

Mathematik I

Vorlesung 9

Die eulersche Zahl e

Wir besprechen eine Beschreibung der sogenannten *eulerschen Zahl* e .

LEMMA 9.1. Die Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 1$, mit den Grenzen

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ und } b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

definieren eine Intervallschachtelung.

Beweis. Wegen $1 + \frac{1}{n} > 1$ ist klar, dass

$$a_n < a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = b_n$$

ist, so dass also wirklich Intervalle vorliegen. Um zu zeigen, dass die Intervalle ineinander liegen, zeigen wir, dass die unteren Grenzen wachsend und die oberen Grenzen fallend sind. Wir betrachten zuerst $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Aufgrund Satz 6.7 gilt

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - n \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Dies schreiben wir als

$$\frac{n-1}{n} \leq \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

Daraus ergibt sich durch beidseitige Multiplikation mit $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ (es sei $n \geq 2$) die Abschätzung

$$a_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = a_n.$$

Für die oberen Intervallgrenzen b_n ergibt die Bernoullische Ungleichung die Abschätzung

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n^2-1} \geq 1 + \frac{1}{n}.$$

Daraus folgt

$$1 + \frac{1}{n} \leq \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Durch beidseitige Multiplikation mit $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ ergibt sich

$$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = b_{n-1}.$$

Wir betrachten schließlich die Intervalllänge. Diese ist

$$b_n - a_n = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) - a_n = a_n \frac{1}{n} \leq \frac{b_1}{n}$$

und konvergiert somit gegen 0. Also liegt insgesamt eine Intervallschachtelung vor. \square



Leonhard Euler (1707-1783)

Durch diese Intervallschachtelung ist aufgrund von Satz 8.12 eindeutig eine reelle Zahl bestimmt.

DEFINITION 9.2. Die reelle Zahl

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

heißt *eulersche Zahl*.

Wir werden bei der Behandlung der Exponentialfunktion auf die eulersche Zahl zurückkommen und einer andere Beschreibung dafür kennenlernen. Ihr numerischer Wert ist

$$e = 2,718281828459\dots$$

Die komplexen Zahlen

In dieser Vorlesung führen wir aufbauend auf die reellen Zahlen die komplexen Zahlen ein. Damit haben wir alle für die Anfängervorlesungen relevanten Zahlbereiche zur Verfügung. Die Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen war einigermaßen kompliziert, obwohl die reellen Zahlen scheinbar vertraut sind. Dagegen ist die Einführung der komplexen Zahlen einfach, obwohl sie zunächst nicht vertraut aussehen.

DEFINITION 9.3. Die Menge

$$\mathbb{R}^2$$

mit $0 := (0, 0)$ und $1 := (1, 0)$, mit der komponentenweisen Addition und der durch

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

definierten Multiplikation nennt man *Körper der komplexen Zahlen*. Er wird mit

$$\mathbb{C}$$

bezeichnet.

Die Addition ist also einfach die vektorielle Addition im \mathbb{R}^2 , während die Multiplikation eine neuartige Verknüpfung ist, die zwar numerisch einfach durchführbar ist, an die man sich aber dennoch gewöhnen muss. Wir werden später noch eine geometrische Interpretation für die komplexe Multiplikation kennen lernen.

LEMMA 9.4. *Die komplexen Zahlen bilden einen Körper.*

Beweis. Siehe Aufgabe 9.5. □

Wir lösen uns von der Paarschreibweise und schreiben

$$a + bi = (a, b).$$

Insbesondere ist $i = (0, 1)$, diese Zahl heißt *imaginäre Einheit*. Diese Zahl hat die wichtige Eigenschaft

$$i^2 = -1.$$

Aus dieser Eigenschaft ergeben sich sämtliche algebraischen Eigenschaften der komplexen Zahlen durch die Körpergesetze. So sollte man sich auch die obige Multiplikationsregel merken, es ist ja

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= ac + adi + bic + bidi \\ &= ac + bdi^2 + (ad + bc)i \\ &= ac - bd + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Wir fassen eine reelle Zahl a als die komplexe Zahl $a + 0i = (a, 0)$ auf. Es ist gleichgültig, ob man zwei reelle Zahlen als reelle Zahlen oder als komplexe Zahlen addiert oder multipliziert, siehe Aufgabe 9.4 .

DEFINITION 9.5. Zu einer komplexen Zahl

$$z = a + bi$$

heißt

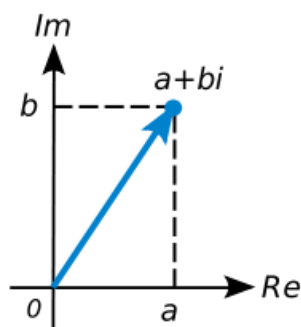
$$\operatorname{Re}(z) = a$$

der *Realteil* von z und

$$\operatorname{Im}(z) = b$$

heißt der *Imaginärteil* von z .

Man sollte sich allerdings die komplexen Zahlen nicht als etwas vorstellen, was weniger real als andere Zahlensysteme sind. Die Konstruktion der komplexen Zahlen aus den reellen Zahlen ist bei Weitem einfacher als die Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen. Allerdings war es historisch ein langer Prozess, bis die komplexen Zahlen als Zahlen anerkannt wurden; das Irreale daran ist, dass sie einen Körper bilden, der nicht angeordnet werden kann, und dass es sich daher scheinbar um keine Größen handelt, mit denen man sinnvollerweise etwas messen kann.



Man kann sich die komplexen Zahlen als die Punkte in einer Ebene vorstellen; für die additive Struktur gilt ja einfach $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. In diesem Zusammenhang spricht man von der *Gauss'schen Zahlenebene*. Die horizontale Achse nennt man dann die *reelle Achse* und die vertikale Achse die *imaginäre Achse*.

LEMMA 9.6. *Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen erfüllen folgende Eigenschaften (für z und w aus \mathbb{C}).*

- (1) $z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i$.
- (2) $\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$.
- (3) $\operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)$.
- (4) Für $r \in \mathbb{R}$ ist

$$\operatorname{Re}(rz) = r \operatorname{Re}(z) \text{ und } \operatorname{Im}(rz) = r \operatorname{Im}(z).$$

- (5) *Es ist $z = \operatorname{Re}(z)$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\operatorname{Im}(z) = 0$ ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 9.7. □

DEFINITION 9.7. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z = a + bi \longmapsto \bar{z} = a - bi$$

heißt *komplexe Konjugation*.

Zu z heißt \bar{z} die *konjugiert-komplexe Zahl* von z . Geometrisch betrachtet ist die komplexe Konjugation zu $z \in \mathbb{C}$ einfach die Achsenspiegelung an der reellen Achse.

LEMMA 9.8. *Für die komplexe Konjugation gelten die folgenden Rechenregeln (für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$).*

- (1) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.
- (2) $\overline{-z} = -\bar{z}$.
- (3) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
- (4) Für $z \neq 0$ ist $\overline{1/z} = 1/\bar{z}$.
- (5) $\overline{\bar{z}} = z$.
- (6) $\bar{z} = z$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 9.13. □

Das Quadrat d^2 einer reellen Zahl ist stets nichtnegativ, und die Summe von zwei nichtnegativen reellen Zahlen ist wieder nichtnegativ. Zu einer nichtnegativen reellen Zahl c gibt es eine eindeutige nichtnegative *Quadratwurzel* \sqrt{c} , siehe Aufgabe 8.7. Daher liefert folgende Definition eine wohldefinierte nichtnegative reelle Zahl.

DEFINITION 9.9. Zu einer komplexen Zahl

$$z = a + bi$$

ist der *Betrag* definiert durch

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Der Betrag einer komplexen Zahl z ist aufgrund des *Satz des Pythagoras* der Abstand von z zum Nullpunkt $0 = (0, 0)$. Insgesamt ist der Betrag eine Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, z \longmapsto |z|.$$

Die Menge aller komplexen Zahlen mit einem bestimmten Betrag bilden einen Kreis mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit dem Betrag als Radius. Insbesondere bilden alle komplexen Zahlen mit dem Betrag 1 den *komplexen Einheitskreis*. Die Zahlen auf dem komplexen Einheitskreis stehen durch die *eulersche Formel* in Beziehung zur komplexen Exponentialfunktion und zu den trigonometrischen Funktionen. Darauf kommen wir in einigen Wochen zurück. Schon jetzt sei aber erwähnt, dass das Produkt von zwei komplexen Zahlen auf dem Einheitskreis sich ergibt, indem man die zugehörigen Winkel, gemessen von der positiven reellen Achse aus gegen den Uhrzeigersinn, addiert.

LEMMA 9.10. Für eine komplexe Zahl z gelten die folgenden Beziehungen.

- (1) $|z| = \sqrt{z \bar{z}}$.
- (2) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$.
- (3) $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
- (4) $\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$.
- (5) Für $z \neq 0$ ist $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Beweis. Siehe Aufgabe 9.8. □

LEMMA 9.11. Für den Betrag von komplexen Zahlen gelten folgende Eigenschaften.

- (1) Für reelles z stimmen reeller und komplexer Betrag überein.
- (2) Es ist $|z|=0$ genau dann, wenn $z=0$ ist.
- (3) $|z|=|\bar{z}|$
- (4) $|zw|=|z||w|$.
- (5) $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \leq |z|$.
- (6) $|z+w| \leq |z|+|w|$.
- (7) Für $z \neq 0$ ist $|1/z|=1/|z|$.

Beweis. Wir zeigen die Dreiecksungleichung, für die anderen Aussagen siehe Aufgabe 9.9. Zunächst gilt nach (5) für jede komplexe Zahl u die Abschätzung $\operatorname{Re}(u) \leq |u|$. Daher ist

$$\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z||w|,$$

und somit ist

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\ &= z\bar{z}+z\bar{w}+w\bar{z}+w\bar{w} \\ &= |z|^2+2\operatorname{Re}(z\bar{w})+|w|^2 \\ &\leq |z|^2+2|z||w|+|w|^2 \\ &= (|z|+|w|)^2. \end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen ergibt sich die gewünschte Gleichung. \square

Quadratwurzeln von komplexen Zahlen

Die imaginäre Einheit i hat die wichtige Eigenschaft $i^2 = -1$. Das Negative von i besitzt die gleiche Eigenschaft, nämlich $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$. Damit gibt es zu jeder negativen reellen Zahl $-c$ (mit c positiv) in \mathbb{C} die beiden Quadratwurzeln \sqrt{ci} und $-\sqrt{ci}$. Im folgenden Beispiel zeigen wir, dass nicht nur jede reelle Zahl in \mathbb{C} eine Quadratwurzel besitzt, sondern überhaupt jede komplexe Zahl.

BEISPIEL 9.12. Es sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Dann hat die komplexe Zahl

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma\sqrt{|z|+a} + i\sqrt{|z|-a})$$

mit dem Vorzeichen

$$\sigma = \begin{cases} 1, & \text{falls } b \geq 0 \\ -1 & \text{falls } b < 0. \end{cases}$$

die Eigenschaft

$$u^2 = z.$$

Insbesondere besitzt also z zwei Quadratwurzeln, nämlich u und $-u$, die bei $z=0$ zusammenfallen.

Wir zeigen dies für den Fall $b > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 u^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{|z|+a} + i\sqrt{|z|-a})\right)^2 \\
 &= \frac{1}{2}(|z|+a - (|z|-a) + 2i(\sqrt{(|z|+a)(|z|-a)})) \\
 &= \frac{1}{2}(2a + 2i\sqrt{|z|^2 - a^2}) \\
 &= \frac{1}{2}(2a + 2i\sqrt{b^2}) \\
 &= \frac{1}{2}(2a + 2ib) \\
 &= a + bi.
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass innerhalb von \mathbb{C} jede *quadratische Gleichung*

$$az^2 + bz + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, mindestens eine komplexe Lösung besitzt, siehe Aufgabe 9.14.

Ein wichtiger Satz, der sogenannte *Fundamentalsatz der Algebra* besagt, dass überhaupt jede polynomiale Gleichung

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

mit $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und mit $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ mindestens eine Lösung in \mathbb{C} besitzt. D.h., dass jedes nichtkonstante Polynom über den komplexen Zahlen eine Nullstelle besitzt. Diesen Satz können wir zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht beweisen.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Leonhard Euler by Handmann .png, Autor = Emanuel Handmann (= Benutzer QWerk auf Commons), Lizenz = PD	2
Quelle = Complex number illustration.svg, Autor = Benutzer Wolfkeeper auf en. Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0	4