Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 23

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und $K \subseteq K' \subseteq L$ ein Zwischenkörper. Es sei $f \in L$ algebraisch über K. Zeige, dass dann f auch algebraisch über K' ist.

Aufgabe 2. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung vom Grad p, wobei p eine Primzahl sei. Es sei $x \in L$, $x \notin K$. Zeige, dass $K[x] = L$ ist.

Aufgabe 3. Seien $K \subseteq L \subseteq M$ Körpererweiterungen derart, dass M über K endlich ist. Zeige, dass dann auch M über L und L über K endlich sind.

Aufgabe 4. Zeige, dass der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ ist.

Aufgabe 5. Sei K ein Körper der positiven Charakteristik p. Sei $F : K \to K$ der Frobenius-Homomorphismus. Zeige, dass genau die Elemente aus $\mathbb{Z}/(p)$ invariant unter F sind.

Aufgabe 6. Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$f : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung, also $f \in \operatorname{End}(V)$. Zeige, dass die von f erzeugte K-Algebra $K[f]$ kommutativ ist, und zeige, dass f algebraisch ist, ohne den Satz von Cayley-Hamilton zu verwenden.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Es seien $\mathbb{Q} \subseteq K \subset \mathbb{C}$ und $\mathbb{Q} \subseteq L \subset \mathbb{C}$ zwei endliche Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ vom Grad d bzw. e. Es seien d und e teilerfremd. Zeige, dass dann

$$K \cap L = \mathbb{Q}$$

ist.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Konstruiere endliche Körper mit $64, 81, 121, 125$ und 128 Elementen.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Sei q eine echte Primzahlpotenz und $\mathbb{F}_q$ der zugehörige endliche Körper. Zeige, dass in $\mathbb{F}_{q^2}$ jedes Element aus $\mathbb{F}_q$ ein Quadrat ist.

Aufgabe 10. (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl und $e, d \in \mathbb{N}_+$. Zeige: $\mathbb{F}_{p^d}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{F}_{p^e}$ genau dann, wenn e ein Vielfaches von d ist.

Aufgabe 11. (2 Punkte)

Sei p eine Primzahl und $q = p^n$, $n \geq 2$. Zeige, dass $\mathbb{Z}/(p^n)$ kein Vektorraum über $\mathbb{Z}/(p)$ sein kann.

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Finde einen Erzeuger der Einheitengruppe eines Körpers mit 27 Elementen. Wie viele solche Erzeuger gibt es?

Aufgabe 13. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Beweise die folgenden Rechenregeln für das formale Ableiten $F \mapsto F'$:

(1) Die Ableitung eines konstanten Polynoms ist null.
(2) Die Ableitung ist K-linear.
(3) Es gilt die *Produktregel*, also

$$(FG)' = FG' + F'G\,.$$

Es sei K ein Körper. Ein Element $a \in K$ heißt *mehrfache Nullstelle* eines Polynoms $P \in K[X]$, wenn in der Primfaktorzerlegung von P das lineare Polynom $X - a$ mit einem Exponenten ≥ 2 vorkommt.

Aufgabe 14. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $F \in K[X]$ und $a \in K$. Zeige, dass a eine mehrfache Nullstelle von F genau dann ist, wenn $F'(a) = 0$ ist, wobei F' die formale Ableitung von F bezeichnet.