Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 24

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 24.1. Es sei $K \subset K'$ ($\subseteq \mathbb{R}$) eine reell-quadratische Körpererweiterung. Zeige, dass dann auch $K[i] \subset K'[i]$ eine quadratische Körpererweiterung ist.

Aufgabe 24.2. Ist die Zahl, die den „goldenen Schnitt“ beschreibt, eine konstruierbare Zahl?

Aufgabe 24.3. Betrachte ein DinA4-Blatt. Ist das Seitenverhältnis aus langer und kurzer Seitenlänge eine konstruierbare Zahl?

Aufgabe 24.4. Zeige direkt, ohne Bezug auf Koordinaten, dass die Summe von zwei konstruierbaren komplexen Zahlen wieder konstruierbar ist.

Aufgabe 24.5. Zeige, dass es Matrizen $M \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$ gibt derart, dass das charakteristische Polynom aus $\mathbb{Q}[X]$ ist, dass in M aber auch transzendente Einträge vorkommen.

Aufgabe 24.6. Es sei Φ_n das n-te Kreisteilungspolynom und es sei p eine zu n teilerfremde Primzahl. Es sei K ein Körper der Charakteristik p, in dem es eine n-te primitive Einheitswurzel ζ gebe. Zeige, dass das Produkt

$$\prod_{0<i<n,\ i,n \text{ teilerfremd}} (X - \zeta^i)$$

zu $\mathbb{Z}/(p)[X]$ gehört und mit $\Phi_n \bmod p$ übereinstimmt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.7. (2 Punkte)

Sei $Z \in \mathbb{C}$ eine konstruierbare Zahl und r eine konstruierbare positive reelle Zahl. Zeige, dass dann auch der Kreis mit Mittelpunkt Z und Radius r konstruierbar ist.

Aufgabe 24.8. (3 Punkte)

Es seien P, Q_1, Q_2 drei konstruierbare Punkte derart, dass die Abstände $d(P, Q_1)$ und $d(P, Q_2)$ gleich 1 sind und dass der Winkel zwischen den dadurch definierten Halbgeraden 90 Grad beträgt. Zeige, dass es dann eine affin-lineare Abbildung

$$\varphi : E = \mathbb{R}^2 \longrightarrow E = \mathbb{R}^2$$

gibt, die 0 auf P, 1 auf Q_1 und i auf Q_2 schickt, und die konstruierbare Punkte in konstruierbare Punkte überführt.

Aufgabe 24.9. (2 Punkte)

Betrachte die Tastatur eines Klaviers. Ist das Schwingungsverhältnis von zwei nebeneinander liegendenTasten (bei „gleichstufiger Stimmung“) eine konstruierbare Zahl?

Aufgabe 24.10. (3 Punkte)

Konstruiere mit Hilfe von Zirkel und Lineal eine reelle Zahl x, deren Abweichung von $\sqrt{\pi}$ kleiner als $0,00001$ ist.

Aufgabe 24.11. (2 Punkte)

Zeige, dass die komplexe Zahl $re^{i\varphi}$ genau dann konstruierbar ist, wenn r und $e^{i\varphi}$ konstruierbar sind.

Aufgabe 24.12. (5 Punkte)

Beweise auf zwei verschiedene Arten, dass die komplexe Quadratwurzel einer konstruierbaren komplexen Zahl wieder konstruierbar ist.

In der folgenden Aufgabe soll eine Eigenschaft bewiesen werden, die in der Tabelle über Kreisteilungspolynome modulo p sichtbar wurde.

Aufgabe 24.13. (6 Punkte)

Es sei Φ_n das n-te Kreisteilungspolynom und es sei p eine Primzahl. Zeige, dass das Polynom $(\Phi_n \bmod p) \in \mathbb{Z}/(p)[X]$ das Produkt von irreduziblen Polynomen ist, die alle den gleichen Grad besitzen.

Tipp: Reduziere auf den Fall, wo n und p teilerfremd ist.