Algebraische Kurven - Vorlesung 14

Algebraische Funktionen auf Varietäten

Was ist ein Morphismus zwischen zwei affin-algebraischen Mengen V und W? Wir betrachten zuerst die Situation, wo $W = \mathbb{A}_K^1$ die affine Gerade ist. Sei $V = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ als abgeschlossene Teilmenge eines affinen Raumes gegeben. Dann liefert jedes Polynom $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ eine Abbildung $F : \mathbb{A}_K^n \to \mathbb{A}_K^1 = K$ und damit auch eine Abbildung auf V. Das haben wir schon bei der Definition des Koordinatenrings betrachtet. Ebenso liefert ein Element $F \in R$ in einer endlich erzeugten K-Algebra R eine Funktion auf $K-\operatorname{Spek}(R)$, nämlich

$$K-\operatorname{Spek}(R) \longrightarrow \mathbb{A}_K^1,\, P \longmapsto F(P)\,.$$

Dies ist auch die Spektrumsabbildung, die zu $K[T] \to R$, $T \mapsto F$, gehört.

Für die offenen Mengen $D(F) \cong K-\operatorname{Spek}(R_F)$ ist $1/F$ nach Satz 13.4 eine wohldefinierte Funktion. Wir werden allgemein für eine Zariski-offene Menge $U \subseteq V$ erklären, was eine algebraische Funktion auf U ist. Die folgende Definition ist so strukturiert, dass die Bedingung „algebraisch“ eine *lokale Eigenschaft* ist.

Definition 1. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, R eine K- Algebra von endlichem Typ und sei $V = K-\operatorname{Spek}(R)$ das K- Spektrum von R. Sei $P \in V$ ein Punkt, $U \subseteq V$ eine Zariski-offene Menge mit $P \in U$ und es sei $f : U \to \mathbb{A}_K^1 = K$ eine Funktion. Dann heißt f *algebraisch* (oder *regulär* oder *polynomial*) im Punkt P, wenn es Elemente $G, H \in R$ gibt mit $P \in D(H) \subseteq U$ und mit

$$f(Q) = \frac{G(Q)}{H(Q)} \text{ für alle } Q \in D(H)\,.$$

Die Funktion f heißt *algebraisch* (oder *algebraisch auf* U), wenn f in jedem Punkt von U algebraisch ist.

Natürlich definiert jedes Element $f \in R$ eine algebraische Funktion auf jeder offenen Teilmenge des K-Spektrums. Es ist aber im Allgemeinen eher schwierig, die algebraischen Funktionen übersichtlich zu beschreiben.

Bemerkung 2. In der Definition 14.1 ist die vorausgesetzte Stetigkeit überflüssig, da sie aus der lokalen algebraischen Bedingung folgt (siehe Aufgabe 15.1).

Ebenso ist die Bedingung $D(H) \subseteq U$ nicht wichtig. Wenn es eine Beschreibung für f mit $f = G/H$ auf $D(H)$ mit $P \in D(H)$ gibt, so betrachtet man ein H' mit $P \in D(H')$, $D(H') \subseteq U$. Dann kann man zu $D(H) \cap D(H') = D(HH')$ übergehen, und dort die Darstellung $f = (GH')/(HH')$ betrachten.

Wenn es im Punkt P eine Bruchdarstellung für f als $f = G/H$ gibt, so kann man diese Darstellung für alle Punkte aus $D(H)$ verwenden. D.h. f ist auf der ganzen offenen Menge $D(H)$ algebraisch. Insbesondere muss man nicht mit unendlich vielen verschiedenen Darstellungen arbeiten, sondern man kann sich auf die (endlich vielen) Darstellungen G_i/H_i zu einer Überdeckung $U = \bigcup_{i\in I} D(H_i)$ beschränken.

Bei $K = \mathbb{C}$ ist eine algebraische Funktion auch stetig bezüglich der metrischen Topologie, und bei $R = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ ist sie *holomorph*.

Beispiel 3. Sei $V = V(WX - ZY) \subseteq \mathbb{A}^4_K$ und sei $U = D(X,Y) = D(X) \cup D(Y) \subset V$ die durch X und Y definierte Zariski-offene Menge. Auf U ist die durch

$$f = \frac{Z}{X} = \frac{W}{Y}$$

definierte Funktion algebraisch. Die beiden rationalen Darstellungen liefern offenbar eine algebraische Funktion auf den beiden offenen Teilmengen $D(X)$ und $D(Y)$. Damit es eine Funktion auf U definiert muss sichergestellt werden, dass die Brüche auf dem Durchschnitt, also auf $D(X) \cap D(Y) = D(XY)$, die gleichen Funktionswerte haben. Sei also $Q = (w, x, y, z) \in D(XY), Q \in V$. D.h. $x, y \neq 0$ und $wx = zy$. Dann ist aber sofort

$$\frac{Z}{X}(Q) = \frac{z}{x} = \frac{w}{y} = \frac{W}{Y}(Q)\,.$$

Lemma 4. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, R eine K- Algebra von endlichem Typ und sei $V = K-\operatorname{Spek}(R)$ das K- Spektrum von R. Es sei $U \subseteq V$ eine Zariski-offene Menge. Dann bildet die Menge der algebraischen Funktionen auf U einen Unterring (und zwar eine K-Unteralgebra) des Rings der Funktionen von U nach K (wobei die Operationen in K ausgeführt werden).*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die konstante Nullfunktion und die konstante Einsfunktion auf U, das Negative einer algebraischen Funktion, und die Summe und das Produkt von zwei algebraischen Funktionen auf U wieder algebraisch sind. Wir beschränken uns auf die Summe der algebraischen Funktionen f_1 und f_2. Sei $P \in U$ ein Punkt. Nach Voraussetzung gibt es Elemente $G_1, H_1, G_2, H_2 \in R$ mit

$$f_1(Q) = \frac{G_1(Q)}{H_1(Q)} \text{ für alle } Q \in D(H_1) \subseteq U, P \in D(H_1)\,,$$

und

$$f_2(Q) = \frac{G_2(Q)}{H_2(Q)} \text{ für alle } Q \in D(H_2) \subseteq U, P \in D(H_2)\,.$$

Sei $H := H_1H_2$. Dann ist $P \in D(H) = D(H_1) \cap D(H_2) \subseteq U$. Für einen beliebigen Punkt $Q \in D(H)$ ist dann

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(Q) &= f_1(Q) + f_2(Q) \\ &= \frac{G_1(Q)}{H_1(Q)} + \frac{G_2(Q)}{H_2(Q)} \\ &= \frac{G_1(Q)H_2(Q) + G_2(Q)H_1(Q)}{H_1(Q)H_2(Q)} \\ &= \frac{(G_1H_2 + G_2H_1)(Q)}{(H_1H_2)(Q)},\end{aligned}$$

was eine polynomiale Darstellung der Summenfunktion in der Zariski-offenen Umgebung $D(H)$ des Punktes P ergibt. □

Definition 5. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, R eine K- Algebra von endlichem Typ und sei $V = K-\operatorname{Spek}(R)$ das K- Spektrum von R. Sei $U \subseteq V$ eine Zariski-offene Menge. Dann bezeichnet man mit

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) = \{f : U \longrightarrow K : f \text{ ist algebraisch}\}$$

den *Ring der algebraischen Funktionen auf* U. Man bezeichnet ihn auch als *Strukturring zu* U oder als *Schnittring* zu U.

Aufgrund von Lemma 14.4 handelt es sich in der Tat um einen Ring. Das Symbol $\mathcal{O}$ (sprich „O") bezeichnet die sogenannte *Strukturgarbe*.

Lemma 6. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, R eine K- Algebra von endlichem Typ und sei $V = K-\operatorname{Spek}(R)$ das K- Spektrum von R. Es seien $U_1 \subseteq U_2$ offene Teilmengen von V. Dann gibt es einen natürlichen K-Algebra-Homomorphismus*

$$\Gamma(U_2, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(U_1, \mathcal{O}).$$

Beweis. Die Funktion $f : U_2 \to K$ liefert sofort durch Einschränkung eine auf U_1 definierte Funktion. Die lokal-algebraische Beschreibung, die für f an jedem Punkt $P \in U_2$ vorliegt, kann direkt auf der kleineren Teilmenge U_1 interpretiert werden. □

Die im vorstehenden Lemma beschriebene Abbildung heißt *Restriktionsabbildung* oder *Einschränkungsabbildung.*

Lemma 7. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, R eine K- Algebra von endlichem Typ und sei $V = K-\operatorname{Spek}(R)$ das K- Spektrum von R. Es sei $F \in R$ und $U \subseteq D(F) \subseteq V$ eine offene Menge. Dann ist es egal, ob man $\Gamma(U, \mathcal{O})$ mit Bezug auf V oder mit Bezug auf $D(F) = K-\operatorname{Spek}(R_F)$ definiert.*

Beweis. Natürlich hängen die stetigen Funktionen auf U nur von U selbst ab, nicht von einem umgebenden Raum. Wir müssen zeigen, dass die lokal-algebraische Bedingung ebenfalls nur von U abhängt. Sei $P \in U$. Eine Beschreibung

$$\varphi = \frac{G}{H} \text{ auf } D(H) \text{ mit } P \in D(H) \text{ und mit } G, H \in R$$

liefert sofort eine Beschreibung als Bruch auf $D(HF)$, da man ja H, G sofort in R_F auffassen kann.

Es liege nun umgekehrt eine Bruchdarstellung

$$\varphi = \frac{\tilde{G}}{\tilde{H}} \text{ auf } D(\tilde{H}) \text{ mit } P \in D(\tilde{H}) \text{ und mit } \tilde{G}, \tilde{H} \in R_F$$

vor. Es sei $\tilde{G} = G/F^r$ und $\tilde{H} = H/F^s$. Dann gilt für jeden Punkt $Q \in D(HF)$ die Gleichheit

$$\varphi(Q) = \frac{\tilde{G}(Q)}{\tilde{H}(Q)} = \frac{G(Q)/F^r(Q)}{H(Q)/F^s(Q)} = \frac{G(Q)F^s(Q)}{H(Q)F^r(Q)}\,.$$

Dabei haben wir im letzten Schritt mit F^{r+s} erweitert. In der letzten Darstellung sind Zähler und Nenner aus R, und es ist $HF^r(P) \neq 0$, also ist $D(HF^r)$ eine offene Umgebung von P. □

Lemma 8. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, R eine K- Algebra von endlichem Typ und sei $V = K$–Spek (R) das K- Spektrum von R. Es sei $U \subseteq V$ eine Zariski-offene Menge, $P \in U$ ein Punkt und es sei $f : U \to K$ eine algebraische Funktion, für die es die beiden rationalen Darstellungen*

$$\frac{G_1}{H_1} \text{ und } \frac{G_2}{H_2}$$

gebe mit $G_1, H_1, G_2, H_2 \in R$ und mit $P \in D(H_1), D(H_2) \subseteq U$. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit

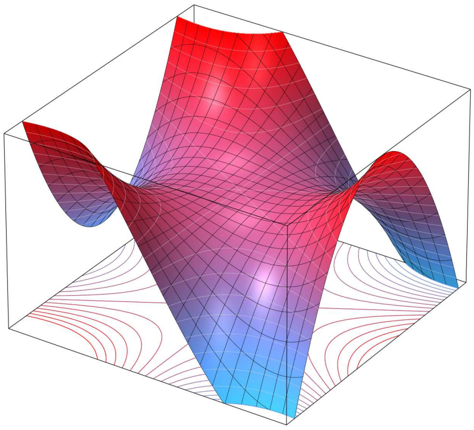
$$H_1^r H_2^r (G_1H_2 - G_2H_1)^r = 0 \text{ in } R\,.$$

Ist R reduziert, so gilt sogar $H_1H_2(G_1H_2 - G_2H_1) = 0$.

Beweis. Wir betrachten das Element $F = H_1H_2(G_1H_2 - G_2H_1)$ auf V und behaupten, dass dies die Nullfunktion induziert. Sei $Q \in V$. Bei $H_1(Q) = 0$ oder $H_2(Q) = 0$ ist $F(Q) = 0$, sei also $H_1(Q), H_2(Q) \neq 0$ vorausgesetzt. Dann ist $Q \in D(H_1) \cap D(H_2)$, und dort gelten die beiden rationalen Darstellungen für f, nämlich

$$\frac{G_1(Q)}{H_1(Q)} = f(Q) = \frac{G_2(Q)}{H_2(Q)}\,.$$

Daraus folgt $G_1(Q)H_2(Q) = G_2(Q)H_1(Q)$ und somit ist die Differenz null. Insgesamt ist also F die Nullfunktion auf V und daher gibt es nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ein r mit $F^r = 0$. □



Der Graph einer globalen Funktion auf $\mathbb{A}_K^2$.

Satz 9. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, R eine reduzierte K-Algebra von endlichem Typ und sei $V = K-\operatorname{Spek}(R)$ das K- Spektrum von R. Dann ist*

$$\Gamma(V, \mathcal{O}) = R\,.$$

Beweis. Ein Element $F \in R$ liefert direkt eine algebraische Funktion auf ganz V, was einen K-Algebra Homomorphismus

$$R \longrightarrow \Gamma(V, \mathcal{O})$$

ergibt. Wenn dabei F an jedem Punkt die Nullfunktion induziert, so ist nach Korollar 11.4 und wegen der Reduziertheit auch $F = 0$. D.h. die Abbildung ist injektiv.

Sei nun $f : V \to K$ ein algebraische Funktion. Dann gibt es zu jedem Punkt $P \in V$ zwei Elemente $G_P, H_P \in R$ mit $P \in D(H_P)$ und mit $f = \frac{G_P}{H_P}$ auf $D(H_P)$. Die $D(H_P)$ bilden eine offene Überdeckung von V und das bedeutet nach Korollar 11.5, dass die H_P in R das Einheitsideal erzeugen. Dann gibt es aber auch eine endliche Auswahl davon, die das Einheitsideal erzeugen, sagen wir $H_i = H_{P_i}$, $i = 1, \ldots, m$. Dann wiederum überdecken diese $D(H_i)$, $i = 1, \ldots, m$, ganz V.

Auf den Durchschnitten $D(H_iH_j) = D(H_i) \cap D(H_j)$ haben wir die Identitäten

$$f(Q) = \frac{G_i(Q)}{H_i(Q)} = \frac{G_j(Q)}{H_j(Q)} \text{ für alle } Q \in D(H_iH_j)\,.$$

Daraus folgt nach Lemma 14.8 und der Reduziertheit, dass

$$H_iH_jG_iH_j = H_iH_jG_jH_i$$

in R gilt. Wir ersetzen H_i durch H_i^2 und G_i durch G_iH_i. Dann ist nach wie vor G_i/H_i eine lokale Beschreibung für f, und die letzte Bedingung vereinfacht sich zu $H_iG_j = H_jG_i$.

Da die H_i das Einheitsideal erzeugen, gibt es Elemente $A_i \in R$ mit

$$\sum_{i=1}^{m} A_i H_i = 1$$

in R. Wir behaupten, dass das Element

$$F = \sum_{i=1}^{m} A_i G_i$$

auf ganz V die Funktion f induziert. Dazu sei $Q \in V$ ein beliebiger Punkt, und zwar sei ohne Einschränkung $Q \in D(H_1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(Q) &= \frac{G_1(Q)}{H_1(Q)} \\ &= \frac{G_1(Q)}{H_1(Q)} (\sum_{i=1}^{m} A_i H_i)(Q)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} A_i(Q) \frac{G_1(Q) H_i(Q)}{H_1(Q)} \\ &= \sum_{i=1}^{m} A_i(Q) G_i(Q) \\ &= F(Q) \, . \end{aligned}$$

□

Korollar 10. *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, R eine reduzierte K- Algebra von endlichem Typ und sei $V = K-\operatorname{Spek}(R)$ das K-Spektrum von R. Es sei $F \in R$ mit zugehöriger offener Menge $D(F) \subseteq V$. Dann ist*

$$\Gamma(D(F), \mathcal{O}) = R_F \, .$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 14.7 und Satz 14.9. □