Prof. Dr. H. Brenner | Osnabrück SS 2010

Mathematik II

Arbeitsblatt 48

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 48.1. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ und seien

$$f, g : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeige durch ein Beispiel, dass das Taylor-Polynom zum Produkt fg im Punkt P vom Grad ≤ 2 nicht das Produkt der beiden Taylor-Polynome von f und g in P vom Grad ≤ 1 sein muss.

Wenn in den folgenden Aufgaben nach Extrema gefragt wird, so ist damit gemeint, dass man die Funktionen auf (isolierte) lokale und globale Extrema untersuchen soll. Zugleich soll man, im differenzierbaren Fall, die kritischen Punkte bestimmen.

Aufgabe 48.2. Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

auf Extrema.

Aufgabe 48.3. Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 - y^4,$$

auf Extrema.

Aufgabe 48.4. Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2 + 5xy,$$

auf Extrema.

Aufgabe 48.5. Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2 + 4xy,$$

auf Extrema.

Aufgabe 48.6. Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto xy^2 - x^3 y,$$

auf Extrema.

Aufgabe 48.7. Es sei

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, wobei $G \subseteq V$ eine offene Menge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum sei. Zeige, dass für $P \in G$ und $v \in V$ die Beziehung

$$\sum_{|r|=2} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r \;=\; \frac{1}{2} \operatorname{Hess}_P f(v, v)$$

gilt.

Aufgabe 48.8. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, und $P \in G$. Man gebe ein Beispiel von zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$f, g : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

an derart, dass ihre quadratischen Approximationen in P übereinstimmen, und die eine Funktion ein Extremum in P besitzt, die andere nicht.

Aufgabe 48.9. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\dim(V) \geq 2$, $G \subseteq V$ offen, und $P \in G$. Man gebe ein Beispiel von zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$f, g : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

an derart, dass ihre quadratischen Approximationen in P übereinstimmen, und die eine Funktion ein Extremum in P besitzt, die andere nicht.

Aufgabe 48.10. Skizziere die Nullstellenmenge (die Niveaumenge zum Wert 0) einer Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(0, 0) = 0$ und der Eigenschaft, dass f in $(0, 0)$ kein lokales Minimum besitzt, dass aber die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Nullpunkt ein lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 48.11. Sei

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V mit den zugehörigen Koordinatenfunktionen z_i, $i = 1, \ldots, n$. Zeige, dass f auch eine Polynomfunktion in diesen Koordinaten ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 48.12. (5 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $P \in G$ ein Punkt und

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es maximal ein Polynom $p(x_1, \ldots, x_n)$ vom Grad $\leq k$ mit der Eigenschaft geben kann, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{|| f(x) - p(x) ||}{|| x ||^k} = 0$$

gilt.

Aufgabe 48.13. (5 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ und seien

$$f, g : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei k-mal stetig differenzierbare Funktionen mit den Taylor-Polynomen $T_k(f)$ und $T_k(g)$ in P vom Grad $\leq k$. Zeige, dass das Produkt fg ebenfalls k-mal stetig differenzierbar ist, und dass für das Taylor-Polynom $T_k(fg)$ von fg in P vom Grad $\leq k$ die Beziehung

$$T_k(fg) = (T_k(f) \cdot T_k(g))_{\leq k}$$

besteht, wobei der Subskript $\leq k$ bedeutet, dass das Polynom bis zum Grad k genommen wird.

Aufgabe 48.14. (4 Punkte)

Sei $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Untersuche die Funktion

$$f : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y) \longmapsto \frac{\cos x}{\cos y},$$

auf Extrema.

Aufgabe 48.15. (4 Punkte)

Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y) \longmapsto x^2 + 9y^2 + 6xy,$$

auf Extrema.

Aufgabe 48.16. (5 Punkte)

Sei
$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Funktion und betrachte
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto h(x^2 + y^2).$$
Zeige, dass f allenfalls im Nullpunkt $(0, 0)$ ein isoliertes lokales Extremum besitzen kann, und dass dies genau dann der Fall ist, wenn h in 0 ein isoliertes lokales Extremum besitzt.

Aufgabe 48.17. (6 Punkte)

Zeige, dass die Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
mit
$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0)\,, \\ 0 \text{ für } (x, y) = (0, 0)\,, \end{cases}$$
zweimal partiell differenzierbar ist, und dass
$$D_1D_2f(0, 0) \neq D_2D_1f(0, 0)$$
gilt.