Dr. A. Kaid **Osnabrück SS 2010**

Wiederholertutorium Mathematik I

Aufgabenblatt 3

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 3.1. Zeige, dass für jede reelle Zahl $x > 0$ die Ungleichung $x+\frac{1}{x} \geq 2$ erfüllt ist. Wann gilt die Gleichheit?

Aufgabe 3.2. Bestimme Supremum, Infimum, Maximum und Minimum, sofern diese existieren, der folgenden Teilmengen der reellen Zahlen:

(1) $\left\{(-1)^n - \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}_+\right\}$,
(2) $\left\{\frac{x}{1+x} \ : \ x \in \mathbb{R}, \ x > -1\right\}$,
(3) $\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \ : \ n, m \in \mathbb{N}_+\right\}$.

Aufgabe 3.3. Es seien A und B beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Ferner sei $A + B := \{a + b \ : \ a \in A, \ b \in B\}$ und $A - B := \{a - b \ : \ a \in A, \ b \in B\}$.

(1) Zeige, dass $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
(2) Wie lautet die entsprechende Formel für $\sup(A - B)$?
(3) Zeige, dass $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.
(4) Was lässt sich über $\sup(A \cap B)$ sagen?
(5) Wie lautet die Entsprechung zu (3) für unendlich viele Mengen?

Aufgabe 3.4. Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine echte Teilmenge mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $X \neq$,
(2) aus $x \in X$ und $y < x$ folgt $y \in X$,
(3) aus $x \in X$ folgt, dass es ein $z \in X$ gibt mit $x < z$.

Zeige, dass es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$X =]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < a\}.$$

Aufgabe 3.5. Betrachte die durch $x_0 := 1, x_{n+1} := x_n + \frac{1}{x_n}$ rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt? Konvergiert die Folge?

Hausaufgaben (Korrektur nur für Leute ohne Klausurberechtigung)

Aufgabe 3.6. (4 Punkte)

Sei $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Zeige, dass $(1+y)^n \geq \frac{n^2 y^2}{4}$ gilt.

Aufgabe 3.7. (4 Punkte)

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichung $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$?