Fachbereich Mathematik/Informatik **27. September 2012**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik für Anwender II

Klausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Ich erkläre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	3	3	3	5	4	4	8	6	5	4	8	3	64
erhaltene Pkt.:															

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *stetige Abbildung* zwischen zwei metrischen Räumen M und N.
(2) Eine *polynomiale* Funktion
$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$
(3) Der *Eigenraum* zu $\lambda \in K$ und einer K-linearen Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow V.$$
(4) Ein *Fundamentalsystem* zu einem homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten $v' = Mv$.
(5) Die *Hesse-Matrix* zu einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion
$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^n$.
(6) Ein C^k-*Diffeomorphismus* zwischen zwei offenen Mengen $U_1 \subseteq V_1$ und $U_2 \subseteq V_2$ in zwei euklidischen Vektorräumen V_1 und V_2.
(7) Die *Jacobi-Determinante* zu einer total differenzierbaren Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow V$$
auf einem reellen endlichdimensionalen Vektorraum V in einem Punkt $P \in V$.
(8) Eine *harmonische Funktion*
$$u : G \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einer offenen Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$.

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Die *Abschätzung von Cauchy-Schwarz* (oder *Cauchy-Schwarz Ungleichung*) in einem Vektorraum V mit Skalarprodukt.
(2) Die *Charakterisierung von trigonalisierbaren Abbildungen* mit Hilfe des charakteristischen Polynoms.
(3) Der *Satz von Schwarz*.
(4) Die *Formel für das Volumen eines Rotationskörpers* um die x-Achse zu einer stetigen Funktion
$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Aufgabe 3. (3 Punkte)
Bestimme die Länge der durch

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (\cos t\,, \sin t\,, t),$$

gegebenen *Schraubenlinie* für t zwischen 0 und b, wobei $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Aufgabe 4. (3 Punkte)
Berechne das Wegintegral $\int_\gamma F$ zum Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (y, x),$$

längs des Weges

$$\gamma : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t, e^t).$$

Aufgabe 5. (3 Punkte)
Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 6. (5 Punkte)
Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = (y')^2 + 2y \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Es sei
$$v' = Mv$$
mit
$$M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$$
eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und es sei $u \in \mathbb{K}^n$ ein Eigenvektor zu M zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeige, dass die Abbildung
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ t \longmapsto ce^{\lambda t}u = c\begin{pmatrix} e^{\lambda t}u_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda t}u_n \end{pmatrix},$$
($c \in \mathbb{K}$) eine Lösung dieses Differentialgleichungssystems ist.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto f(x, y) = e^{x-y^2},$$
im Punkt $(1, 1)$.

Aufgabe 9. (8 Punkte)

Wir betrachten die Funktion
$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto 1 - t^2.$$
Für welche $x, y \in [0, 1]$, $x < y$, besitzt die zugehörige dreistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

Aufgabe 10. (6 (2+2+2) Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$\varphi : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\ (a, b, c, d, u, v) \longmapsto (au + bv + c + d, ad - bc, ac - b^2, bd - c^2).$

a) Bestimme die Jacobi-Matrix zu dieser Abbildung.

b) Zeige, dass φ im Nullpunkt nicht regulär ist.

c) Zeige, dass φ in $(1, 1, 0, 0, 1, 1)$ regulär ist.

Aufgabe 11. (5 Punkte)

Bestimme die ersten drei Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y^2 + t + yt^2$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

Aufgabe 12. (4 (2+2) Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ (x, y, z) \longmapsto \left(ye^{xy} + \ln z, \ xe^{xy} - 2yz, \ \frac{x}{z} - y^2 \right).$$

a) Zeige mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung, dass G ein Gradientenfeld ist.

b) Bestimme ein Potential zu G.

Aufgabe 13. (8 (3+5) Punkte)

Auf einer kreisförmigen Platte P mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 0)$ sei durch

$$f(x, y) = x^2y + 1$$

eine Massenverteilung gegeben.

a) Bestimme die Gesamtmasse von P.

b) Bestimme den Schwerpunkt von P.

Aufgabe 14. (3 (1+2) Punkte)

a) Schreibe die komplexe Abbildung

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \ z \longmapsto z^3,$$

in reellen Koordinaten (mit Hilfe der Identifizierung $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i \cong \mathbb{R}^2$).

b) Zeige, dass die beiden Komponentenfunktionen aus Teil a) (also der Realteil und der Imaginärteil von f) harmonische Funktionen sind.

Hilfsmittel

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2\, u\, du \;=\; \frac{1}{4}\pi,$$
$$\int_0^{\pi/2} \sin^4\, u\, du \;=\; \frac{3}{16}\pi,$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6\, u\, du \;=\; \frac{5}{32}\pi.$$