Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Vorlesung 75

Die Transformationsformel für Integrale

KOROLLAR 75.1. *Es seien G und H offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und es sei*

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

ein C^1-Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante $(J(\varphi))(x) = \det (D\varphi)_x$ für $x \in G$. Es sei $Q \subseteq G$ ein kompakter Quader Dann gilt

$$\lambda^n(\varphi(Q)) \,=\, \int_Q |(J(\varphi))(x)| \, d\lambda^n .$$

Beweis. Da φ stetig differenzierbar ist, ist die Abbildung

$$G \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto j(x) = |(J(\varphi))(x)| = |\det (D\varphi)_x|,$$

stetig und daher nach Satz 22.11 gleichmäßig stetig auf dem kompakten Quader Q. D.h. zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $j(B(x, \delta)) \subseteq B(j(x), \epsilon)$ für alle $x \in Q$. Dann gibt es auch ein $\tilde{\delta} > 0$ derart, dass für alle kompakten Teilquader $K \subseteq Q$ mit maximaler Kantenlänge $\leq \tilde{\delta}$ das Bild in einem abgeschlossenen Intervall der Länge 2ϵ liegt. Damit ist die Differenz zwischen dem Minimum und dem Maximum von $\{j(x) |\, x \in K\}$ maximal gleich 2ϵ.

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir unterteilen Q in k^n kompakte Teilquader, indem wir jede Quaderkante in k gleichlange Teile unterteilen, und wählen dabei $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass die entstehenden k^n Teilquader die oben beschriebene Eigenschaft haben. Es sei I die Indexmenge dieser Unterteilung, es ist also $Q = \bigcup_{i \in I} K_i$ und damit $\varphi(Q) = \bigcup_{i \in I} \varphi(K_i)$. Diese Vereinigung ist nicht disjunkt, jedoch sind die Schnittmengen als Bilder von Quaderseiten nach Lemma 67.11 und nach Korollar 74.6 Nullmengen. Wir wenden Lemma 74.7 auf die Teilquader an und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \lambda^n(K_i) \cdot \min (j(x), x \in K_i) &\leq \lambda^n(\varphi(Q)) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda(\varphi(K_i)) \\ &\leq \sum_{i \in I} \lambda^n(K_i) \cdot \max (j(x), x \in K_i). \end{aligned}$$

Dabei ist die Differenz zwischen links und rechts durch

$$\sum_{i \in I} \lambda^n(K_i) 2\epsilon \,=\, 2\epsilon \lambda^n(Q)$$

beschränkt, kann also durch $\epsilon \to 0$ beliebig klein gemacht werden. Diese Abschätzungen gelten wegen der Monotonie des Integrals auch für das Integral $\int_Q j(x)\, d\lambda^n(x)$, so dass

$$\lambda^n(\varphi(Q)) \;=\; \int_Q j(x)\, d\lambda^n(x)$$

gilt. □

Satz 75.2. *Es seien G und H offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und es sei*

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

ein C^1-Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante $(J(\varphi))(x) = \det{(D\varphi)_x}$ für $x \in G$. Es sei $S \subseteq G$ eine messbare Menge. Dann ist $\varphi(S)$ ebenfalls messbar und es gilt

$$\lambda^n(\varphi(S)) \;=\; \int_S |J(\varphi)|\, d\lambda^n.$$

Beweis. Ein Diffeomorphismus und seine Umkehrabbildung sind stetig, daher liegt eine Bijektion der messbaren Teilmengen von G und von H vor. Wir betrachten die beiden Zuordnungen

$$\mathcal{B}(G) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\; S \longmapsto \int_S |J(\varphi)|\, d\lambda^n,$$

also das Maß auf G mit der Dichte $|J(\varphi)|$, und

$$\mathcal{B}(G) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\; S \longmapsto \lambda^n(\varphi(S)),$$

also das Bildmaß von λ^n unter φ, und müssen zeigen, dass diese beiden Maße gleich sind. Nach Korollar 75.1 gilt die Gleichheit für alle kompakten Quader. Aufgrund von Korollar 74.6 bzw. Aufgabe 70.2 gilt die Gleichheit auch für alle offenen bzw. „nach oben halboffenen“ Quader, also Produkte von nach oben halboffenen Intervallen. Die Menge der endlichen disjunkten Vereinigungen von diesen zuletzt genannten Quadern bilden einen Mengen-Präring im $\mathbb{R}^n$. Diese Menge ist auch ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem für das System der Borelmengen. Daher müssen nach Satz 64.7 die beiden Maße generell übereinstimmen. □

Wir kommen zur *Transformationsformel für Integrale.*

Satz 75.3. *Es seien G und H offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und es sei*

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

ein C^1-Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante $(J(\varphi))(x) = \det{(D\varphi)_x}$ für $x \in G$. Es sei

$$f : H \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine messbare Funktion. Dann ist f genau dann integrierbar auf H, wenn die Hintereinanderschaltung $f \circ \varphi$ auf G integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_H f \, d\lambda^n = \int_G (f \circ \varphi) |J(\varphi)| \, d\lambda^n .$$

Beweis. Die Zuordnung $S \mapsto \lambda^n(\varphi(S))$ für messbare Mengen $S \subseteq G$ ist ein Maß, und zwar handelt es sich um das Bildmaß $\varphi_*^{-1}\lambda^n$ von λ^n unter der Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : H \longrightarrow G .$$

Nach Satz 75.2 besitzt dieses Maß die Dichte $x \mapsto |(J(\varphi))(x)|$. Daher gilt nach Aufgabe 75.3 und der allgemeinen Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int_G (f \circ \varphi) \cdot |J(\varphi)| \, d\lambda^n &= \int_G (f \circ \varphi) \, d(\varphi_*^{-1}\lambda^n) \\ &= \int_H (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) \, d\lambda^n \\ &= \int_H f \, d\lambda^n . \end{aligned}$$

$\square$

Beispiele zur Transformationsformel

Korollar 75.4. *Es sei*

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, (r, \theta) \longmapsto (r \cos \theta \, , r \sin \theta \,),$$

die Polarkoordinatenabbildung und es seien G und H offene Mengen, auf denen φ einen Diffeomorphismus induziert. Es sei

$$f : H \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine integrierbare Funktion. Dann ist

$$\begin{aligned} & \int_H f(x,y) \, d\lambda^2(x,y) \\ = & \int_G f(r \cos \theta \, , r \sin \theta \,) \cdot r \, d\lambda^2(r, \theta). \end{aligned}$$

Dies gilt auch dann, wenn außerhalb von Nullmengen ein Diffeomorphismus vorliegt. Insbesondere gilt bei stetigem f die Formel

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \, d\lambda^2(x,y) \\ = & \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta \, , r \sin \theta \,) \cdot r \, d\theta \, dr . \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt wegen

$$\det(D\varphi) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

direkt aus Satz 75.3. □

Lemma 75.5. *Es ist*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Beweis. Durch eine einfache Substitution ist die Aussage äquivalent zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 1.$$

Nennen wir dieses Integral I. Nach Korollar 74.2 ist

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,d\lambda^2.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten $x = \cos\theta$ und $y = \sin\theta$ ist dieses Integral nach Korollar 75.4 und nach einer erneuten Anwendung von Korollar 74.2 gleich

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]\times\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\,d\lambda^2(r,\theta) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{[0,2\pi]} 1\,d\lambda^1(\theta)\right)\left(\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\,d\lambda^1(r)\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\,d\lambda^1(r) \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\,dr \\
&= -e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{\infty} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Damit ist auch $I = 1$. □

Beispiel 75.6. Es soll eine Straße in der Ebene der Breite $2a$ asphaltiert werden. Dabei wird die Straße durch den Verlauf des Mittelstreifen vorgegeben, der durch die Kurve

$$[0,s] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \psi(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix},$$

bestimmt ist. Dabei sei ψ zweimal stetig differenzierbar und bogenparametrisiert, d.h. es sei $f'(t)^2 + g'(t)^2 = 1$, was bedeutet, dass die Mittelstreifenkurve mit normierter Geschwindigkeit durchlaufen wird. Die Breite ist dabei senkrecht zum Mittelstreifen zu messen. Die zu asphaltierende Trasse wird dann durch die Abbildung

$$\varphi : [0, s] \times [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t, r) \longmapsto \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -g'(t) \\ f'(t) \end{pmatrix},$$

parametrisiert. Wir nehmen an, dass diese Parametrisierung injektiv ist, was erfüllt ist, wenn die Mittelstreifenabbildung ψ injektiv ist und die Straße nicht zu breit werden soll.

Die Jacobi-Matrix der Parametrisierung ist

$$(D\varphi)_{(t,r)} = \begin{pmatrix} f'(t) - rg''(t) & -g'(t) \\ g'(t) + rf''(t) & f'(t) \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$f'(t)f'(t) + g'(t)g'(t) - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)) \;=\; 1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)).$$

Daher ist die Asphaltfläche nach der Transformationsformel gleich

$$\int_{[0,s]\times[-a,a]} |1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t))| \, d\lambda^2 .$$

Wenn wir weiter annehmen, dass

$$|g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)| \le \frac{1}{a}$$

ist (was bedeutet, dass die Straßenbreite nicht allzu groß ist), so ist dieses Integral nach Korollar 74.2 geich

$$\begin{aligned} & \int_{[0,s]\times[-a,a]} 1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)) \, d\lambda^2 \\ = \;& 2as + (\int_{-a}^{a} r\, dr)(\int_0^s g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)\, dt) \\ = \;& 2as + 0 \cdot (\int_0^s g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)\, dt) \\ = \;& 2as. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Asphaltfläche gleich der Mittelstreifenlänge mal der Straßenbreite ist.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Hesounu* rybník.JPG, Autor = Benutzer Juan de Vojníkov auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 4