Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 16

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Seien R und A kommutative Ringe. Zeige, dass A eine R-Algebra ist genau dann, wenn A ein R-Modul ist, für den zusätzlich gilt

$$r(ab) = (ra)b \text{ für alle } r \in R,\ a, b \in A.$$

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Sei G eine kommutative Gruppe. Zeige, dass G auf genau eine Weise die Struktur eines $\mathbb{Z}$-Moduls trägt. Kommutative Gruppen und $\mathbb{Z}$-Moduln sind also äquivalente Objekte.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Sei $(G, +, 0)$ eine kommutative Gruppe. Sei

$$E := \operatorname{End}(G) = \operatorname{Hom}(G, G)$$

die Menge der Gruppenhomomorphismen von G nach G (also die Gruppenendomorphismen auf G). Definiere auf E eine Addition und eine Multiplikation, so dass E zu einem (in der Regel nicht kommutativen) Ring wird.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Sei $(M, +, 0)$ eine kommutative Gruppe und sei $E = \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ der zugehörige Endomorphismenring. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass eine R-Modulstruktur auf M äquivalent ist zu einem Ringhomomorphismus $R \to \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(M)$.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Betrachte die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, 0)$ als kommutative Gruppe. Zeige, dass sie nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Betrachte die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, 0)$ als kommutative Gruppe. Es sei $G \subseteq \mathbb{Q}$ eine endlich erzeugte Untergruppe. Zeige, dass G zyklisch ist.

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich und K ein Körper mit $R \subseteq K$. Zeige, dass dann auch $Q(R) \subseteq K$ gilt.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Seien R und S kommutative Ringe und sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in S. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal in R ist.

Zeige durch ein Beispiel, dass das Urbild eines maximalen Ideales kein maximales Ideal sein muss.

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Seien R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a} \neq R$ ein Ideal in R. Zeige: $\mathfrak{a}$ ist ein maximales Ideal genau dann, wenn es zu jedem $g \in R$, $g \notin \mathfrak{a}$, ein $f \in \mathfrak{a}$ und ein $r \in R$ gibt mit $rg + f = 1$.

Zeige (ohne Betrachtung von Restklassenringen), dass ein maximales Ideal ein Primideal ist.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit dem Restklassenring $S = R/\mathfrak{a}$. Zeige, dass die Ideale von S eindeutig denjenigen Idealen von R entsprechen, die $\mathfrak{a}$ umfassen.