Zusatzblatt

Es werden maximal 40 Punkte angerechnet, d.h. wer bisher 157 Punkte hat, kann die Zulassung noch erreichen.

Abgabeschluss ist am Dienstag, den 13.03.2012 um 16:00 Uhr im Postkasten der Veranstaltung.

Es dürfen (und dies ist auch explizit erwünscht) neue Gruppen (max. 6 Mitglieder) gebildet werden. In diesem Fall schreibt alle Namen GUT LESERLICH auf die erste Seite.

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Beweise durch Induktion die folgende Formel.

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{2(i-1)}}{3^i} = \left(\frac{4}{3}\right)^n .$$

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Gegeben seien die Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die durch

$$f(x, y) = (x, y - x^2, y^5) \text{ und } g(x, y, z) = (2x - y, z)$$

definiert sind.

(1) Bestimme die Abbildungsvorschriften der Hintereinanderschaltungen $f \circ g$ und $g \circ f$.
(2) Sind die Abbildungen f, g injektiv oder surjektiv?

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{C}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = (2-i)X^5 + (3+i)X^3 + (3-i)X - 2i$ und $T = iX^2 + 5X + 6 - 2i$ durch.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Entscheide, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind.

(1) $(-1, 1, -1)$, $(0, 6, 4)$, $(1, 2, 3)$, im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$.
(2) $1 + i$, $1 + 2i$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$.
(3) $1 + i$, $1 + 2i$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$.
(4) 1, $\sqrt{3}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Berechne zur (komplexen) Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1+i & 2i & 3 \\ 0 & 1-i & -1+3i \\ 4-i & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Determinante und die inverse Matrix.

Aufgabe 6. (6 Punkte)

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,\ y,\ z) \longmapsto (2x+y+3z,\ x+4y-z,\ -7y+5z).$$

Man bestimme Basen für kern ϕ und für bild ϕ und ergänze sie zu Basen des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 7. (6 Punkte)

Wir betrachten die Vektorenfamilien

$$\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Die Standardbasen seien mit $\mathfrak{e}_3$ und $\mathfrak{e}_4$ bezeichnet. Die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

sei durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasen gegeben. Bestimme die beschreibenden Matrizen von f bezüglich der Basen

a) $\mathfrak{e}_4$ und $\mathfrak{v}$,

b) $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{e}_3$,

c) $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Eine Schnecke sitzt am Anfang eines 10000m langen Gummibandes. Jeden Tag kriecht sie einen Meter voran. Nachts, wenn sie ruht, dehnt ein Dämon das Band gleichmäßig so aus, dass es 10000m länger wird. Der Dämon und die Schnecke seien unsterblich und das Band unbegrenzt dehnbar. Erreicht dann die Schnecke jemals das Ende des Bandes?

Tipp: Betrachte das Verhältnis zwischen der zurückgelegten Strecke und der Länge des Bandes.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

In einen Klärteich mit einem Fassungsvermögen von $2000m^3$ werden zu Beginn eines jeden Tages $200m^3$ Wasser eingelassen, das einen bestimmten Schadstoff in einer Volumen-Konzentration von 10% enthält und vollständig mit dem vorhandenen Wasser vermischt. Im Laufe eines Tages reduziert sich durch biologische Reaktion die vorhandene Schadstoffmenge jeweils um 20%. Gegen Ende eines Tages werden dann $200m^3$ Wasser aus dem Klärteich abgepumpt. Welche Schadstoffkonzentration stellt sich auf Dauer bei dem abgepumptem Wasser ein, wenn am Anfang der Teich vollständig mit klarem Wasser gefüllt war?

Aufgabe 10. (4 Punkte)

Untersuche die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

Aufgabe 11. (3 Punkte)

Berechne die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_5$ der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, die das Cauchy-Produkt der Sinusreihe mit der Kosinusreihe ist.

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x-1)^3}\,.$$

Zeige mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f jeden Wert $c \neq 0$ an mindestens zwei Stellen annimmt.

Aufgabe 13. (3 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\; x \longmapsto f(x) = \frac{3e^x - 4e^{2x}}{e^x - 1}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

AUFGABE 14. (3 Punkte)
Bestimme das Taylor-Polynom bis zur vierten Ordnung der Umkehrfunktion des Kosinus im Punkt 1.

AUFGABE 15. (3 Punkte)
Bestimme, für welches $a \in [-2, 2]$ die Funktion

$$a \longmapsto \int_a^{a+2} x^3 + 2x^2 \, dx$$

ihr globales Maximum annimmt.

AUFGABE 16. (5 Punkte)
Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{e^{2t} + e^{3t}}{e^{4t} - 1} .$$

AUFGABE 17. (3 Punkte)
Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = (t+2)y + t \exp\left(\frac{1}{2}t^2 + 2t\right) .$$

Welche Lösung hat das Anfangswertproblem $y(1) = \pi$?

AUFGABE 18. (3 Punkte)
Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = (\sin t - 2t)(y^2 + 1), \; y > 0 ,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Welche Lösung hat das Anfangswertproblem $y(0) = \pi$?