Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Vorlesung 11

Lineare Unabhängigkeit

Definition 11.1. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt eine Familie von Vektoren v_i, $i \in I$, *linear unabhängig*, wenn eine Gleichung[1]

$$\sum_{i \in I} a_i v_i = 0 \text{ mit } a_i \in K \text{ und } a_i = 0 \text{ für fast alle } i$$

nur bei $a_i = 0$ für alle i möglich ist.

Wenn eine Familie nicht linear unabhängig ist, so nennt man sie *linear abhängig*. In der Definition sind unendliche Indexmengen erlaubt. Man kann sich aber ohne Verständnisverlust zunächst auf endliche Indexmengen beschränken, dann lautet die Bedingung einfach, dass eine Gleichung

$$\sum_{i \in I} a_i v_i = 0$$

nur dann möglich ist, wenn alle $a_i = 0$ sind. Man nennt übrigens eine Linearkombination $\sum_{i \in I} a_i v_i = 0$ eine *Darstellung der Null*. Sie heißt die *triviale Darstellung*, wenn alle Koeffizienten a_i null sind, andernfalls, wenn also mindestens ein Koeffizient nicht null ist, spricht man von einer *nichttrivialen Darstellung der Null*. Eine Familie von Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn man mit ihnen nur auf die triviale Art die Null darstellen kann. Dies ist auch äquivalent dazu, dass man keinen Vektor aus der Familie als Linearkombination der anderen ausdrücken kann.

Lemma 11.2. *Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V. Dann gelten folgende Aussagen.*

1. *Wenn die Familie linear unabhängig ist, so ist auch zu jeder Teilmenge $J \subseteq I$ die Familie v_i , $i \in J$, linear unabhängig.*
2. *Die leere Familie ist linear unabhängig.*
3. *Wenn die Familie den Nullvektor enthält, so ist sie nicht linear unabhängig.*
4. *Wenn in der Familie ein Vektor mehrfach vorkommt, so ist sie nicht linear unabhängig.*

[1] Die Vokabel *fast alle* bedeutet alle bis auf endlich viele Ausnahmen. Eine Linearkombination ergibt nur dann einen Sinn, wenn nur endlich viele Summanden vorkommen. Dies kann man bei einer unendlichen Indexmenge dadurch umgehen, dass man fordert, dass nur endlich viele Indizes ungleich null sein dürfen, und alle anderen Koeffizienten null sein müssen. Wenn die Indexmenge endlich ist, so kann man diese zusätzliche Bedingung ignorieren.

(5) *Ein Vektor v ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$ ist.*
(6) *Zwei Vektoren v und u sind genau dann linear unabhängig, wenn weder u ein skalares Vielfaches von v ist noch umgekehrt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 11.4. □

Basis

DEFINITION 11.3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt ein linear unabhängiges Erzeugendensystem $v_i \in V$, $i \in I$, eine *Basis* von V.

DEFINITION 11.4. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann nennt man zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ den Vektor

$$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in K^n ,$$

wobei 1 an der i-ten Stelle steht, den i-ten *Standardvektor*. Die n Vektoren

$$e_1, e_2, \ldots, e_n$$

nennt man die *Standardbasis* des K^n.

Eine Standardbasis ist wirklich eine Basis, siehe Aufgabe 11.6. In einem beliebigen Vektorraum gibt es keine Standardbasis!

SATZ 11.5. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n \in V$ eine Familie von Vektoren. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Die Familie ist eine Basis von V.*
(2) *Die Familie ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. sobald man einen Vektor v_i weglässt, liegt kein Erzeugendensystem mehr vor.*
(3) *Für jeden Vektor $u \in V$ gibt es genau eine Darstellung*

$$u = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n .$$

(4) *Die Familie ist maximal linear unabhängig, d.h. sobald man irgendeinen Vektor dazunimmt, ist die Familie nicht mehr linear unabhängig.*

Beweis. Wir führen einen Ringschluss durch. (1) $\Rightarrow$ (2). Die Familie ist ein Erzeugendensystem. Nehmen wir einen Vektor, sagen wir v_1, aus der Familie heraus. Wir müssen zeigen, dass dann die verbleibende Familie, also $v_2, \ldots, v_n$ kein Erzeugendensystem mehr ist. Wenn sie ein Erzeugendensystem wäre, so wäre insbesondere v_1 als Linearkombination der Vektoren darstellbar, d.h. man hätte

$$v_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i .$$

Dann ist aber

$$v_1 - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i$$

eine nichttriviale Darstellung der 0, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Familie. (2) $\Rightarrow$ (3). Nach Voraussetzung ist die Familie ein Erzeugendensystem, so dass sich jeder Vektor als Linearkombination darstellen lässt. Angenommen, es gibt für ein $u \in V$ eine mehrfache Darstellung, d.h.

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i,$$

wobei mindestens ein Koeffizient verschieden sei. Ohne Einschränkung sei $\lambda_1 \neq \mu_1$. Dann erhält man die Beziehung

$$(\lambda_1 - \mu_1) v_1 = \sum_{i=2}^{n} (\mu_i - \lambda_i) v_i \, .$$

Wegen $\lambda_1 - \mu_1 \neq 0$ kann man durch diese Zahl dividieren und erhält eine Darstellung von v_1 durch die anderen Vektoren, d.h. nach Aufgabe 11.1 ist auch die Familie ohne v_1 ein Erzeugendensystem von V, im Widerspruch zur Minimalität. (3) $\Rightarrow$ (4). Wegen der eindeutigen Darstellbarkeit besitzt insbesondere der Nullvektor nur die triviale Darstellung, d.h. die Vektoren sind linear unabhängig. Nimmt man einen Vektor u hinzu, so besitzt dieser eine Darstellung

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

und daher ist

$$0 = u - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

eine nichttriviale Darstellung der 0, so dass die verlängerte Familie $u, v_1, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig ist. (4) $\Rightarrow$ (1). Die Familie ist linear unabhängig, wir müssen zeigen, dass sie auch ein Erzeugendensystem bildet. Sei dazu $u \in V$. Nach Voraussetzung ist die Familie $u, v_1, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig, d.h. es gibt eine nichttriviale Darstellung

$$0 = \lambda u + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \, .$$

Dabei ist $\lambda \neq 0$, da andernfalls dies eine nichttriviale Darstellung der 0 allein mit den linear unabhängigen Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ wäre. Daher können wir

$$u = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} v_i$$

schreiben, so dass eine Darstellung von u möglich ist. □

SATZ 11.6. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann besitzt V eine endliche Basis.*

Beweis. Es sei v_i, $i \in I$, ein Erzeugendensystem von V mit einer endlichen Indexmenge I. Wir wollen mit der Charakterisierung aus Satz 11.5 (ii) argumentieren. Falls die Familie schon minimal ist, so liegt eine Basis vor. Andernfalls gibt es ein $k \in I$ derart, dass die um v_k reduzierte Familie, also

v_i, $i \in I \setminus \{k\}$, ebenfalls ein Erzeugendensystem ist. In diesem Fall kann man mit der kleineren Indexmenge weiterargumentieren. Mit diesem Verfahren gelangt man letztlich zu einer Teilmenge $J \subseteq I$ derart, dass v_i, $i \in J$, ein minimales Erzeugendensystem, also eine Basis ist. □

Es gilt allgemeiner, dass nicht nur die endlich erzeugten, sondern überhaupt jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Der Beweis dazu benutzt aber andere Methoden und ist nicht konstruktiv. Z.B. ist es nicht möglich, eine $\mathbb{Q}$-Basis für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (vgl. Beispiel 10.6) explizit anzugeben.

Dimensionstheorie

Ein endlich erzeugter Vektorraum hat im Allgemeinen ganz unterschiedliche Basen. Allerdings ist die Anzahl der Elemente in einer Basis stets konstant und hängt nur vom Vektorraum ab. Diese wichtige Eigenschaft werden wir jetzt beweisen und als Ausgangspunkt für die Definition der Dimension eines Vektorraums nehmen.

Lemma 11.7. *(Austauschlemma) Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$. Es sei $w \in V$ ein Vektor mit einer Darstellung*

$$w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \, ,$$

wobei $a_k \neq 0$ sei für ein bestimmtes k. Dann ist auch die Familie

$$v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_n$$

eine Basis von V.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die neue Familie ein Erzeugendensystem ist. Zunächst kann man wegen

$$w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

und $a_k \neq 0$ den Vektor v_k schreiben als

$$v_k = \frac{1}{a_k} w - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{a_k} v_i - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{a_i}{a_k} v_i$$

Sei nun $u \in V$ beliebig vorgegeben. Dann kann man schreiben

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_i + \lambda_k v_k + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_i + \lambda_k \Big(\frac{1}{a_k} w - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{a_k} v_i - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{a_i}{a_k} v_i\Big) + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1}(\lambda_i - \lambda_k \frac{a_i}{a_k})v_i + \frac{\lambda_k}{a_k}w + \sum_{i=k+1}^{n}(\lambda_i - \lambda_k \frac{a_i}{a_k})v_i.$$

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit nehmen wir zwecks Notationsvereinfachung $k = 1$ an. Es sei

$$c_1 w + \sum_{i=2}^{n} c_i v_i = 0$$

eine Darstellung der Null. Dann ist

$$0 = c_1 w + \sum_{i=2}^{n} c_i v_i = c_1(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) + \sum_{i=2}^{n} c_i v_i = c_1 a_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n}(c_1 a_i + c_i)v_i.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der Ausgangsfamilie folgt insbesondere $c_1 a_1 = 0$, und wegen $a_1 \neq 0$ ergibt sich $c_1 = 0$. Deshalb ist $\sum_{i=2}^{n} c_i v_i = 0$ ist und daher $c_i = 0$ gilt für alle i. □

Satz 11.8. *(Austauschsatz) Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer Basis*

$$b_1, \ldots, b_n .$$

Ferner sei

$$u_1, \ldots, u_k$$

eine Familie von linear unabhängigen Vektoren in V. Dann gibt es eine Teilmenge $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\} = I$ derart, dass die Familie

$$u_1, \ldots, u_k, b_i, i \in I \setminus J ,$$

eine Basis von V ist. Insbesondere ist $k \leq n$.

Beweis. Wir führen Induktion über k, also über die Anzahl der Vektoren in der Familie. Bei $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei die Aussage für k schon bewiesen und seien $k + 1$ linear unabhängige Vektoren

$$u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}$$

gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung, angewandt auf die (ebenfalls linear unabhängigen) Vektoren

$$u_1, \ldots, u_k$$

gibt es eine Teilmenge $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ derart, dass die Familie

$$u_1, \ldots, u_k, b_i, i \in I \setminus J ,$$

eine Basis von V ist. Wir wollen auf diese Basis Lemma 11.7 anwenden. Da eine Basis vorliegt, kann man

$$u_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} c_j u_j + \sum_{i \in I \setminus J} d_i b_i$$

schreiben. Wären hierbei alle Koeffizienten $d_i = 0$, so ergäbe sich sofort ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der u_j, $j = 1, \ldots, k + 1$. Es gibt also ein $i \in I \setminus J$ mit $d_i \neq 0$. Wir setzen $i_{k+1} := i$. Damit ist $J' =$

$\{i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}\}$ eine $(k+1)$-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$. Nach dem Austauschlemma kann man den Basisvektor $b_{i_{k+1}}$ durch u_{k+1} ersetzen und erhält die neue Basis

$$u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, b_i, i \in I \setminus J' .$$

Der Zusatz folgt sofort, da eine k-elementige Teilmenge einer n-elementigen Menge vorliegt. □

Satz 11.9. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann besitzen je zwei Basen von V die gleiche Anzahl von Basisvektoren.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{b} = b_1, \ldots, b_n$ und $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_k$ zwei Basen von V. Aufgrund von Satz 11.8, angewandt auf die Basis $\mathfrak{b}$ und die linear unabhängige Familie $\mathfrak{u}$ ergibt sich $k \leq n$. Wendet man den Austauschsatz umgekehrt an, so folgt $n \leq k$, also insgesamt $n = k$. □

Dieser Satz erlaubt die folgende Definition.

Definition 11.10. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann nennt man die Anzahl der Vektoren in einer Basis von V die *Dimension* von V, geschrieben

$$\dim(V) .$$

Wenn ein Vektorraum nicht endlich erzeugt ist, so setzt man $\dim(V) = \infty$. Der Nullraum 0 hat die Dimension 0. Einen eindimensionalen Vektorraum nennt man auch eine *Gerade*, einen zweidimensionalen Vektorraum eine *Ebene*, einen dreidimensionalen Vektorraum einen *Raum*, wobei man andererseits auch jeden Vektorraum einen Raum nennt.

Korollar 11.11. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt der Standardraum K^n die Dimension n.*

Beweis. Die Standardbasis e_i, $i = 1, \ldots, n$, besteht aus n Vektoren, also ist die Dimension n. □

Korollar 11.12. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann ist U ebenfalls endlichdimensional und es gilt*

$$\dim(U) \leq \dim(V) .$$

Beweis. Jede linear unabhängige Famile in U ist auch linear unabhängig in V. Daher kann es aufgrund des Basisaustauschsatzes in U nur linear unabhängige Familien der Länge $\leq n$ geben. Es sei $k \leq n$ derart, dass es in U eine linear unabhängige Familie mit k Vektoren gibt, aber nicht mit $k+1$ Vektoren. Sei $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_k$ eine solche Familie. Diese ist dann insbesondere eine maximal linear unabhängige Familie in U und daher wegen Satz 11.5 eine Basis von U. □

Korollar 11.13. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Es seien n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in V gegeben. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

(1) *$v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis von V.*
(2) *$v_1, \ldots, v_n$ bilden ein Erzeugendensystem von V.*
(3) *$v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.*

Beweis. Siehe Aufgabe 11.8. □

Beispiel 11.14. Es sei K ein Körper. Man kann sich einfach einen Überblick über die Unterräume des K^n verschaffen, als Dimension von Unterräumen kommt nur k mit $0 \leq k \leq n$ in Frage. Bei $n = 0$ gibt es nur den Nullraum selbst, bei $n = 1$ gibt es den Nullraum und K selbst. Bei $n = 2$ gibt es den Nullraum, die gesamte Ebene K^2, und die eindimensionalen Geraden durch den Nullpunkt. Jede solche Gerade G hat die Gestalt

$$G = Kv = \{\lambda v | \, \lambda \in K\}$$

mit einem von 0 verschiedenen Vektor v. Zwei von null verschiedene Vektoren definieren genau dann die gleiche Gerade, wenn sie linear abhängig sind.

Bei $n = 3$ gibt es den Nullraum, den Gesamtraum K^3, die eindimensionalen Geraden durch den Nullpunkt und die zweidimensionalen Ebenen durch den Nullpunkt.

Lemma 11.15. *(Basisergänzungssatz) Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension $n = \dim(V)$. Es seien*

$$u_1, \ldots, u_k$$

linear unabhängige Vektoren in V Dann gibt es Vektoren

$$u_{k+1}, \ldots, u_n$$

derart, dass

$$u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$$

eine Basis von V bilden.

Beweis. Es sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V. Aufgrund von Satz 11.8 findet man $n - k$ Vektoren aus der Basis $\mathfrak{b}$, die zusammen mit den vorgegebenen $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis von V bilden. □