Dr. A. Kaid **Osnabrück SS 2010**

Wiederholertutorium Mathematik I

Aufgabenblatt 1

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1.1. Betrachte die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto |n-2|$.

(1) Ist f injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?
(2) Sei $A := \{1, 2, 3\}$. Berechne $f(A)$ und $f^{-1}(A)$.
(3) Berechne $f(f^{-1}(A))$ und $f^{-1}(f(A))$.
(4) Führe die Rechnungen aus 1. und 2. für die Menge $B := \{2, 3, 4\}$ aus. Was fällt auf?

Aufgabe 1.2. Seien $f : L \to M$ und $g : M \to N$ Abbildungen. Zeige die folgenden beiden Aussagen:

(1) Wenn f surjektiv ist und die Komposition $g \circ f$ injektiv, dann ist g injektiv.
(2) Wenn die Komposition $g \circ f$ surjektiv ist und g injektiv, dann ist f surjektiv.

Aufgabe 1.3. Es sei M eine Menge und $(R_i)_{i \in I}$ eine Familie von Äquivalenzrelationen auf M. Zeige, dass durch den Durchschnitt $R := \bigcap_{i \in I} R_i$ wieder eine Äquivalenzrelation auf M definiert ist. Gilt dies auch für $\bigcup_{i \in I} R_i$?

Aufgabe 1.4. Betrachte die Menge $M = \{1, 2\}$.

(1) Bestimme alle Relationen auf M.
(2) Welche dieser Relationen sind symmetrisch, reflexiv, transitiv?
(3) Bei welchen Relationen handelt es sich um Äquivalenzrelationen?

Aufgabe 1.5. Es sei M eine Menge und $P \subseteq \mathfrak{P}(M)$. Dann heißt P eine *Partition* von M, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für alle $A \in P$ gilt $A \neq \emptyset$.
(2) Für $A, B \in P$, $A \neq B$, gilt $A \cap B = \emptyset$.
(3) Die Elemente von P bilden eine Überdeckung von M, d.h. jedes Element von M liegt in mindestens einem Element von P.

Beweisen Sie (nochmal), dass die Quotientenmenge $M/\sim = \{[x] : x \in M\}$ zu einer Äquivalenzrelation $\sim$ eine Partition der Menge M ist.

Aufgabe 1.6. Sei M eine Menge und $P \subseteq \mathfrak{P}(M)$ eine Partition. Zeige, dass P durch

$$x \sim y, \text{ falls es ein } A \in P \text{ gibt mit } x \in A \text{ und } y \in A\,,$$

eine Äquivalenzrelation auf M induziert. Berechne diese Relation für die Partition $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6\}, \{7\}\}$ der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Aufgabe 1.7. Rechne nach, dass die folgende Relation eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist:

$$x \sim y, \text{ falls 5 teilt } x - y\,.$$

Bestimme die Äquivalenzklassen dieser Relation.

Hausaufgaben

(Korrektur nur für Leute ohne Klausurberechtigung)

Aufgabe 1.8. (4 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z},\ n \longmapsto \begin{cases} -\frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{n+1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade}\,. \end{cases}$$

Ist f injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

Aufgabe 1.9. (4 Punkte)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und betrachte die Menge

$$C^1(I, \mathbb{R}) := \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ ist differenzierbar }\}\,.$$

Für $f, g \in C^1(I, \mathbb{R})$ definieren wir

$$f \sim g, \text{ falls es ein } c \in \mathbb{R} \text{ gibt mit } f(x) = g(x) + c \text{ für alle } x \in I\,.$$

Liegt eine Äquivalenzrelation vor? Wenn ja, beschreibe die Äquivalenzklassen.