**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2011**

# Körper- und Galoistheorie

## Arbeitsblatt 15

### Aufwärmaufgaben

Aufgabe 15.1. Es sei $L$ ein Körper und $M$ eine Menge von Ringhomomorphismen von $L$ nach $L$. Zeige, dass die Menge

$$\{x \in L \mid \varphi(x) = x \text{ für alle } \varphi \in M\}$$

ein Unterkörper von $L$ ist.

Aufgabe 15.2. Es sei $L$ ein Körper, es sei $M$ eine Menge von Automorphismen von $L$ nach $L$ und es sei $H$ die von $M$ erzeugte Untergruppe der Automorphismengruppe. Zeige die Gleichheit

$$\operatorname{Fix}(H) = \{x \in L \mid \varphi(x) = x \text{ für alle } \varphi \in M\}.$$

Aufgabe 15.3. Es sei $L$ ein Körper und $G = \operatorname{Aut} L$ die Automorphismengruppe von $L$. Begründe die folgenden Beziehungen.

(1) Für Untergruppen $H_1 \subseteq H_2 \subseteq G$ ist $\operatorname{Fix}(H_1) \supseteq \operatorname{Fix}(H_2)$.
(2) Für Unterkörper $M_1 \subseteq M_2 \subseteq L$ ist $\operatorname{Gal}(L|M_1) \supseteq \operatorname{Gal}(L|M_2)$.
(3) Für eine Untergruppe $H \subseteq G$ ist $H \subseteq \operatorname{Gal}(L|\operatorname{Fix}(H))$.
(4) Für einen Unterkörper $M \subseteq L$ ist $M \subseteq \operatorname{Fix}(\operatorname{Gal}(L|M))$.

Aufgabe 15.4. Es sei $K$ ein Körper und $H$ eine endliche Gruppe von Körperautomorphismen. Sei $x \in K$. Zeige, dass

$$\sum_{\varphi \in H} \varphi(x) \text{ und } \prod_{\varphi \in H} \varphi(x)$$

zum Fixkörper $\operatorname{Fix}(H)$ gehören.

Aufgabe 15.5. Es sei $L$ ein Körper und sei

$$\varphi : L \longrightarrow L$$

ein Automorphismus. Zeige, dass die Einschränkung von $\varphi$ auf den Primkörper von $L$ die Identität ist.

Aufgabe 15.6. Beweise Lemma 11.6 mit Hilfe von Fixkörpern.

Aufgabe 15.7. Es sei $p$ eine Primzahl und $q = p^e$, $e \geq 1$, eine Primzahlpotenz. Beweise mit Hilfe der verschiedenen äquivalenten Eigenschaften aus Satz 15.6, dass die Körpererweiterung $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_q$ galoissch ist.

Aufgabe 15.8. Bestimme die Matrix des Frobenius-Homomorphismus

$$\Phi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{F}_q$$

bzgl. einer geeigneten $\mathbb{F}_p$-Basis von $\mathbb{F}_q$ für $p = 2$ und $q = 4, 8$.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.9. (3 Punkte)

Es seien $L$ und $L'$ isomorphe Körper. Zeige, dass dann auch die Automorphismengruppen $\operatorname{Aut}(L)$ und $\operatorname{Aut}(L')$ in natürlicher Weise zueinander isomorph sind.

Aufgabe 15.10. (5 Punkte)

Bestimme die Körper-Automorphismen von $\mathbb{R}$.

Aufgabe 15.11. (3 Punkte)

Bestimme die Matrix des Frobenius-Homomorphismus

$$\Phi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{F}_q$$

bzgl. einer geeigneten $\mathbb{F}_p$-Basis von $\mathbb{F}_q$ für $p = 3$ und $q = 9, 27$.

Aufgabe 15.12. (5 Punkte)

Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit einer zyklischen Galoisgruppe. Zeige, dass für jeden Zwischenkörper $M$ auch die Erweiterung $K \subseteq M$ galoissch ist mit einer ebenfalls zyklischen Galoisgruppe.