

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 10

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 10.1. Finde primitive Einheiten in den Restklassenkörpern $\mathbb{Z}/(2)$, $\mathbb{Z}/(3)$, $\mathbb{Z}/(5)$, $\mathbb{Z}/(7)$ und $\mathbb{Z}/(11)$.

AUFGABE 10.2. Bestimme sämtliche primitive Einheiten im Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(13)$.

AUFGABE 10.3. Sei p eine ungerade Primzahl und $\mathbb{Z}/(p)$ der zugehörige Restklassenkörper. Zeige, dass das Produkt von zwei primitiven Einheiten niemals primitiv ist.

AUFGABE 10.4. Konstruiere einen Körper \mathbb{F}_9 mit 9 Elementen.

AUFGABE 10.5. Bestimme in \mathbb{F}_9 für jedes Element die multiplikative Ordnung. Man gebe insbesondere die primitiven Einheiten an.

AUFGABE 10.6. Es sei p eine Primzahl und F ein Körper mit p^2 Elementen. Welche Ringhomomorphismen zwischen $\mathbb{Z}/(p^2)$ und F gibt es? Man betrachte beide Richtungen.

AUFGABE 10.7. a) Sei K ein Körper. Zeige, dass die Einheitengruppe von K nicht zyklisch unendlich ist.

b) Sei R ein kommutativer Ring, dessen Charakteristik nicht zwei ist. Zeige, dass die Einheitengruppe von R nicht zyklisch unendlich ist.

c) Beschreibe einen kommutativen Ring, dessen Einheitengruppe zyklisch unendlich ist.

AUFGABE 10.8. Bestimme den Rest von $44!$ modulo 47.

AUFGABE 10.9. Bestimme die Zerlegung von $X^{p-1} - 1$ in irreduzible Polynome im Polynomring $\mathbb{Z}/(p)[X]$. Beweise aus dieser Zerlegung erneut den Satz von Wilson.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 10.10. (3 Punkte)

Finde primitive Einheiten in den Restklassenkörpern $\mathbb{Z}/(13)$, $\mathbb{Z}/(17)$ und $\mathbb{Z}/(19)$.

AUFGABE 10.11. (5 Punkte)

Konstruiere zu einer Primzahl p einen Körper mit p^2 Elementen.

AUFGABE 10.12. (4 Punkte)

Konstruiere endliche Körper mit 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32 und 49 Elementen.

AUFGABE 10.13. (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}/(3)[Z]/(Z^2 + 1)$ der Körper mit 9 Elementen (z bezeichne die Restklasse von Z). Führe in $\mathbb{F}_9[X]$ die Division mit Rest „ P durch T “ für die beiden Polynome $P = X^4 + (1 + 2z)X^3 + zX^2 + 2X + 2 + z$ und $T = (z + 1)X^2 + zX + 2$ durch.

AUFGABE 10.14. (4 Punkte)

Finde einen Erzeuger der Einheitengruppe eines Körpers mit 25 Elementen. Wieviele solche Erzeuger gibt es?