Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Arbeitsblatt 63

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 63.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass in X die sogenannte *Hausdorff*-Eigenschaft gilt, d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten x und y gibt es offene Mengen U und V mit

$$x \in U \text{ und } y \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset\,.$$

AUFGABE 63.2. Zeige, dass in einem Hausdorff-Raum X jeder Punkt $x \in X$ abgeschlossen ist.

AUFGABE 63.3. Es sei X ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis. Zeige, dass dann auch jeder Unterraum $Y \subseteq X$ mit der induzierten Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

AUFGABE 63.4. Es sei X ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis. Zeige, dass es zu jeder Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit offenen Mengen U_i eine abzählbare Teilüberdeckung gibt.

AUFGABE 63.5. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeige, dass die Mengen

$$\{T \in \mathcal{A} |\, \mu(T) < \infty\}\,,$$

einen Mengen-Präring, aber im Allgemeinen keine Mengen-Algebra bilden.

AUFGABE 63.6. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass durch

$$\lambda(T) := c\mu(T)$$

ein Maß auf M definiert ist.[1] Diskutiere insbesondere die Teilmengen mit $\mu(T) = \infty$.

AUFGABE 63.7. Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum. Wir nennen ein Maß auf M *explosiv*, wenn es lediglich die Werte 0 und ∞ annimmt.

a) Zeige, dass (für $T \in \mathcal{A}$) durch

$$\gamma(T) = \begin{cases} 0, & \text{falls } T = \emptyset\,, \\ \infty, & \text{falls } T \neq \emptyset\,, \end{cases}$$

[1]Dieses Maß nennt man das mit c *umskalierte Maß*.

ein Maß definiert ist.

b) Es sei μ ein Maß auf $(M, \mathcal{A})$. Zeige, dass durch

$$\lambda(T) = \begin{cases} 0, \text{ falls } \mu(T) = 0\,, \\ \infty, \text{ falls } \mu(T) > 0\,, \end{cases}$$

ebenfalls ein Maß definiert ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 63.8. (4 Punkte)

Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und sei

$$f_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Folge von messbaren Funktionen. Zeige, dass

$$\{x \in M \mid f_n(x) \text{ konvergiert}\}$$

messbar ist.

Aufgabe 63.9. (4 Punkte)

Zeige, dass es eine abzählbare Familie von offenen Bällen im $\mathbb{R}^n$ gibt, die eine Basis der Topologie bilden.

Aufgabe 63.10. (4 Punkte)

Es sei X ein Hausdorff-Raum und es seien $T_1, T_2 \subseteq X$ zwei disjunkte endliche Teilmengen. Zeige, dass es offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq X$ gibt mit $T_1 \subseteq U_1$, $T_2 \subseteq U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Aufgabe 63.11. (4 Punkte)

Zeige, dass es auf jedem endlichdimensionalen reellen Vektorraum ein wohldefiniertes Konzept von *Borel-Mengen* gibt.

Aufgabe 63.12. (7 Punkte)

Zeige, dass die Menge der stetigen wachsenden Funktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$, mit $f(\mathbb{R}_{\leq 0}) = 0$ und $f(\mathbb{R}_{\geq 1}) = 1$ überabzählbar ist.