Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 20

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 20.1. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x|x|,$$

differenzierbar ist, aber nicht zweimal differenzierbar.

Aufgabe 20.2. Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, \text{ falls } \lfloor x \rfloor \text{ gerade,} \\ \lfloor x \rfloor - x + 1, \text{ falls } \lfloor x \rfloor \text{ ungerade,} \end{cases}$$

definiert ist. Untersuche f in Hinblick auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Extrema.

Aufgabe 20.3. Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f\colon [-2,5] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1.$$

Aufgabe 20.4. Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f\colon [-4,4] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 6x - 3.$$

Aufgabe 20.5. Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 2.$$

Finde die Punkte $a \in [-3,3]$ derart, dass die Steigung der Funktion in a gleich der Gesamtsteigung zwischen -3 und 3 ist.

Aufgabe 20.6. Zeige, dass eine reelle Polynomfunktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ maximal $d-1$ Extrema besitzt, und die reellen Zahlen sich in maximal d Abschnitte unterteilen lassen, auf denen f streng wachsend oder streng fallend ist.

Aufgabe 20.7. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

mittels Polynomdivision (vergleiche Beispiel 20.11).

Aufgabe 20.8. Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{x^2 + x}$$

im Punkt $a = -1$.

Aufgabe 20.9. An einen geradlinigen Fluss soll ein rechteckiges Areal der Fläche $1000m^2$ angelegt werden, dessen eine Seite der Fluss ist. Für die drei anderen Seiten braucht man einen Zaun. Mit welcher Zaunlänge kann man minimal auskommen?

Aufgabe 20.10. Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \frac{2x - 3}{5x^2 - 3x + 4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 20.11.*

Es sei

$$f(x) = x^3 + x - 1\,.$$

a) Zeige, dass die Funktion f im rellen Intervall $[0, 1]$ genau eine Nullstelle besitzt.

b) Berechne die erste Nachkommastelle im Zehnersystem dieser Nullstelle.

c) Man gebe eine rationale Zahl $q \in [0, 1]$ derart an, dass $|f(q)| \leq \frac{1}{10}$ ist.

Aufgabe 20.12.*

Bestimme den Grenzwert von

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1}$$

im Punkt $x = 1$, und zwar

a) mittels Polynomdivision,

b) mittels der Regel von l'Hospital.

Aufgabe 20.13. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom, $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass P genau dann ein Vielfaches von $(X-a)^n$ ist, wenn a eine Nullstelle sämtlicher Ableitungen $P, P', P'', \ldots, P^{(n-1)}$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 20.14. (5 Punkte)

Aus einem Blatt Papier der Seitenlängen 20 cm und 30 cm soll eine Schachtel (ohne Deckel) mit möglichst großem Volumen gebastelt werden, indem ringsherum ein Rand hochgefaltet wird (die überlappenden Eckränder werden verklebt). Mit welcher Randbreite (=Schachtelhöhe) erreicht man das maximale Volumen?

Aufgabe 20.15. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 20.16. (5 Punkte)

Zeige, dass eine nichtkonstante rationale Funktion der Form

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

(mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a, c \neq 0$), keine lokalen Extrema besitzt.

Aufgabe 20.17. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$$

im Punkt $a = 1$.

Aufgabe 20.18. (5 Punkte)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und

$$F : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine rationale Funktion. Zeige, dass F genau dann ein Polynom ist, wenn es eine höhere Ableitung gibt mit $F^{(n)} = 0$.