Fachbereich Mathematik/Informatik **14. Januar 2012**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik für Anwender

Testklausur mit Lösungen

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl.

Die erzielte Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	4	2	4	4	7	3	4	3	5	7	3	2	3	5	64
erhaltene Pkt.:																	

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Der *Betrag* einer komplexen Zahl $z = a + bi$.
(2) Ein *Untervektorraum* $U \subseteq V$ in einem K-Vektorraum V.
(3) Eine *lineare* Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
(4) Der *Kern* einer linearen Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
(5) Die *geometrische Reihe* für $x \in \mathbb{R}$.
(6) Die *Stetigkeit* einer Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
(7) Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
(8) Das *Taylor-Polynom vom Grad n* zu einer n-mal differenzierbaren Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

im Punkt 0.

Lösung

(1) Der Betrag von $z = a + bi$ ist

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

(2) Die Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum*, wenn die folgenden Eigenschaften gelten.
   (a) $0 \in U$.
   (b) Mit $u, v \in U$ ist auch $u + v \in U$.
   (c) Mit $u \in U$ und $s \in K$ ist auch $su \in U$.
(3) Eine Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.
   (a) $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in V$.
   (b) $\varphi(sv) = s\varphi(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in V$.

(4) Man nennt

$$\operatorname{kern} \varphi := \{v \in V \,|\, \varphi(v) = 0\}$$

den *Kern* von φ.

(5) Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

heißt die *geometrische Reihe* in x.

(6) Eine Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt stetig in a, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$f\big(]x - \delta, x + \delta[\big) \subseteq]f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon[$$

gilt.

(7) Die Funktion f heißt *differenzierbar* in a, wenn der Limes

$$\lim_{x \in \mathbb{R}\setminus\{a\},\, x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert.

(8) Das Polynom

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

heißt das *Taylor-Polynom vom Grad* n zu f in 0.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Binomische Lehrsatz.*
(2) Der *Multiplikationssatz für Determinanten.*
(3) Das *Quotientenkriterium* für Reihen.
(4) Das *Folgenkriterium* für die Stetigkeit einer Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Lösung

(1) Es seien a, b Elemente in einem Körper. Ferner sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

(2) Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt für Matrizen $A, B \in \operatorname{Mat}_n(K)$ die Beziehung

$$\det (A \circ B) = \det A \cdot \det B .$$

(3) Es sei

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine Reihe von reellen Zahlen. Es gebe eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ und ein k_0 mit

$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q$$

für alle $k \geq k_0$ (insbesondere sei $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$). Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

(4) Die Stetigkeit von f im Punkt a ist äquivalent dazu, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert, die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ konvergiert.

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Zeige, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Abschätzung
$$3^n \geq n^3$$
gilt.

Lösung

Für $n = 1, 2, 3$ ergibt sich die Abschätzung durch direktes Nachrechnen. Für $n \geq 4$ wird die Aussage durch Induktion bewiesen. Wir nehmen also an, dass die Aussage für ein $n \geq 3$ schon bewiesen ist und haben sie für $n + 1$ zu zeigen. Dies ergibt sich aus
$$\begin{aligned} 3^{n+1} &= 3 \cdot 3^n \\ &\geq 3n^3 \\ &= n^3 + n^3 + n^3 \\ &\geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= (n+1)^3, \end{aligned}$$
wobei wir in der zweiten Zeile die Induktionsvoraussetzung, in der vierten Zeile die Voraussetzung $n \geq 3$ und in der fünften Zeile die binomische Formel angewendet haben.

Aufgabe 4. (2 (0,5+1+0,5) Punkte)

a) Berechne

$$(4-7i)(5+3i)\,.$$

b) Bestimme das inverse Element z^{-1} zu $z = 3+4i$.

c) Welchen Abstand hat z^{-1} aus Teil (b) zum Nullpunkt.

Lösung

a) Es ist

$$(4-7i)(5+3i) \;=\; 20+21-35i+12i \;=\; 41-23i.$$

b) Das inverse Element zu z ist $\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$, also ist

$$z^{-1} \;=\; \frac{a-bi}{a^2+b^2} \;=\; \frac{3-4i}{3^2+4^2} \;=\; \frac{3}{25}-\frac{4}{25}i.$$

c) Der Abstand von z zum Nullpunkt ist $|z| \;=\; \sqrt{25} \;=\; 5$, daher ist der Abstand von z^{-1} zum Nullpunkt gleich $\frac{1}{5}$.

Aufgabe 5. (4 Punkte)
Im $\mathbb{R}^3$ seien die zwei Untervektorräume

$$U = \{s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$$

und

$$V = \{p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R}\}$$

gegeben. Bestimme eine Basis für $U \cap V$.

Lösung

Jeder Vektor aus dem Durchschnitt $U \cap V$ besitzt eine Darstellung

$$s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

Die Koeffiziententupel (s, t, p, q) bilden den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 7 & 9 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

das wir lösen müssen. Wir ersetzen die erste Gleichung durch

$$I' = I - 3II : \ -s + 10t + q = 0$$

und die dritte Gleichung durch

$$III' = III - 4I' : \ 11s - 31t = 0 .$$

Wir wählen $s = 31$, so dass $t = 11$ sein muss. Dies legt eindeutig q und dann auch p fest. Daher ist der Durchschnitt $U \cap V$ eindimensional und

$$31 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 + 44 \\ 31 - 22 \\ 217 + 99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106 \\ 9 \\ 316 \end{pmatrix}$$

ist ein Basisvektor von $U \cap V$.

AUFGABE 6. (4 (1+1+2) Punkte)

Die Zeitungen A, B und C verkaufen Zeitungsabos und konkurrieren dabei um einen lokalen Markt mit 100000 potentiellen Lesern. Dabei sind innerhalb eines Jahres folgende Kundenbewegungen zu beobachten.

(1) Die Abonnenten von A bleiben zu 80% bei A, 10% wechseln zu B, 5% wechseln zu C und 5% werden Nichtleser.
(2) Die Abonnenten von B bleiben zu 60% bei B, 10% wechseln zu A, 20% wechseln zu C und 10% werden Nichtleser.
(3) Die Abonnenten von C bleiben zu 70% bei C, niemand wechselt zu A, 10% wechseln zu B und 20% werden Nichtleser.
(4) Von den Nichtlesern entscheiden sich je 10% für ein Abonnement von A, B oder C, die übrigen bleiben Nichtleser.

a) Erstelle die Matrix, die die Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres beschreibt.

b) In einem bestimmten Jahr haben alle drei Zeitungen je 20000 Abonnenten und es gibt 40000 Nichtleser. Wie sieht die Verteilung ein Jahr später aus?

c) Die drei Zeitungen expandieren in eine zweite Stadt, wo es bislang überhaupt keine Zeitungen gibt, aber ebenfalls 100000 potentielle Leser. Wie viele Leser haben dort die einzelnen Zeitungen (und wie viele Nichtleser gibt es noch) nach drei Jahren, wenn dort die gleichen Kundenbewegungen zu beobachten sind?

Lösung

a) Die Matrix, die die Kundenbewegungen (in der Reihenfolge A, B, C und Nichtleser) beschreibt, ist

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

b) Die Kundenverteilung nach einem Jahr zur Ausgangsverteilung $(20000, 20000, 20000, 40000)$ ist

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20000 \\ 20000 \\ 20000 \\ 40000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22000 \\ 20000 \\ 23000 \\ 35000 \end{pmatrix}.$$

c) Die Ausgangsverteilung ist $(0, 0, 0, 100000)$, daher ist die Verteilung nach einem Jahr gleich $(10000, 10000, 10000, 70000)$.

Nach zwei Jahren ist die Kundenverteilung

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10000 \\ 10000 \\ 10000 \\ 70000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16000 \\ 15000 \\ 16500 \\ 52500 \end{pmatrix}.$$

Nach drei Jahren ist die Kundenverteilung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16000 \\ 15000 \\ 16500 \\ 52500 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 12800 + 1500 + 5250 \\ 1600 + 9000 + 1650 + 5250 \\ 800 + 3000 + 11550 + 5250 \\ 800 + 1500 + 3300 + 36750 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19550 \\ 17500 \\ 20600 \\ 42350 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7. (7 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass es einen K-Vektorraum W und eine surjektive K-lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

gibt derart, dass $U = \operatorname{kern} \varphi$ ist.

Lösung

Der Unterraum U ist ebenfalls endlichdimensional. Es sei $u_1, u_2, \ldots, u_m$ eine Basis von U, die wir durch $v_1, \ldots, v_n \in V$ zu einer Basis von V ergänzen können. Es sei $W = K^n$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow K^n,$$

die durch

$$\varphi(u_i) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m$$

und

$$\varphi(v_j) = e_j \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

festgelegt ist (dabei sei e_j der j-te Standardvektor des K^n), was nach dem Basisfestlegungssatz möglich ist. Wegen

$$\varphi(\sum_{j=1}^{n} t_j v_j) = \sum_{j=1}^{n} t_j \varphi(v_j) = \sum_{j=1}^{n} t_j e_j$$

ist die Abbildung surjektiv. Offenbar ist $U \subseteq \operatorname{kern} \varphi$. Es sei

$$v = \sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} t_j v_j \in \operatorname{kern} \varphi \,.$$

Dann ist

$$0 = \varphi(v) = \sum_{j=1}^{n} t_j e_j.$$

Da die Standardbasis vorliegt, sind die $t_j = 0$ und daher ist $v \in U$. Also ist $U = \operatorname{kern} \varphi$.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Lösung

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -13 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{26} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{3}{26} \\ \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{26} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

AUFGABE 9. (4 Punkte)

Bestimme die komplexen Zahlen z, für die die Matrix

$$\begin{pmatrix} z & 2 & 2z+1 \\ 3 & 1 & 4 \\ z & 5 & z \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar ist.

Lösung

Die Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante $\neq 0$ ist. Wir müssen also die Nullstellen der Determinante bestimmen. Die Determinante ist (nach der Regel von Sarrus)

$$z^2 + 8z + 30z + 15 - 2z^2 - z - 20z - 6z \;=\; -z^2 + 11z + 15.$$

Dies ist gleich 0 genau dann, wenn

$$z^2 - 11z - 15 = 0$$

ist. Durch quadratisches Ergänzen führt diese Gleichung auf

$$\left(z - \frac{11}{2}\right)^2 \;=\; 15 + \frac{121}{4} \;=\; \frac{181}{4}.$$

Daher sind

$$z_1 = \frac{\sqrt{181}}{2} + \frac{11}{2} = \frac{11 + \sqrt{181}}{2} \text{ und } z_2 = -\frac{\sqrt{181}}{2} + \frac{11}{2} = \frac{11 - \sqrt{181}}{2}$$

die beiden einzigen Lösungen der quadratischen Gleichung. Diese zwei reellen Zahlen sind also die einzigen (reellen oder komplexen) Zahlen, für die die Matrix nicht invertierbar ist.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $a_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen a_1, a_2, a_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

Lösung

Die Formel für a_{n+1} lautet

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right) .$$

Daher ist

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{7}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9+7}{3}\right) = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$$

Somit ist

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} + \frac{7}{8/3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} + \frac{21}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{64+63}{24} = \frac{127}{48}.$$

Schließlich ist

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{127}{48} + \frac{7}{127/48}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{127}{48} + \frac{336}{127}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{16129+16128}{6096} = \frac{32257}{12192}.$$

Aufgabe 11. (5 Punkte)
Untersuche, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{4n^3-3n+2}$$

konvergiert oder divergiert.

Lösung

Für $n \geq 5$ ist

$$2n+5 \leq 3n$$

und für $n \geq 1$ ist

$$4n^3-3n+2 = n^3+3n^3-3n+2 \geq n^3+3n(n^2-1) \geq n^3.$$

Daher gilt für die Reihenglieder für $n \geq 5$ die Abschätzung

$$\frac{2n+5}{4n^3-3n+2} \leq \frac{3n}{4n^3-3n+2} \leq \frac{3n}{n^3} = 3\frac{1}{n^2}.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert nach Beispiel 14.12 und dies gilt auch für $\sum_{n=1}^{\infty} 3\frac{1}{n^2}$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert auch

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2n+5}{4n^3-3n+2}$$

und daher konvergiert auch die in Frage stehende Reihe.

Aufgabe 12. (7 Punkte)

Beweise das Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Es bezeichne (1) die Stetigkeit von f im Punkt x und (2) die Eigenschaft, dass für jede gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Wir müssen die Äquivalenz von (1) und (2) zeigen.

Sei (1) erfüllt und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$ ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen (1) gibt es ein δ mit der angegebenen Eigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$d(x_n, x) \leq \delta \,.$$

Nach der Wahl von δ ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \,,$$

so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert.

Sei (2) erfüllt. Wir nehmen an, dass f nicht stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ Elemente $z \in \mathbb{R}$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand besitzt, der größer als ϵ ist. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. D.h. für jede natürliche Zahl gibt es ein $x_n \in \mathbb{R}$ mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon \,.$$

Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolgenglieder zu $f(x)$ zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (2).

Aufgabe 13. (3 Punkte)

Berechne das Cauchy-Produkt bis zur vierten Potenz x^4 der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe.

Lösung

Die geometrische Reihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ und die Exponentialreihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$. Das Cauchy-Produkt von zwei Reihen ergibt sich einfach dadurch, dass man jeden Summanden mit jedem Summanden multipliziert und gleiche Potenzen aufsummiert. Daher können die Potenzen x^5, x^6, etc. ignoriert werden und es ist

$$\begin{aligned}
& (1+x+x^2+x^3+x^4)\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4\right) \\
= & \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4\right)+\left(x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4\right) \\
& +\left(x^2+x^3+\frac{1}{2}x^4\right)+x^3+x^4+x^4+\ldots \\
= & 1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+\frac{65}{24}x^4+\ldots .
\end{aligned}$$

Das Cauchy-Produkt bis zur vierten Potenz x^4 der beiden Reihen ist also

$$1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+\frac{65}{24}x^4 .$$

AUFGABE 14. (2 (1+1) Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right).$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Lösung

a) Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{1+x^2}.$$

b) Es ist

$$f''(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{1+2x^2+x^4}.$$

Aufgabe 15. (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^2 + 1.$$

Bestimme die Tangenten an f, die lineare Funktionen sind (die also durch den Nullpunkt verlaufen).

Lösung

Eine lineare Funktion wird durch $g(x) = ax$ mit $a \in \mathbb{R}$ beschrieben. Eine lineare Funktion, die im Punkt $(x, f(x))$ tangential zu f ist, muss $a = f'(x)$ und $f(x) = ax$ erfüllen. Daraus ergibt sich die Bedingung

$$x^2 + 1 = (2x)x$$

bzw.

$$x^2 = 1\,.$$

Also ist $x = 1$ oder $x = -1$. Daher gibt es zwei Tangenten an f, die lineare Funktionen sind, nämlich $2x$ und $-2x$.

AUFGABE 16. (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt[3]{x^2}.$$

Bestimme die Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist.

Lösung

Die Funktion $x \mapsto x^3$ ist überall differenzierbar und die Ableitung ist nur an der Stelle $x = 0$ gleich 0. Daher ist die Umkehrfunktion $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ für $y \neq 0$ differenzierbar. Daher ist auch f als Hintereinanderschaltung von $x \mapsto x^2$ und dieser Funktion für $x \neq 0$ differenzierbar.

Für $x = 0$ betrachten wir direkt den Differenzenquotient, also für $h \neq 0$ den Ausdruck

$$\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h}.$$

Wir betrachten positive h und können den Nenner als

$$h = \sqrt[3]{h^3} = \sqrt[3]{h^2} \cdot \sqrt[3]{h}$$

schreiben. Daher ist der Differenzenquotient gleich

$$\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \frac{\sqrt[3]{h^2}}{\sqrt[3]{h^2} \cdot \sqrt[3]{h}} = \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \sqrt[3]{\frac{1}{h}}.$$

Für $h_n = \frac{1}{n}$ steht hier $\sqrt[3]{n}$ und dies divergiert, also existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten nicht. Daher ist f in 0 nicht differenzierbar.