Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 8

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 8.1. Seien $M \subseteq N$ kommutative Monoide. Zeige, dass durch

$$\tilde{M} = \{n \in N \mid \text{es gibt } k \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } kn \in M\}$$

ein Untermonoid von N gegeben ist, das M umfasst.

Aufgabe 8.2. Wir betrachten die kommutativen Monoide $M = \mathbb{N}^r$ und $N = \mathbb{N}^s$. Zeige, dass ein Monoidhomomorphismus von M nach N eindeutig durch eine Matrix (mit r Spalten und s Zeilen) mit Einträgen aus $\mathbb{N}$ bestimmt ist.

Aufgabe 8.3. Sei M ein kommutatives Monoid. Zeige, dass die zugehörige Differenzgruppe $\Gamma = \Gamma(M)$ eine kommutative Gruppe ist, und dass sie folgende universelle Eigenschaft besitzt: Zu jedem Monoidhomomorphismus

$$\varphi\colon M \longrightarrow G$$

in eine Gruppe G gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{\varphi}\colon \Gamma \longrightarrow G,$$

der φ fortsetzt.

Aufgabe 8.4. Sei M ein kommutatives Monoid mit zugehöriger Differenzgruppe $\Gamma = \Gamma(M)$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) M ist ein Monoid mit Kürzungsregel.
(2) Die kanonische Abbildung $M \to \Gamma(M)$ ist injektiv.
(3) M lässt sich als Untermonoid einer Gruppe realisieren.

Aufgabe 8.5. Sei R ein kommutativer Ring. Beweise die R-Algebraisomorphie

$$R[\mathbb{Z}^n] \cong R[X_1, \ldots, X_n]_{X_1 \cdots X_n}$$

mit Hilfe der universellen Eigenschaften von Monoidringen und Nenneraufnahmen.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.6. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und G eine Gruppe. Dann können wir den Monoidring $K[G]$ betrachten. Sei nun weiter M ein $K[G]$-Modul. Zeige, dass

(1) M nichts anderes ist als ein K-Vektorraum V zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(V)$.
(2) ein $K[G]$-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to M$ eine K-lineare Abbildung ist, für die zusätzlich $\varphi \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \varphi$ für alle $g \in G$ gilt.

Bemerkung: ρ heißt dann eine *Darstellung* von G. Solche Darstellungen sind oft einfacher zu handhaben als G und man kann mit Hilfe von ρ oft hilfreiche Erkenntnisse über G selbst gewinnen.