Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

14. Januar 2012

Mathematik für Anwender

Testklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl.

Die erzielte Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	4	2	4	4	7	3	4	3	5	7	3	2	3	5	64
erhaltene Pkt.:																	

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Der *Betrag* einer komplexen Zahl $z = a + bi$.
(2) Ein *Untervektorraum* $U \subseteq V$ in einem K-Vektorraum V.
(3) Eine *lineare* Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
(4) Der *Kern* einer linearen Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
(5) Die *geometrische Reihe* für $x \in \mathbb{R}$.
(6) Die *Stetigkeit* einer Abbildung
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
(7) Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
(8) Das *Taylor-Polynom vom Grad n* zu einer n-mal differenzierbaren Funktion
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
im Punkt 0.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Binomische Lehrsatz*.
(2) Der *Multiplikationssatz für Determinanten*.
(3) Das *Quotientenkriterium* für Reihen.
(4) Das *Folgenkriterium* für die Stetigkeit einer Funktion
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Zeige, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Abschätzung
$$3^n \geq n^3$$
gilt.

Aufgabe 4. (2 (0,5+1+0,5) Punkte)

a) Berechne

$$(4-7i)(5+3i)\,.$$

b) Bestimme das inverse Element z^{-1} zu $z = 3+4i$.

c) Welchen Abstand hat z^{-1} aus Teil (b) zum Nullpunkt.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ seien die zwei Untervektorräume

$$U = \{s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$$

und

$$V = \{p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R}\}$$

gegeben. Bestimme eine Basis für $U \cap V$.

Aufgabe 6. (4 (1+1+2) Punkte)

Die Zeitungen A, B und C verkaufen Zeitungsabos und konkurrieren dabei um einen lokalen Markt mit 100000 potentiellen Lesern. Dabei sind innerhalb eines Jahres folgende Kundenbewegungen zu beobachten.

(1) Die Abonnenten von A bleiben zu 80% bei A, 10% wechseln zu B, 5% wechseln zu C und 5% werden Nichtleser.
(2) Die Abonnenten von B bleiben zu 60% bei B, 10% wechseln zu A, 20% wechseln zu C und 10% werden Nichtleser.
(3) Die Abonnenten von C bleiben zu 70% bei C, niemand wechselt zu A, 10% wechseln zu B und 20% werden Nichtleser.
(4) Von den Nichtlesern entscheiden sich je 10% für ein Abonnement von A, B oder C, die übrigen bleiben Nichtleser.

a) Erstelle die Matrix, die die Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres beschreibt.

b) In einem bestimmten Jahr haben alle drei Zeitungen je 20000 Abonnenten und es gibt 40000 Nichtleser. Wie sieht die Verteilung ein Jahr später aus?

c) Die drei Zeitungen expandieren in eine zweite Stadt, wo es bislang überhaupt keine Zeitungen gibt, aber ebenfalls 100000 potentielle Leser. Wie viele Leser haben dort die einzelnen Zeitungen (und wie viele Nichtleser gibt es noch) nach drei Jahren, wenn dort die gleichen Kundenbewegungen zu beobachten sind?

Aufgabe 7. (7 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass es einen K-Vektorraum W und eine surjektive K-lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

gibt derart, dass $U = \operatorname{kern} \varphi$ ist.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Bestimme die komplexen Zahlen z, für die die Matrix

$$\begin{pmatrix} z & 2 & 2z+1 \\ 3 & 1 & 4 \\ z & 5 & z \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar ist.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $a_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen a_1, a_2, a_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

AUFGABE 11. (5 Punkte)

Untersuche, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{4n^3-3n+2}$$

konvergiert oder divergiert.

AUFGABE 12. (7 Punkte)

Beweise das Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

AUFGABE 13. (3 Punkte)

Berechne das Cauchy-Produkt bis zur vierten Potenz x^4 der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe.

AUFGABE 14. (2 (1+1) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right).$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

AUFGABE 15. (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^2 + 1.$$

Bestimme die Tangenten an f, die lineare Funktionen sind (die also durch den Nullpunkt verlaufen).

AUFGABE 16. (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt[3]{x^2}.$$

Bestimme die Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist.