Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 8

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 8.1. Man gebe ein Beispiel für eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die (in $\mathbb{Q}$) nicht konvergiert.

Aufgabe 8.2. Man gebe ein Beispiel für eine Folge, die nicht konvergent ist, aber eine konvergente Teilfolge enthält.

Aufgabe 8.3. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K beschränkt ist.

Aufgabe 8.4. Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Folge genau dann bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist, wenn $(\frac{1}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 8.5. Es sei K ein angeordneter Körper. Man gebe ein Beispiel einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die es sowohl eine bestimmt gegen $+\infty$ als auch eine bestimmt gegen $-\infty$ divergente Teilfolge gibt.

Aufgabe 8.6. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass eine bestimmt gegen $+\infty$ divergente Folge in K nach unten beschränkt ist.

Man gebe ein Beispiel einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die nach unten, aber nicht nach oben beschränkt ist, und die nicht bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.

Aufgabe 8.7. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine nichtnegative reelle Zahl und $c \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die rekursiv definierte Folge mit $x_0 = c$ und

$$x_{n+1} := \frac{x_n + a/x_n}{2}$$

gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Aufgabe 8.8. Zeige, dass die in Beispiel 8.8 definierte Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 8.9. Zeige, dass die in Beispiel 8.8 definierte Addition und Multiplikation wohldefiniert sind.

Aufgabe 8.10. Skizziere den Graph der reellen Addition

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x + y,$$

und den Graph der reellen Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y.$$

In den beiden folgenden Aufgaben geht es um die Folge der Fibonacci-Zahlen.

Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* f_n ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1\,,\ f_2 := 1 \text{ und } f_{n+2} := f_{n+1} + f_n\,.$$

Aufgabe 8.11. Beweise durch Induktion die *Simpson-Formel* oder Simpson-Identität für die Fibonacci-Zahlen f_n. Sie besagt

$$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n\,.$$

Aufgabe 8.12. Beweise durch Induktion die *Binet-Formel* für die Fibonacci-Zahlen. Diese besagt, dass

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

gilt.

Die nächste Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Teilmenge $T \subseteq K$ heißt ein *Abschnitt*, wenn für alle $a, b \in T$ mit $a \leq b$ und jedes $x \in K$ mit $a \leq x \leq b$ auch $x \in T$ ist.

Aufgabe 8.13. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass jedes Intervall (einschließlich der unbeschränkten Intervalle) in K ein Abschnitt ist.

Man gebe ein Beispiel für einen Abschnitt in $\mathbb{Q}$, der kein Intervall ist.

Zeige, dass in $\mathbb{R}$ jeder Abschnitt ein Intervall ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.14. (4 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und sei $P = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ ein Polynom mit $d \geq 1$ und $a_d \neq 0$. Zeige, dass dann die durch

$$y_n := P(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$$

definierte Folge bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, falls $a_d > 0$ ist, und bestimmt gegen $-\infty$ divergiert, falls $a_d < 0$ ist.

Man folgere, dass die Folgenglieder

$$\frac{1}{y_n}$$

für n hinreichend groß definiert sind und gegen null konvergieren.

Aufgabe 8.15. (4 Punkte)

Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen und

$$x_n := \frac{f_n}{f_{n-1}} .$$

Zeige, dass diese Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert und dass der Grenzwert x die Bedingung

$$x = 1 + x^{-1}$$

erfüllt. Berechne daraus x.

Aufgabe 8.16. (4 Punkte)

Beweise Satz 8.12.

Aufgabe 8.17. (4 Punkte)

Zeige, dass die in Beispiel 8.8 konstruierte Menge $\mathbb{R}$ mit den dort definierten Verknüpfungen einen Körper bildet.

Aufgabe 8.18. (3 Punkte)

Zeige, dass die in Beispiel 8.8 konstruierte Menge $\mathbb{R}$ ein archimedisch angeordneter Körper ist.

Aufgabe 8.19. (5 Punkte)

Zeige, dass die in Beispiel 8.8 konstruierte Menge $\mathbb{R}$ vollständig ist.

Aufgabe 8.20. (7 Punkte)

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass es im Wesentlichen nur einen vollständigen archimedisch angeordneten Körper gibt, so dass man von *dem Körper der reellen Zahlen* sprechen kann. Dazu sei $\mathbb{K}$ ein vollständiger archimedisch angeordneten Körper (der nach Aufgabe 6.17 die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ enthält) und $\mathbb{R} = C/\sim$ sei der in Beispiel 8.8 konstruierte Körper. Man zeige

(1) Die Abbildung
$$C \longrightarrow \mathbb{K},\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \lim_{n\to\infty} x_n,$$
die eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ auf den Grenzwert in $\mathbb{K}$ abbildet, ist wohldefiniert.

(2) Diese Abbildung definiert eine wohldefinierte Abbildung
$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K},\ [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \longmapsto \lim_{n\to\infty} x_n.$$

(3) Die Abbildung φ schickt $[(0)_{n\in\mathbb{N}}]$ auf $0_{\mathbb{K}}$ und $[(1)_{n\in\mathbb{N}}]$ auf $1_{\mathbb{K}}$.

(4) Die Abbildung φ ist mit Summen und Produkten verträglich, d.h. es gilt $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ und $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$.

(5) Die Abbildung φ ist bijektiv.