Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 48

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 48.1. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad ≤ 3 für die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2 - y \cdot \sin x\,,$$

im Nullpunkt $(0,0)$.

Aufgabe 48.2. Notiere das Taylor-Polynom für eine (hinreichend oft differenzierbare) Funktion in 2 oder 3 Variablen für die Grade $k = 1, 2, 3$.

Aufgabe 48.3. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ und seien

$$f, g \colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeige durch ein Beispiel, dass das Taylor-Polynom zum Produkt fg im Punkt P vom Grad ≤ 2 nicht das Produkt der beiden Taylor-Polynome von f und g in P vom Grad ≤ 1 sein muss.

Aufgabe 48.4. a) Schreibe das Polynom

$$f = 3x^3 - 4x^2y + 2xy - x + 5y$$

als Polynom in den Variablen $u = x - 2$ und $v = y + 1$.

b) Bestimme mit Teil a) die Taylor-Polynome von f im Entwicklungspunkt $(2, -1)$.

c) Berechne diese Taylor-Polynome über Ableitungen.

Aufgabe 48.5. Bestätige Satz 48.1 für $f(x,y) = x^a y^b$ in $(0,0)$ und $v = (2,3)$ bis zur dritten Ableitung.

In den folgenden Aufgaben werden einige Eigenschaften der Polynomialkoeffizienten besprochen, die eine Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten sind.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $r = (r_1, \ldots, r_n)$ ein n-Tupel natürlicher Zahlen. Es sei $k := \sum_{j=1}^{n} r_j$. Dann nennt man die Zahl

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r_1! r_2! \cdots r_n!}$$

einen *Polynomialkoeffizienten*.

Aufgabe 48.6. Zeige, dass die Anzahl der (geordneten) Partitionen zum Anzahltupel $r = (r_1, \ldots, r_n)$ einer k-elementigen Menge gleich

$$\frac{k!}{r!} = \frac{k!}{r_1! \cdots r_n!}$$

ist.

Aufgabe 48.7. In einem Studium werden 11 Leistungsnachweise verlangt, und zwar 3 Seminarscheine, 5 Klausuren, 2 mündliche Prüfungen und eine Hausarbeit, die in beliebiger Reihenfolge erbracht werden können. Wieviele Reihenfolgen gibt es, um diese Leistungsnachweise zu erbringen?

Aufgabe 48.8. Es seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $r = (r_1, \ldots, r_n)$ mit $\sum_{j=1}^{n} r_j =: k$. Zeige, dass die Anzahl der k-Tupel

$$(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k,$$

in denen die Zahl i genau r_i-mal vorkommt, gleich

$$\frac{k!}{r!} = \frac{k!}{r_1! \cdots r_n!}$$

ist.

Aufgabe 48.9. Es seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $r = (r_1, \ldots, r_n)$ mit $\sum_{j=1}^{n} r_j =: k$. Zeige, dass die Anzahl der Abbildungen

$$\{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\},$$

bei denen das Urbild zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ aus genau r_i Elementen besteht, gleich

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r_1! \cdots r_n!}$$

ist.

AUFGABE 48.10. Es seien $a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Beweise den *Polynomialsatz*, das ist die Gleichung

$$(a_1 + \ldots + a_n)^k = \sum_{r=(r_1,\ldots,r_n),\, \sum_{i=1}^n r_i = k} \binom{k}{r} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_n^{r_n} .$$

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 48.11. (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad ≤ 3 für die Funktion

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto z \cdot \exp(xy),$$

im Nullpunkt $(0, 0, 0)$.

AUFGABE 48.12. (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad ≤ 4 für die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto \cos(x) \cdot \sin(y),$$

im Punkt $(\pi, \pi/2)$.

AUFGABE 48.13. (5 Punkte)

Es sei f ein Polynom in n Variablen vom Grad $\leq k$. Zeige, dass f mit dem Taylorpolynom vom Grad $\leq k$ von f im Nullpunkt übereinstimmt.

AUFGABE 48.14. (5 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $P \in G$ ein Punkt und

$$f \colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es maximal ein Polynom $p(x_1, \ldots, x_n)$ vom Grad $\leq k$ mit der Eigenschaft geben kann, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{||\, f(x) - p(x)\, ||}{||\, x\, ||^k} = 0$$

gilt.