Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 17

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 17.1. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $\varphi \in \operatorname{Gal}(L|K)$ ein K-Automorphismus. Es sei λ ein Eigenwert von φ. Zeige, dass λ eine Einheitswurzel ist.

Aufgabe 17.2. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $\delta \in G^\vee$ ein Charakter auf der Galoisgruppe $G = \operatorname{Gal}(L|K)$. Man mache sich die Gleichheit

$$L_\delta = \{x \in L |\, \varphi(x) = \delta(\varphi) \cdot x \text{ für alle } \varphi \in G\} = \bigcap_{\varphi \in G} \operatorname{Eig}_{\delta(\varphi)}(\varphi)$$

klar.

Aufgabe 17.3. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume des Frobenius-Homomorphismus auf $\mathbb{F}_{125}$.

Aufgabe 17.4. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume des Frobenius-Homomorphismus auf $\mathbb{F}_{p^p}$.

Aufgabe 17.5. Bestimme die Matrizen zu sämtlichen Körperautomorphismen in Beispiel 16.8 bzgl. einer geeigneten Basis.

Aufgabe 17.6. Bestimme die Nullstellen von $X^6 + 108$ in Beispiel 16.8 und beschreibe, wie die Automorphismen auf diesen Nullstellen wirken. Welche Nullstellen sind konjugiert?

Aufgabe 17.7. Formuliere und beweise das „verschobene Eisensteinkriterium“. Man gebe auch ein Beispiel eines Polynoms $P \in \mathbb{Q}[X]$, wo man die Irreduzibilität nicht mit dem Eisensteinkriterium, aber mit dem verschobenen Eisensteinkriterium nachweisen kann.

Aufgabe 17.8. Formuliere und beweise das *umgekehrte Eisensteinkriterium*, bei dem die Rollen des Leitkoeffizienten und des konstanten Koeffizienten vertauscht werden.

Aufgabe 17.9. Wende eine Form des *Eisensteinkriteriums* an, um die Irreduzibilität der folgenden Polynome aus $\mathbb{Q}[X]$ nachzuweisen.

(1) $X^4 + 2X^2 + 2$,
(2) $20X^5 - 15X^4 + 125X^3 - 10X + 4$,
(3) $X^4 + 9$.

Aufgabe 17.10. Bestimme die Primfaktorzerlegung des Polynoms $X^6 - 1$ über den Körpern $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/(7)$ und $\mathbb{Z}/(5)$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.11. (6 Punkte)

Es sei p eine Primzahl. Betrachte das Polynom

$$P = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X^2 + X + 1\,.$$

Zeige, dass P irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Aufgabe 17.12. (6 Punkte)

Sei K ein Körper und sei p eine Primzahl. Es sei $a \in K$ ein Element, das in K keine p-te Wurzel besitzt. Zeige, dass das Polynom $X^p - a$ irreduzibel ist.

(Tipp: Betrachte die Norm zu einer geeigneten Körpererweiterung.)

Aufgabe 17.13. (3 Punkte)

Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume des Frobenius-Homomorphismus auf $\mathbb{F}_{343}$.

Aufgabe 17.14. (5 Punkte)

Es sei $K \subseteq L = K[x]$ eine endliche einfache Körpererweiterung und sei $\mu_x : L \to L$ die Multiplikation mit x.

a) Schreibe die Matrix der linearen Abbildung μ_x bzgl. der Basis $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ von L mit Hilfe des Minimalpolynoms von x.

b) Zeige ausgehend von der Matrix aus a), dass das charakteristische Polynom zu μ_x mit dem Minimalpolynom zu x übereinstimmt.

c) Begründe „theoretisch“, dass das charakteristische Polynom das Minimalpolynom ist.