Vorlesung 28

Projektive Varietäten

Definition 1. Eine *projektive Varietät* ist eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge

$$V_+(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{P}^n_K ,$$

wobei $\mathfrak{a}$ ein homogenes Ideal in $K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ ist.

Eine projektive Varietät Y ist also die Nullstellenmenge im projektiven Raum einer (endlichen) Menge von homogenenen Polynomen.

Über die induzierte Topologie ist eine projektive Varietät wieder mit einer Zariski-Topologie versehen. Die offenen Mengen haben wieder die Form $D_+(\mathfrak{b})$ zu einem homogenen Ideal aus $K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ bzw. aus dem Restklassenring $K[X_0, X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$, den man auch den *homogenen Koordinatenring* zu $V(\mathfrak{a})$ nennt. Insbesondere definiert jedes homogene Element $F \in K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ eine offene Menge $D_+(F) \subseteq Y$.

Lemma 2. *Sei $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$ eine projektive Varietät. Dann liefern die affinen Räume $D_+(X_i) \cong \mathbb{A}^n_K \subset \mathbb{P}^n_K$ affine Varietäten*

$$D_+(X_i) \cap Y ,$$

die Y überdecken. Insbesondere gibt es zu jedem Punkt $P \in Y$ und jeder offenen Umgebung $P \in U$ affine offene Umgebungen von P innerhalb von U.

Beweis. Es ist

$$D_+(X_i) = D_+(X_i) \cap Y \cong \mathbb{A}^n_K \cap Y ,$$

wobei links die zugehörige offene Menge in Y steht und rechts die entsprechende offene Teilmenge des projektiven Raumes. Daher ist $D_+(X_i) \cap Y$ eine abgeschlossene (siehe Aufgabe 28.3) Teilmenge des affinen Raumes $D_+(X_i) \cong \mathbb{A}^n_K$ und als solche selbst eine affine Varietät. Da die $D_+(X_i)$, $i = 0, \ldots, n$, den projektiven Raum überdecken, gilt dies auch für die Durchschnitte mit Y. $\square$

Diese Aussage hat die unmittelbare Konsequenz, dass sich „lokale Konzepte“, die wir für affine Varietäten entwickelt haben, sofort auf projektive Varietäten übertragen. Für Eigenschaften, die für oder in einem Punkt gelten sollen, kann man sich sofort auf eine offene affine Umgebung des Punktes zurückziehen. Dies gilt bspw. für Konzepte wie Glattheit, Normalität oder den Begriff der regulären Funktion.

Algebraische Funktionen und Morphismen

Mit dem zuletzt bewiesenen Resultat können wir auf einer projektiven Varietät wieder definieren, was eine reguläre oder algebraische Funktion sein soll.

Definition 3. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, $Y \subseteq \mathbb{P}^n_K$ eine projektive Varietät, $U \subseteq Y$ eine offene Teilmenge und $P \in U$ ein Punkt. Dann heißt eine Funktion $f : U \to \mathbb{A}^1_K = K$ *algebraisch* (oder *regulär* oder *polynomial*) im Punkt P, wenn es eine offene affine Umgebung $P \in V \subseteq U$ gibt, derart, dass auf V die eingeschränkte Funktion f algebraisch im Punkt P ist. f heißt *algebraisch* auf U, wenn f in jedem Punkt aus U algebraisch ist.

Zu einer offenen Menge U bildet die Menge der auf U definierten regulären Funktionen wieder eine kommutative K-Algebra, die wieder mit $\Gamma(U, \mathcal{O})$ bezeichnet wird. Von nun an verstehen wir unter einer projektiven Varietät ein projektives Nullstellengebilde zusammen mit der induzierten Zariski-Topologie und versehen mit der *Strukturgarbe* $\mathcal{O}$ der regulären Funktionen. Diese Konzepte übertragen sich sofort auf offene Teilmengen, was zum Begriff der quasiprojektiven Varietät führt.

Definition 4. Eine offene Teilmenge einer projektiven Varietät zusammen mit der induzierten Zariski-Topologie und versehen mit der Strukturgarbe der regulären Funktionen nennt man eine *quasiprojektive Varietät.*

Insbesondere ist eine projektive Varietät aber auch eine affine Varietät quasiprojektiv. Letzteres folgt daraus, dass man eine affine Varietät $Y \subseteq \mathbb{A}^K_n$ fortsetzen kann zu einer projektiven Varietät $\tilde{Y} \subseteq \mathbb{P}^K_n$, in der Y eine offene Teilmenge ist. Auch die Definition von Morphismus lässt sich wortgleich auf die allgemeinere Situation übertragen.

Definition 5. Seien X und Y zwei quasiprojektive Varietäten und sei

$$\psi : Y \longrightarrow X$$

eine stetige Abbildung. Dann nennt man ψ einen *Morphismus* (von quasiprojektiven Varietäten), wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ und jede algebraische Funktion $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ gilt, dass die zusammengesetzte Funktion

$$f \circ \psi : \psi^{-1}(U) \longrightarrow U \xrightarrow{f} \mathbb{A}^1_K$$

zu $\Gamma(\psi^{-1}(U), \mathcal{O})$ gehört.

Homogenisierung und projektiver Abschluss

Betrachten wir die Hyperbel $V(XY - 1) \subset \mathbb{A}^2_K \subset \mathbb{P}^2_K$. Die Hyperbel ist abgeschlossen in der affinen Ebene, aber nicht in der projektiven Ebene. Dies sieht man, wenn man die affine Ebene als $V(Z - 1)$ in den dreidimensionalen

Raum einbettet und die durch die Punkte auf der Hyperbel definierten Geraden durch den Nullpunkt betrachtet. Diese Geraden neigen sich zunehmend stärker, und scheinen gegen die x-Achse und gegen die y-Achse zu konvergieren. Dies ist in der Tat, was auch die algebraische Berechnung ergibt.

Definition 6. Zu einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ heißt das Ideal in $K[X_1, \ldots, X_n, Z]$, das von allen Homogenisierungen von Elementen aus $\mathfrak{a}$ erzeugt wird, die *Homogenisierung* $\mathfrak{a}^h$ des Ideals $\mathfrak{a}$.

Man beachte, dass es hier im Allgemeinen nicht ausreicht, nur die Homogenisierungen aus einem Ideal-Erzeugendensystem aus $\mathfrak{a}$ zu betrachten.

Definition 7. Zu einer affinen Varietät $V(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{A}_K^n \subset \mathbb{P}_K^n$ heißt der Zariski-Abschluss von $V(\mathfrak{a})$ in $\mathbb{P}_K^n$ der *projektive Abschluss* von $V(\mathfrak{a})$.

Satz 8. *(Projektiver Abschluss) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $V = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine affine Varietät. Dann wird der projektive Abschluss durch $V_+(\mathfrak{b})$ beschrieben, wobei $\mathfrak{b}$ die Homogenisierung von $\mathfrak{a}$ in $K[X_1, \ldots, X_n, Z]$ bezeichnet.*

Beweis. Ein Punkt $P = (x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathbb{A}_K^n$ definiert den Punkt $\tilde{P} = (x_1, \ldots, x_n, 1)$ in $\mathbb{P}_K^n$. Für ein Polynom $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ und P gilt $F(P) = \tilde{F}(\tilde{P})$ für die Homogenisierung $\tilde{F}$. Daher gilt insbesondere $\tilde{F}(\tilde{P}) = 0$ für alle Punkte $P \in V(\mathfrak{a})$ und alle homogenen Polynome aus dem homogenisierten Ideal $\mathfrak{b}$. Es ist also $V(\mathfrak{a}) \subseteq V_+(\mathfrak{b})$. Damit liegt insgesamt das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V(\mathfrak{a}) & \longrightarrow & V_+(\mathfrak{b}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}_K^n & \longrightarrow & \mathbb{P}_K^n \end{array}$$

vor (wobei alle Abbildungen injektiv sind). Der projektive Abschluss von $V(\mathfrak{a})$ wird von einer Menge $V_+(\mathfrak{c})$ mit einem homogenen Ideal $\mathfrak{c}$ und mit $V(\mathfrak{a}) \subseteq V_+(\mathfrak{c})$ und $V_+(\mathfrak{c}) \subseteq V_+(\mathfrak{b})$ beschrieben.

Wir haben die Inklusion $V_+(\mathfrak{b}) \subseteq V_+(\mathfrak{c})$ zu zeigen, was aus $\mathfrak{c} \subseteq \operatorname{rad}(\mathfrak{b})$ folgt. Da beides homogene Ideale sind, kann man sich auf $F \in \mathfrak{c}$ homogen beschränken. Wir schreiben $F = X_0^r G$, so dass G kein Vielfaches von X_0 ist. Da F auf $V(\mathfrak{a})$ verschwindet und da X_0 beschränkt auf $V(\mathfrak{a})$ konstant gleich eins ist, folgt, dass G auf $V(\mathfrak{a})$ verschwindet. Wir können also annehmen, dass F kein Vielfaches von X_0 ist. Dann ist die Dehomgenisierung $\bar{F} = F(X_1, \ldots, X_n, 1)$ die Nullfunktion auf $V(\mathfrak{a})$ und besitzt den gleichen Grad wie F. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gehört eine Potenz $\bar{F}^r$ von $\bar{F}$ zu $\mathfrak{a}$. Dann gehört aber auch F^r, das sich aus $\bar{F}^r$ durch Homogenisieren ergibt, zur Homogenisierung von $\mathfrak{a}$, also zu $\mathfrak{b}$. $\square$

Projektive ebene Kurven

Definition 9. Eine *projektive ebene Kurve* ist die Nullstellenmenge $C = V_+(F) \subset \mathbb{P}^2_K$ zu einem homogenen nicht-konstanten Polynom $F \in K[X, Y, Z]$.

Zu einer ebenen affinen Kurve $V(F) \subset \mathbb{A}^2_K$ liegt insgesamt die Situation

$$V = V(F) \subset \mathbb{A}^2_K \subset \mathbb{P}^2_K$$

vor. Den (topologischen) Abschluss von V in $\mathbb{P}^2_K$ nennt man den *projektiven Abschluss* der Kurve.

Lemma 10. *Zu einer ebenen affinen Kurve* $V = V(G) \subseteq \mathbb{A}^2_K \subseteq \mathbb{P}^2_K$, $G \in K[X, Y]$, *wird der Zariski-Abschluss von* V *in* $\mathbb{P}^2_K$ *durch* $C = V_+(H)$ *beschrieben, wobei* H *die Homogenisierung von* G *in* $K[X, Y, Z]$ *bezeichnet.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 28.8, da die Homogenisierung eines Hauptideals das durch die Homogenisierung erzeugte Hauptideal ist. □

Bemerkung 11. Sei $G \in K[X, Y]$ mit der Homogenisierung $F \in K[X, Y, Z]$. Man gewinnt G aus F zurück, indem man Z durch 1 ersetzt. G beschreibt dann den Durchschnitt $D_+(Z) \cap V_+(F)$. Die beiden anderen affinen Ausschnitte, also

$$D_+(X) \cap V_+(F) \text{ und } D_+(Y) \cap V_+(F)\,,$$

sind gleichberechtigt und liefern insbesondere affine Umgebungen für die Punkte von $C = V_+(F)$, die nicht in $D_+(Z)$ liegen.

Um bspw. die Glattheit in einem Punkt $P \in C$ nachzuweisen wählt man sich eine offene affine Umgebung (am besten eine der $D_+(L) \cap C, L = X, Y, Z$) und überprüft dort mit dem Ableitungskriterium und der affinen Gleichung die Glattheit in diesem Punkt. Dabei hängt das Ergebnis für den Punkt nicht davon ab, mit welcher affinen Umgebung man arbeitet (es kann aber manchmal die eine Umgebung rechnerisch geschickter sein als eine andere).

Von der affinen Kurve $V(G)$ aus gesehen sind die Punkte im Unendlichen die Punkte aus $V_+(F) \cap V_+(Z)$. Das ist der Schnitt der projektiven Kurve mit einer projektiven Geraden. Dies ist eine endliche Menge, es sei denn die projektive Gerade ist eine Komponente der Kurve, was aber nicht sein kann, wenn man mit einer affinen Kurve startet (da Z kein Teiler der Homogenisierung ist). Zur Berechnung der unendlich fernen Punkte betrachtet man die homogene Zerlegung

$$G = G_d + \ldots + G_m \text{ mit } m \leq d$$

und die Homogenisierung

$$F = G_d + G_{d-1}Z + \ldots + G_m Z^{d-m}\,.$$

Zur Berechnung des Durchschnittes mit $V_+(Z)$ muss man $Z = 0$ setzen, so dass man die Nullstellen des homogenen Polynoms $G_d(X, Y)$ (in zwei Variablen) berechnen muss. Der Grad d gibt also sofort eine Schranke, wie viele unendlich fernen Punkte es maximal auf der Kurve geben kann.

Beispiel 12. Wir betrachten den Standardkegel $V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subset \mathbb{A}^3_K$. Da dies durch eine homogene Gleichung gegeben ist, kann man diesen Kegel auch sofort als eine ebene projektive Kurve (vom Grad zwei) auffassen. Die Schnitte des Kegels mit einer beliebigen Ebene $E \subset \mathbb{A}^3_K$ nennt man Kegelschnitte. Diese bekommen nun eine neue Interpretation. Eine Ebene E, auf der nicht der Nullpunkt liegt kann man in natürlicher Weise identifizieren mit einer offenen affinen Ebene $D_+(L) \subseteq \mathbb{P}^2_K$ (wobei L eine homogene Linearform ist). Die Schnitte mit dem Kegel sind dann verschiedene affine Ausschnitte aus der ebenen projektiven Kurve $V_+(X^2 + Y^2 - Z^2)$. Insbesondere sind also Kreis, Hyperbel und Parabel solche affinen Ausschnitte.

Die Schnitte mit einer Ebenen durch den Nullpunkt sind hingegen projektiv verstanden die endlichen Teilmengen $V_+(X^2 + Y^2 - Z^2) \cap V(L)$.

Definition 13. Sei K ein Körper und $d \geq 1$. Dann heißt die projektive Kurve

$$V(X^d + Y^d + Z^d) \subset \mathbb{P}^2_K$$

die *Fermat-Kurve* vom Grad d.

Für $d = 1$ handelt es sich einfach um eine projektive Gerade.

Lemma 14. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p \geq 0$ und sei $C = V_+(X^d + Y^d + Z^d) \subset \mathbb{P}^2_K$ die Fermat-Kurve vom Grad d. Die Charakteristik sei kein Teiler von d. Dann ist C eine glatte Kurve.*

Beweis. Da Glattheit eine lokale Eigenschaft ist, können wir mit einem beliebigen affinen Ausschnitt argumentieren. Da die Situation symmetrisch ist, können wir uns auf das affine Teilstück

$$V(X^d + Y^d + 1) \subset \mathbb{A}^2_K$$

beschränken. Die partiellen Ableitungen sind dX^{d-1} und dY^{d-1} . Aufgrund der Voraussetzung über die Charakteristik ist $d \neq 0$, so dass beide Ableitungen nur bei $x = y = 0$ verschwinden. Dieser Punkt gehört aber nicht zur Kurve. □

Bemerkung 15. Wählt man die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Grundkörper, so kann man eine glatte projektive Kurve auch als eine reell zweidimensionale kompakte orientierte Mannigfaltigkeit auffassen. Diese lassen sich topologisch einfach klassifizieren, und zwar ist eine solche Mannigfaltigkeit homöomorph zu einer Kugeloberfläche, an die g Henkel angeklebt werden. Diese Zahl nennt man das *Geschlecht* der reellen Fläche und damit auch der Kurve. Die komplex-projektive Gerade ist eine zweidimensionale Sphäre und hat keinen Henkel, ihr Geschlecht ist also null. Eine Fläche vom Geschlecht eins ist ein Torus (Autoreifen), der homöomorph zu $S^1 \times S^1$ ist. Projektive Kurven, die als topologische Mannigfaltigkeit das Geschlecht eins besitzen, nennt man *elliptische Kurven.*

Es gibt auch algebraische Definitionen für das Geschlecht, so dass diese Invariante für glatte projektive Kurven über jedem algebraisch abgeschlossenen Körper definiert ist. Und zwar ist das Geschlecht gleich der K-Dimension der *ersten Kohomologiegruppe der Strukturgarbe* und auch gleich der K-Dimension der *globalen Differentialformen* auf der Kurve. Zu jedem g gibt es projektive Kurven mit Geschlecht g. Insbesondere kann man jede orientierbare reell zweidimensionale kompakte Fläche als komplex-projektive Kurve realisieren. Man spricht dann auch von *Riemannschen Flächen*.

Für eine glatte ebene Kurve $C = V_+(F) \subset \mathbb{P}^2_K$ vom Grad $d = \deg(F)$ gibt es eine einfache Formel für das Geschlecht: es ist nämlich

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} \, .$$

Damit haben glatte projektive Kurven vom Grad eins und zwei (Geraden und Quadriken) das Geschlecht null, es handelt sich in der Tat um projektive Geraden. Für $d = 3$ erhält man das Geschlecht 1, also elliptische Kurven. Für $d = 4$ erhält man schon $g = 3$. Dies zeigt auch, dass sich nicht jedes Geschlecht als Geschlecht einer ebenen glatten Kurve realisieren lässt. Es ist bspw. gar nicht so einfach, explizit Gleichungen für eine Kurve vom Geschlecht 2 anzugeben.