Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 44

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 44.1. Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto xy,$$

(1) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(1,0)$,
(2) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(2,5)$,
(3) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $(1,0)$,
(4) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $(0,1)$,
(5) im Punkt $(2,3)$ in Richtung $(-1,0)$,
(6) im Punkt $(3,7)$ in Richtung $(5,-4)$.

Aufgabe 44.2. Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \frac{x}{y},$$

(1) im Punkt $(0,1)$ in Richtung $(1,0)$,
(2) im Punkt $(0,1)$ in Richtung $(0,1)$,
(3) im Punkt $(1,3)$ in Richtung $(2,4)$,
(4) im Punkt $(-1,6)$ in Richtung $(-3,-1)$,
(5) im Punkt $\left(1, \frac{1}{100}\right)$ in Richtung $(0,-1)$.

Aufgabe 44.3. Sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f in einem Punkt $P \in \mathbb{R}$ genau dann differenzierbar ist, wenn f in P in Richtung 1 differenzierbar ist, und dass dann die Gleichheit

$$(D_1 f)(P) = f'(P)$$

gilt.

Aufgabe 44.4. Es seien V und W euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ und $v \in V$. Es sei

$$\varphi\colon\, G \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Zeige, dass die Richtungsableitung $(D_v\varphi)(P)$ im Punkt P genau dann existiert, wenn die Kurve

$$I \longrightarrow W,\, t \longmapsto \varphi(P + tv),$$

in $t = 0$ differenzierbar ist. Wie muss dabei das Intervall I gewählt werden?

Aufgabe 44.5. Bestimme, für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^n$ und welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung der euklidischen Norm

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

existiert.

Aufgabe 44.6. Untersuche die Funktion

$$f\colon\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

im Nullpunkt $(0, 0)$ auf Richtungsableitungen. Man entscheide für jede Gerade G durch den Nullpunkt, ob die Einschränkung von f auf G im Nullpunkt ein Extremum besitzt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 44.7. (4 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto x^2 \sin y - e^x y - x,$$

(1) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(1, 0)$,
(2) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(0, 1)$,
(3) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(2, 0)$,
(4) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(1, -3)$,
(5) im Punkt $(1, 1)$ in Richtung $(1, 1)$,
(6) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(-1, \frac{1}{2})$,
(7) im Punkt $(5, 7)$ in Richtung $(1, 0)$,
(8) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(5, 7)$.

Aufgabe 44.8. (2 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(x, y) |\, x^2 + y^3 = 0\big\} \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto \frac{x^2 - xy + y^4}{x^2 + y^3},$$

(1) im Punkt $(1,1)$ in Richtung $(1,0)$,
(2) im Punkt $(0,1)$ in Richtung $(0,1)$,
(3) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $(0,1)$,
(4) im Punkt $(3,-2)$ in Richtung $(2,-5)$.

Aufgabe 44.9. (5 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitungen der Funktion

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n},$$

in einem Punkt

$$a = (a_1, \ldots, a_n)$$

in Richtung

$$v = (v_1, \ldots, v_n)\,.$$

Aufgabe 44.10. (4 Punkte)

Zeige, unter Verwendung von Aufgabe 44.9, dass zu einer polynomialen Funktion

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

zu einer fixierten Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung $D_v\varphi$ existiert und selbst polynomial ist.

Aufgabe 44.11. (4 Punkte)

Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ ein Punkt, $v \in V$ ein Vektor und sei

$$f\colon\ G \longrightarrow W$$

eine Abbildung, die im Punkt P in Richtung v differenzierbar sei. Zeige, dass f auch in Richtung cv mit $c \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und die Beziehung $(D_{cv}f)(P) = c(D_v f)(P)$ gilt.