimme die Jacobi-Matrix und die Jacobi-Determinante davon. Ebenso für  $z^4$ .

**Aufgabe 57.6.** Finde möglichst große offene Teilmengen  $G \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  und  $H \subseteq \mathbb{C}$  derart, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^3,$$

einen Diffeomorphismus von  $G$  nach  $H$  induziert.

**Aufgabe 57.7.** Zeige, dass die Determinante einer linearen Isometrie

$$L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

gleich 1 oder gleich  $-1$  ist.

Tipp: Was passiert mit dem Einheitswürfel?

**Aufgabe 57.8.** Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

derart, dass  $\varphi$  volumentreu, aber keine Isometrie ist.

**Aufgabe 57.9.** Es seien  $G$  und  $H$  offene Mengen im  $\mathbb{R}^n$  und es sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein volumentreuer  $C^1$ -Diffeomorphismus. Es sei  $G$  zusammenhängend. Zeige, dass entweder  $(J(\varphi))(x) = 1$  für alle  $x \in G$  oder aber  $(J(\varphi))(x) = -1$  für alle  $x \in G$  gilt.

**Aufgabe 57.10.** Bestimme durch Integration die  $x$ - und die  $y$ -Koordinate des Schwerpunkts der oberen Einheitshalbkugel (siehe Beispiel 56.12).

**Aufgabe 57.11.** Man gebe ein Beispiel eines Diffeomorphismus

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

auf offenen Mengen  $G, H \subseteq \mathbb{R}^n$  und einer kompakten Teilmenge  $T \subseteq G$  an derart, dass für den Schwerpunkt  $S$  von  $T$  und den Schwerpunkt  $S'$  von  $\varphi(T)$  *nicht*  $\varphi(S) = S'$  gilt.

## Aufgaben zum Abgeben

### Aufgabe 57.12. (5 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^3 - y^2, xy^2).$$

Berechne das Minimum und das Maximum von  $|\det(D\varphi)_P|$  auf den beiden Quadraten  $Q_1 = [0, 1] \times [0, 1]$  und  $Q_2 = [1, 2] \times [1, 2]$ . Welche Abschätzungen ergeben sich daraus für  $\lambda^2(\varphi(Q_1))$  und für  $\lambda^2(\varphi(Q_2))$ ?

### Aufgabe 57.13. (7 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$[0, 10] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2,$$

und interessieren uns für die Straße der Breite 1, deren Mittelstreifen der vorgegebene Funktionsgraph ist.

- a) Zeige, dass zu zwei verschiedenen Punkten auf dem Funktionsgraphen die Senkrechten der Länge 1 (mit dem Mittelpunkt auf dem Graph) untereinander überschneidungsfrei sind.
- b) Man gebe eine (möglichst einfache) Parametrisierung der Straße an.
- c) Bestimme den Flächeninhalt der Straße.

### Aufgabe 57.14. (3 Punkte)

Beschreibe das komplexe Potenzieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^n,$$

in Polarkoordinaten.

### Aufgabe 57.15. (4 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix zur Abbildung

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, z \longmapsto z^n,$$

in einem beliebigen Punkt  $P = (a, b)$  mit der Hilfe von Polarkoordinaten.

**Aufgabe 57.16.** (3 Punkte)

Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge und  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $\mathbb{R}^n$  mit den zugehörigen Koordinatenfunktionen  $y_1, \dots, y_n$ . Es sei

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Massenverteilung auf  $T$  mit der Gesamtmasse  $M > 0$ . Zeige, dass

$$t_i = \frac{1}{M} \int_T y_i \cdot f d\lambda^n$$

die  $i$ -te Koordinate des Schwerpunktes von  $T$  bezüglich dieser Basis ist.

**Aufgabe 57.17.** (4 Punkte)

Zeige durch ein Beispiel, dass unter den Polarkoordinaten der Schwerpunkt einer kompakten Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^2$  *nicht* in den Schwerpunkt des Bildes  $\varphi(T)$  überführt werden muss.

## 58. VORLESUNG - DER SATZ VON GREEN

Wir betrachten eine kompakte Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^2$ , deren Rand  $R$  sich stückweise durch reguläre Kurven parametrisieren lässt. D.h. es gibt abgeschlossene Intervalle  $I_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , und geschlossene, überschneidungsfreie (also auf dem halboffenen Intervall injektive), stückweise stetig differenzierbare, reguläre Kurven

$$\gamma_j: I_j \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

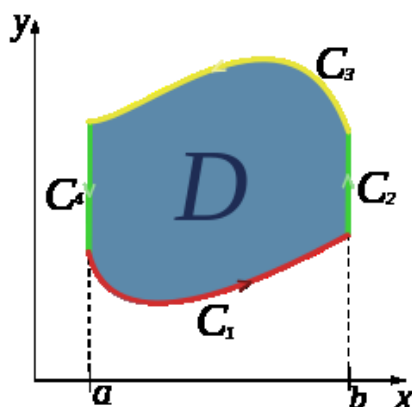
derart, dass ihre Bilder  $R_j = \gamma_j(I_j)$  untereinander disjunkt sind und ihre Vereinigung gleich  $R$  ist. Dabei werden die Kurven so durchlaufen werden, dass  $T$  stets „links“ liegt. Eine solche Teilmenge nennen wir hier eine *regulär berandete, ebene Teilmenge*.

Man beachte, dass die einzelnen Intervalle  $I_j$  selbst in endlich viele Intervalle zerlegt sind, auf denen jeweils eine stetig differenzierbare reguläre Kurve definiert ist. Dies ist beispielsweise bei einem Rechteck der Fall, dessen Rand durch einen geschlossenen Weg parametrisiert wird, der durch 4 lineare Teilstücke gegeben wird.

Bei einem einzigen Intervall  $I$  zerlegt die Kurve  $\gamma$  die Ebene in einen inneren Teil (nämlich  $T$ ) und einen äußeren Teil. Die Eigenschaft, dass  $T$  bei der Randparametrisierung links liegt, bedeutet, dass der Rand gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Eine mathematisch einwandfreie Definition von diesen Begriffen ist nicht trivial. Wenn zwei (oder mehrere) geschlossene Wege gegeben sind, so können diese nebeneinander oder ineinander liegen. Im zweiten Fall (beispielsweise bei zwei konzentrischen Kreisen) ist die äußere Umrandung gegen den Uhrzeigersinn zu durchlaufen und die innere Umrandung mit dem Uhrzeigersinn.



Es sei eine solche regulär berandete, ebene Teilmenge  $T$  und ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $F$  gegeben, das auf einer offenen Umgebung von  $T$  definiert sei. Dann gibt es eine Beziehung zwischen dem Integral des Vektorfeldes längs der parametrisierten Randkurven und dem Integral über  $T$  zur Funktion  $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$ . Diesen erstaunlichen Zusammenhang kann man auch zur Berechnung von Flächeninhalten einsetzen. Es gibt auch höherdimensionale Verallgemeinerungen wie den Satz von Stokes.



Eine typische Situation, in der der Satz von Green anwendbar ist.

**Satz 58.1.** *Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^2$  eine regulär berandete, ebene Teilmenge mit dem Rand  $R = \partial T$  und es sei*

$$F: U \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

*ein auf einer offenen Menge  $U \supseteq T$  definiertes stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist*

$$\int_{\partial T} F = \int_T \left( \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) \right) d\lambda^2,$$

*d.h. das Wegintegral zum Vektorfeld  $F$  über den Rand von  $T$  stimmt mit dem zweidimensionalen Integral rechts über  $T$  überein.*

*Beweis.* Wir geben eine Beweisskizze. Da sowohl Wegintegrale als auch Integrale über ebenen Bereichen additiv im Vektorfeld bzw. in der Funktion sind und da partielles Ableiten ebenfalls additiv ist, kann man sich auf Vektorfelder der Form  $F = (F_1, 0)$  bzw.  $(0, F_2)$  beschränken. Wir unterteilen den  $\mathbb{R}^2$  mit einem Gitter derart, dass für die einzelnen Gitterrechtecke  $Q$  gilt, dass  $Q$  ganz in  $T$  liegt oder aber  $Q \cap T$  aus drei geraden Seiten und einer Berandung besteht, die man als den Graph einer stetig differenzierbaren Funktion in der gegenüberliegenden Seite realisieren kann. Das Integral zur Funktion über  $T$  ist additiv bezüglich einer solchen Zerlegung. Der in  $Q \cap T$  durchlaufene Rand stimmt natürlich nur in einer Seite mit einem Stück des Randes von  $T$  überein. Wenn man aber die Wegintegrale über alle diese Teilstücke aufsummiert, so wird jede gerade Seite von  $Q \cap T$ , die nicht zum Rand von  $T$  gehört,

doppelt durchlaufen, und zwar einmal in die eine Richtung und einmal in die entgegengesetzte Richtung. Daher heben sich diese Teilwegintegrale weg und in der Summe bleibt das Wegintegral über den Rand von  $T$  übrig. Wir gehen also davon aus, dass  $T$  die Form

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq h(x)\}$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion

$$h: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit  $h(x) \geq c$  besitzt. Eine Parametrisierung des Randes wird dann durch die Wege  $\gamma_1(t) = (a, c) + t(1, 0)$  mit  $t \in [0, b - a]$ ,  $\gamma_2(t) = (b, c) + t(0, 1)$  mit  $t \in [0, h(b) - c]$  (wir parametrisieren also so, dass die Zeit immer bei 0 anfängt),  $\gamma_3(t) = (b, 0) + (-t, h(b - t))$  mit  $t \in [0, b - a]$  und schließlich  $\gamma_4(t) = (a, h(a)) + t(0, -1)$  mit  $t \in [0, h(a) - c]$ . Dabei ist für  $F = (F_1, 0)$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F + \int_{\gamma_3} F + \int_{\gamma_4} F \\ &= \int_0^{b-a} F_1(a+t, c) dt + 0 + \int_0^{b-a} F_1(b-t, h(b-t))(-1) dt + 0 \\ &= \int_a^b F_1(x, c) dx + \int_b^a F_1(x, h(x)) dx \\ &= \int_a^b F_1(x, c) - F_1(x, h(x)) dx \\ &= - \int_a^b \int_c^{h(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y} dy dx \\ &= \int_T - \frac{\partial F_1}{\partial y} d\lambda^2. \end{aligned}$$

Sei nun  $F = (0, F_2)$  auf  $T$  wie zuvor. Für die Abschnitte, auf denen  $h$  streng wachsend oder streng fallend ist, kann man durch eine feinere Gitterunterteilung den Graphen auch abhängig von  $y$  realisieren. Dabei entsteht eine Situation, die analog zu der schon behandelten Situation ist (wobei sich die Rollen von  $x$  und  $y$  und die Komponenten des Vektorfeldes vertauschen). Auf einem Abschnitt, auf dem  $h$  konstant ist (sagen wir gleich  $d$ ), ergibt sich die Behauptung unter Verwendung des Satzes von Fubini aus

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F + \int_{\gamma_3} F + \int_{\gamma_4} F \\ &= 0 + \int_0^{d-c} F_2(b, c+t) dt + 0 + \int_0^{d-c} F_2(a, d-t)(-1) dt \\ &= \int_c^d F_2(b, y) dy + \int_d^c F_2(a, y) dy \\ &= \int_c^d F_2(b, y) - F_2(a, y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy \\
&= \int_a^b \int_c^d \frac{\partial F_2}{\partial x} dy dx \\
&= \int_T \frac{\partial F_2}{\partial x} d\lambda^2.
\end{aligned}$$

□

**Beispiel 58.2.** Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^2$  die Teilmenge, die durch die  $x$ -Achse, die Gleichung  $x = 1$  und den Parabelbogen begrenzt wird, und es sei  $F(x, y) = (e^x, xy)$  ein Vektorfeld. Wir wollen die beiden Integrale im Satz von Green unabhängig voneinander berechnen. Den Rand von  $T$  kann man durch drei Wege  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  regulär parametrisieren, wobei

$$\gamma_1(t) = (t, 0),$$

$$\gamma_2(t) = (1, t)$$

und

$$\gamma_3(t) = (1 - t, (1 - t)^2),$$

(jeweils mit  $t \in [0, 1]$ ) ist. Für das Wegintegral gilt somit

$$\begin{aligned}
\int_{\partial T} F &= \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F + \int_{\gamma_3} F \\
&= \int_0^1 F_1(t, 0) dt + \int_0^1 F_2(1, t) dt \\
&\quad + \int_0^1 F_1(1 - t, 1 - 2t + t^2)(-1) + F_2(1 - t, 1 - 2t + t^2)(2t - 2) dt \\
&= \int_0^1 e^t dt + \int_0^1 t dt + \int_0^1 -e^{1-t} + (1 - t)(1 - 2t + t^2)(2t - 2) dt \\
&= e - 1 + \frac{1}{2} + (e^{1-t}) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 (1 - t)^4 dt \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \left( (1 - t)^5 \Big|_0^1 \right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \\
&= \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

Zur Berechnung des Doppelintegrals ist

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = y.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\int_T \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} d\lambda^2 &= \int_T y d\lambda^2 \\
&= \int_0^1 \int_0^{x^2} y dy dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^{x^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 x^4 dx \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

**Bemerkung 58.3.** Für ein stetig differenzierbares Gradientenfeld  $F$  ist (nach Satz 45.11)

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 0,$$

so dass das Flächenintegral im Satz von Green gleich 0 ist. Daher muss das Wegintegral ebenfalls 0 sein, was schon in Korollar 54.5 gezeigt wurde (und auch in höheren Dimensionen gilt).

**Korollar 58.4.** Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^2$  eine regulär berandete, ebene Teilmenge mit dem Rand  $R = \partial T$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
\lambda^2(T) &= \int_{\partial T} (0, x) \\
&= - \int_{\partial T} (y, 0),
\end{aligned}$$

d.h. der Flächeninhalt von  $T$  lässt sich über geeignete Wegintegrale längs des Randes berechnen.

*Beweis.* Dies ergibt sich aus Satz 58.1 für das Vektorfeld  $F(x, y) = (0, x)$  bzw.  $G(x, y) = (-y, 0)$ .  $\square$

**Korollar 58.5.** Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^2$  eine regulär berandete, ebene Teilmenge mit dem Rand  $R = \partial T$  und dem Flächeninhalt  $m > 0$ . Dann kann man den Schwerpunkt  $S$  von  $T$  durch Integration eines geeigneten Vektorfeldes bestimmen, und zwar ist

$$x_S = -\frac{1}{m} \int_R (xy, 0) = \frac{1}{2m} \int_R (0, x^2)$$

und

$$y_S = \frac{1}{m} \int_R (0, xy) = -\frac{1}{2m} \int_R (y^2, 0).$$

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage für die  $x$ -Koordinate des Schwerpunktes unter Verwendung von Satz 58.1. Für das Vektorfeld  $F(x, y) = (xy, 0)$  ist

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -x$$

und daher ist

$$x_S = \frac{1}{m} \int_T x d\lambda^2 = -\frac{1}{m} \int_T \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} d\lambda^2 = -\frac{1}{m} \int_R (xy, 0).$$

Für das Vektorfeld  $G(x, y) = (0, x^2)$  ist

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = 2x$$

und daher ist

$$x_S = \frac{1}{m} \int_T x d\lambda^2 = \frac{1}{2m} \int_T \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \lambda^2 = \frac{1}{2m} \int_R (0, x^2).$$

□

**Beispiel 58.6.** Es sei  $T$  der Subgraph der Sinusfunktion zwischen 0 und  $\pi$ . Wir wollen den geometrischen Schwerpunkt von  $T$  mit Hilfe von Korollar 58.5 berechnen. Der Flächeninhalt von  $T$  ist bekanntlich

$$m = \int_0^\pi \sin t = -\cos t \Big|_0^\pi = 2.$$

Der Rand von  $T$  wird durch die beiden Wege  $\gamma_1(t) = (t, 0)$  und  $\gamma_2(t) = (\pi - t, \sin(\pi - t))$  (jeweils für  $t \in [0, \pi]$ ) parametrisiert. Daher ist die  $x$ -Koordinate des Schwerpunkts mit Hilfe des Vektorfeldes  $F(x, y) = (xy, 0)$  gleich

$$\begin{aligned} x_S &= -\frac{1}{2} \int_{\partial T} F \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\gamma_2} F \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi (\pi - t) \sin(\pi - t) (-1) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi u \sin u du \\ &= \frac{1}{2} (-u \cos u + \sin u) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{2} \pi, \end{aligned}$$

was auch aus Symmetriegründen klar ist. Die  $y$ -Koordinate des Schwerpunktes berechnet sich mit Hilfe des Vektorfeldes  $G(x, y) = (y^2, 0)$  zu

$$\begin{aligned} y_S &= -\frac{1}{4} \int_{\partial T} G \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\gamma_2} G \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^2(\pi - t) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^2 u du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \pi \\
&= \frac{1}{8} \pi.
\end{aligned}$$

### Der Satz von Gauss in der Ebene

**Definition 58.7.** Zu einer offenen Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  und einer zweimal differenzierbaren Funktion

$$u: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

nennt man

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_n}$$

die *Laplace-Ableitung* von  $u$ .

Die Zuordnung  $u \mapsto \Delta u$  nennt man auch den *Laplace-Operator*.

**Definition 58.8.** Eine zweimal differenzierbare Funktion

$$u: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einer offenen Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *harmonisch*, wenn

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_n} = 0$$

ist.

Eine harmonische Funktion ist also eine (zweifach differenzierbare) Funktion  $u$ , die die *Laplace-Gleichung*

$$\Delta u = 0$$

erfüllt. Zu einer komplex-differenzierbaren Funktion

$$g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist sowohl der Real- als auch der Imaginärteil eine harmonische Funktion.

Wir möchten aus dem Satz von Green den sogenannten *Satz von Gauss für die Ebene* ableiten. Dafür beschränken wir uns auf eine offene Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  in der Ebene. Zu einer zweimal differenzierbaren Funktion

$$u: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

gehört das Gradientenfeld  $\text{grad } u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ . Wir betrachten das Vektorfeld

$$F(x, y) = \left( -\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

das in jedem Punkt senkrecht auf dem Gradienten steht. Aufgrund von Lemma 54.2 ist  $F(x, y)$  stets tangential an die Höhenlinie durch den Punkt  $(x, y)$ . Zwischen diesem Vektorfeld und dem Laplace-Operator besteht der folgende Zusammenhang.

**Satz 58.9.** Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^2$  eine regulär berandete, ebene Teilmenge mit dem Rand  $\partial T$  und es sei

$$u: V \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine auf einer offenen Menge  $V \supseteq T$  definierte zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann ist

$$\int_{\partial T} \left( -\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \int_T \Delta u d\lambda^2.$$

*Beweis.* Wir wenden Satz 58.1 auf das Vektorfeld

$$F(x, y) = \left( -\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

an. Der Integrand im Doppelintegral ist dann

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = \Delta u.$$

□

Bei einer harmonischen Funktion sind also insbesondere die Wegintegrale über geschlossenen Wegen zu dem Vektorfeld  $F$  gleich 0. Bei einer nicht konstanten harmonischen Funktion sind die Höhenlinien übrigens nicht geschlossen.

**Beispiel 58.10.** Die Funktion

$$u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$$

ist harmonisch. Daher ist für eine regulär berandete, ebene Teilmenge  $T$

$$\int_T \Delta u d\lambda^2 = 0$$

und daher ist nach Satz 58.9 auch

$$\int_{\partial T} \left( -\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \int_{\partial T} (2y, 2x) = 0.$$

Für  $T = B(0, 1)$  ist beispielsweise mit der trigonometrischen Parametrisierung  $\gamma$

$$\int_{\gamma} (2y, 2x) = 0.$$

Dies ergibt sich auch direkt aus

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (y, x) &= \int_0^{2\pi} -\sin t \cdot \sin t + \cos t \cdot \cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 - 2 \sin^2 t dt \\ &= (t - t + \sin t \cos t) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Beispiel 58.11.** Die Funktion

$$u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2$$

ist nicht harmonisch, ihre Laplace-Ableitung  $\Delta u$  ist konstant gleich 4. Für die Einheitskreisscheibe  $T = B(0, 1)$  ist somit

$$\int_T \Delta u d\lambda^2 = \int_T 4 d\lambda^2 = 4\pi.$$

Daher ist nach Satz 58.9 auch

$$\int_{\partial T} \left( -\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \int_{\gamma} (-2y, 2x) = 4\pi,$$

wobei  $\gamma$  die trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises bezeichnet. Dies ergibt sich auch direkt aus

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (-2y, 2x) &= 2 \int_{\gamma} (-y, x) \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sin t \cdot \sin t + \cos t \cdot \cos t dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

## 58. ARBEITSBLATT

### Aufwärmaufgaben

**Aufgabe 58.1.** Bestätige den Satz von Green für das Einheitsquadrat  $T = [0, 1] \times [0, 1]$  und das Vektorfeld

$$F(x, y) = (xy, y^2)$$

durch explizite Berechnungen.

**Aufgabe 58.2.** Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^2$  die Teilmenge, die durch die  $x$ -Achse, die Gleichung  $x = 1$  und den Parabelbogen begrenzt wird, und es sei  $F(x, y) = (x + y^2, x^2 y)$  ein Vektorfeld. Bestätige den Satz von Green für diese Situation durch explizite Berechnungen.

**Aufgabe 58.3.** Bestätige den Satz von Green durch explizite Berechnungen für die Menge  $T = [-2, 2] \times [-2, 2] \setminus U(0, 1)$  (also das zentrierte Quadrat der Seitenlänge 4 ohne den offenen Einheitskreis) und das Vektorfeld  $F(x, y) = (x - y, xy)$ .



**Aufgabe 58.4.** Man mache sich klar, dass der Satz von Green nicht behauptet, dass der Flächeninhalt eines umrandeten Gebiets im  $\mathbb{R}^2$  nur von der Länge des Randes abhängt.

**Aufgabe 58.5.** Es sei  $T$  das durch  $(0, 2)$ ,  $(1, -1)$  und  $(-2, -1)$  gegebene Dreieck und  $h(x, y) = x^2y$ . Finde ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $F$  mit

$$h(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

und berechne damit  $\int_T h d\lambda^2$  durch ein Wegintegral über den Dreiecksrand.

**Aufgabe 58.6.** Es sei

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \longmapsto z^{-1},$$

das komplexe Invertieren. Zeige, dass sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil dieser Funktion (jeweils aufgefasst als eine Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}$ ) eine harmonische Funktion ist.

### Aufgaben zum Abgeben

**Aufgabe 58.7.** (4 Punkte)

Es sei  $T$  das durch  $(0, 2)$ ,  $(1, -1)$  und  $(-2, -1)$  gegebene Dreieck und

$$h(x, y) = (3x^2y^5 - x \sin y).$$

Finde ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $F$  mit

$$h(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

und berechne damit  $\int_T h d\lambda^2$  durch ein Wegintegral über den Dreiecksrand.

**Aufgabe 58.8.** (4 Punkte)

Bestätige den Satz von Green für das Einheitsquadrat  $T = [0, 1] \times [0, 1]$  und die Vektorfelder

$$F(x, y) = (x^a y^b, x^c y^d)$$

mit  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$  durch explizite Berechnungen.

**Aufgabe 58.9.** (5 Punkte)

Bestätige den Satz von Green durch explizite Berechnungen für die Menge  $T = B(0, 2) \setminus U(0, 1)$  und das Vektorfeld  $F(x, y) = (2x^2 - xy, xy^3)$ .

**Aufgabe 58.10.** (4 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe über ein geeignetes Wegintegral.

**Aufgabe 58.11.** (4 Punkte)

Es sei  $\gamma$  ein stückweise regulärer Weg, der das durch die  $x$ -Achse, die beiden Gleichungen  $x = \frac{1}{3}$  und  $x = 5$  und die Hyperbel (also den Graph der Funktion  $y = \frac{1}{x}$ ) gegebene Gebiet gegen den Uhrzeigersinn umrandet. Berechne das Wegintegral über  $\gamma$  zum (auf  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_{>-1}$  definierten) Vektorfeld

$$F(x, y) = \left( \sin(x^5), \ln x + \frac{1}{(1+y)^2} \right)$$

**Aufgabe 58.12.** (5 Punkte)

Es sei

$$P: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine komplexe Polynomfunktion. Zeige, dass sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil dieser Funktion (jeweils aufgefasst als eine Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}$ ) eine harmonische Funktion ist.

## ANHANG A: BIDLIZENZEN

Die Bilder dieses Textes stammen aus Commons (also <http://commons.wikimedia.org>), und stehen unter unterschiedlichen Lizenzen, die zwar alle die Verwendung hier erlauben, aber unterschiedliche Bedingungen an die Verwendung und Weitergabe stellen. Es folgt eine Auflistung der verwendeten Bilder dieses Textes (nach der Seitenzahl geordnet, von links nach rechts, von oben nach unten) zusammen mit ihren Quellen, Urhebern (Autoren) und Lizenzen. Dabei ist *Quelle* so zu verstehen, dass sich, wenn man

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:>

unmittelbar davor setzt, die entsprechende Datei auf Commons ergibt. *Autor* benennt den Urheber des Werkes, falls dieser bekannt ist. *Benutzer* meint den Hochlader der Datei; wenn keine weitere Information über den Autor vorliegt, so gilt der Benutzer als Urheber. Die Angabe des Benutzernamen ist so zu verstehen, dass sich, wenn man

<http://commons.wikimedia.org/wiki/User:>

unmittelbar davor setzt, die Benutzerseite ergibt. Wenn das Bild ursprünglich in einem anderen Wikimedia-Projekt hochgeladen wurde, so wird die Domäne (bspw. *de.wikipedia.org*) explizit angegeben.

Die *Lizenz* ist die auf der Dateiseite auf Commons angegebene Lizenz. Dabei bedeuten

- GFDL: Gnu Free Documentation License (siehe den angehängten Text, falls diese Lizenz vorkommt)
- CC-BY-SA-2.5 (3.0): Creative Commons Attribution ShareAlike 2.5 (oder 3.0)
- PD: gemeinfrei (public domain)

## ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Quelle = Manhattan distance.svg , Autor = Benutzer Psychonaut auf Commons, Lizenz = PD	15
Quelle = Unit disc.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	16
Quelle = Neighborhood illust1.png , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	16
Quelle = Neighborhood edge.png , Autor = Benutzer Zasdfgbnm auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	20

Quelle = Continuity topology.svg , Autor = Benutzer Dcoetzee auf Commons, Lizenz = PD	25
Quelle = ComplexSinInATimeAxe.gif , Autor = Benutzer Nashev auf Commons, Lizenz = PD	35
Quelle = Cusp.png , Autor = Benutzer Satipatthana auf Commons, Lizenz = PD	43
Quelle = Cycloid f.gif , Autor = Benutzer Zorgit auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	51
Quelle = Helix2.png , Autor = Benutzer Siebrand auf nl Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0	52
Quelle = VectorField.svg , Autor = Benutzer Jim.belk auf Commons, Lizenz = PD	58
Quelle = Simple Harmonic Motion Orbit.gif , Autor = Benutzer Mazemaster auf Commons, Lizenz = PD	74
Quelle = Euler method.png , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	76
Quelle = Simetria axial.png , Autor = Benutzer Rovnet auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	85
Quelle = VerticalShear m=1.25. , Autor = Benutzer RobHar auf Commons, Lizenz = PD	85
Quelle = Homothety in two dim.svg , Autor = Benutzer Lantonov auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	94
Quelle = Monkey Saddle Surface (Shaded).png , Autor = Benutzer Inductiveload auf Commons, Lizenz = PD	136
Quelle = Feldberg 3913.jpg , Autor = Benutzer Flominator auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	136
Quelle = Saddle point.png , Autor = Benutzer Nashev auf Commons, Lizenz = PD	178
Quelle = Passaggio in coordinate polari.svg , Autor = Benutzer Cronholm144 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	203
Quelle = 3D Spherical.svg , Autor = Benutzer Andeggs auf Commons, Lizenz = PD	204
Quelle = Schoenberg-ebringen-isohypsen.png , Autor = Benutzer W-j-s auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	209

	277
Quelle = Rynda Bay Beach.jpg , Autor = Benutzer Straitgate auf Commons, Lizenz = PD	209
Quelle = Agate1 hg.jpg , Autor = Benutzer Hgrobe auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.5	211
Quelle = RLipschitz.jpeg , Autor = Benutzer Ahellwig auf Commons, Lizenz = PD	218
Quelle = Gradient field.png , Autor = Benutzer Christophe.Finot auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	227
Quelle = BodyMassIndex.png , Autor = Benutzer Thire auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.5	233
Quelle = Nebra Scheibe.jpg , Autor = Benutzer Dbachmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	234
Quelle = Bonaventura Cavalieri.jpeg , Autor = Benutzer Gene.arboit auf Commons, Lizenz = PD	241
Quelle = Cavalieri's principle.jpg , Autor = Benutzer Anton auf de Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0	241
Quelle = Integral apl rot objem3.svg , Autor = Benutzer Pajs auf cs Wikipedia, Lizenz = PD	242
Quelle = Coneirr3.svg , Autor = Benutzer Mpfiz auf Commons, Lizenz = PD	243
Quelle = Cavalieriho princip.svg , Autor = Benutzer Pajs auf Commons, Lizenz = PD	244
Quelle = Volume under surface.png , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	248
Quelle = Hesounu* rybník.JPG , Autor = Benutzer Juan de Vojník auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	259
Quelle = Annulus.svg , Autor = Benutzer Nandhp auf Commons, Lizenz = PD	261
Quelle = Green's-theorem-simple-region.svg , Autor = Benutzer Cronholm144 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	265