Fachbereich Mathematik/Informatik **29. März 2011**
Prof. Dr. H. Brenner

Reelle und angewandte Analysis (Mathematik III)

Klausur mit Lösungen

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregel, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Ich erkäre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer per Aushang oder im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	5	3	7	3	3	10	7	7	3	8	64
erhaltene Pkt.:													

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Der *positive Teil* einer Funktion
$$f : M \longrightarrow \mathbb{R},$$
wobei M eine Menge bezeichnet.

(2) Das *Bildmaß* unter einer messbaren Abbildung
$$\varphi : M \longrightarrow N$$
von einem Maßraum $(M, \mathcal{A}, \mu)$ in einen Messraum $(N, \mathcal{B})$.

(3) Ein *translationsinvariantes* Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

(4) Der *Limes superior* zu einer reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(5) Ein *(überdeckungs)kompakter* topologischer Raum.

(6) Zwei in einem Punkt $P \in M$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M *tangential äquivalente* differenzierbare Kurven
$$\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow M$$
(dabei sei $0 \in I$ ein offenes reelles Intervall und $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$).

(7) Die *zurückgezogene Differentialform* $\varphi^*\omega$ zu einer Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ bezüglich einer stetig differenzierbaren Abbildung $\varphi : L \to M$ zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten L und M.

(8) Die *kanonische Volumenform* auf einer orientierten riemannschen Mannigfaltigkeit M.

Lösung

(1) Die Funktion
$$f_+ = \sup(f, 0)$$
heißt der *positive Teil* von f.

(2) Unter dem Bildmaß versteht man das für messbare Teilmengen $T \subseteq N$ durch
$$\nu(T) := \mu(\varphi^{-1}(T))$$
definierte Maß auf N.

(3) Ein Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ heißt *translationsinvariant*, wenn für alle messbaren Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ die Gleichheit
$$\mu(T) = \mu(T + v)$$
gilt.

(4) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und es sei H die Menge der Häufungspunkte dieser Folge. Dann setzt man
$$\limsup\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sup(H)$$
und nennt diese Zahl den *Limes superior* der Folge.

(5) Ein topologischer Raum X heißt *kompakt* (oder *überdeckungskompakt*), wenn es zu jeder offenen Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{mit } U_i \text{ offen und einer beliebigen Indexmenge}$$

eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gibt derart, dass

$$X = \bigcup_{i \in J} U_i$$

ist.

(6) Die beiden Kurven γ_1 und γ_2 heißen *tangential äquivalent* in P, wenn es eine offene Umgebung $P \in U$ und eine Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt derart, dass

$$(\alpha \circ (\gamma_1|_{\gamma_1^{-1}(U)}))'(0) \;=\; (\alpha \circ (\gamma_2|_{\gamma_2^{-1}(U)}))'(0)$$

gilt.

(7) Die zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\omega$ ist für $P \in L$ und $v_1, \ldots, v_k \in T_P L$ durch

$$(\varphi^*\omega)(P, v_1, \ldots, v_k) = \omega(\varphi(P), T_P\varphi(v_1), \ldots, T_P\varphi(v_k))$$

definiert.

(8) Zu $P \in M$ sei ω_P diejenige alternierende Form auf $T_P M$ (bzw. das entsprechende Element aus $\bigwedge^n T_P^* M$), die jeder die Orientierung repräsentierenden Orthonormalbasis den Wert 1 zuordnet. Dann heißt die n-Differentialform

$$M \longrightarrow \bigwedge^n T^*M,\; P \longmapsto \omega_P,$$

die *kanonische Volumenform* auf M.

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Das *Lemma von Fatou.*
(2) Die *Transformationsformel für Integrale* zu einem C^1-Diffeomorphismus
$$\varphi : G \longrightarrow H,$$
wobei G und H offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind.
(3) Die *Formel für die zurückgezogene Volumenform* $\varphi^*\omega$ zu $\omega = f dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$ unter einer stetig differenzierbaren Abbildung
$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$
(4) Der *Satz von Stokes* für Mannigfaltigkeiten mit Rand.

Lösung

(1) Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und es sei
$$f_n : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$
eine Folge von nichtnegativen messbaren numerischen Funktionen. Dann gilt
$$\int_M \liminf\, (f_n)\, d\mu \;\leq\; \liminf\, (\int_M f_n\, d\mu)$$
(2) Für eine messbare Funktion
$$f : H \longrightarrow \mathbb{R}$$
ist f genau dann integrierbar auf H, wenn die Hintereinanderschaltung $f \circ \varphi$ auf G integrierbar ist. In diesem Fall gilt
$$\int_H f\, d\lambda^n \;=\; \int_G (f \circ \varphi) |J(\varphi)|\, d\lambda^n,$$
wobei $J(\varphi)$ die Determinante des totalen Differentials $D\varphi$ bezeichnet.
(3) Die zurückgezogene Volumenform besitzt die Darstellung
$$\varphi^*\omega \;=\; (f \circ \varphi) \cdot \det\, ((\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j})_{1 \leq i,j \leq n}) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$
(4) Es sei M eine n-dimensionale orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M und mit abzählbarer Topologie, und es sei ω eine stetig differenzierbare $(n-1)$-Differentialform mit kompaktem Träger auf M. Dann ist
$$\int_M d\omega \;=\; \int_{\partial M} \omega.$$

Aufgabe 3. (5 (2+2+1) Punkte)

Die Grundfläche eines Kochtopfes sei eine Kreisscheibe mit Radius 13 cm, der Topf sei 10 cm hoch und auf die Höhe von $7,7$ cm mit Wasser gefüllt. Eine Kartoffel wird in den Topf geworfen und taucht voll unter, wobei das Wasser auf eine Höhe von $8,8$ cm ansteigt.

a) Berechne das Volumen der Kartoffel (rechne mit $\pi = 3,14$; Einheit nicht vergessen).

b) Welche maßtheoretischen Gesetzmäßigkeiten wurden bei der Berechnung von a) verwendet?

c) Handelt es sich um eine große oder um eine kleine Kartoffel?

Lösung

a) Das Wasser steigt um $1,1$ cm, daher ist das Volumen der Kartoffel gleich

$$13 \cdot 13 \cdot 3,14 \cdot 1,1 \;=\; 169 \cdot 3,14 \cdot 1,1 \;=\; 169 \cdot 3,454 \;=\; 583,726$$

(in Kubikzentimetern).

b) Es wurde dabei die Formel für die Kreisfläche (für die Grundfläche des Topfes), die Produktformel für das Maß einer Produktmenge und das Additivitätsprinzip für disjunkte Teilmengen angewendet.

c) Wegen $8^3 = 512$ ist die Kartoffel volumengleich zu einem Würfel, dessen Seitenlänge größer als 8 cm ist. Die Kartoffel ist also ziemlich groß.

Aufgabe 4. (3 Punkte)
Berechne das Volumen des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ erzeugten Parallelotops (in dem von diesen Vektoren erzeugten Unterraum).

Lösung

Sei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Skalarprodukte haben die Werte

$$\langle v_1, v_1 \rangle = 5, \ \langle v_2, v_2 \rangle = 6, \ \langle v_3, v_3 \rangle = 6, \ ,$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 2, \ \langle v_1, v_3 \rangle = -1, \ \langle v_2, v_3 \rangle = 3\,.$$

Die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

ist

$$180 - 6 - 6 - 6 - 45 - 24 \ = \ 93.$$

Das Volumen des Parallelotops ist also $\sqrt{93}$.

Aufgabe 5. (7 Punkte)

Es sei X ein Messraum und es sei

$$f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

($n \in \mathbb{N}$) eine Folge von messbaren Funktionen, wobei $\mathbb{R}$ die σ-Algebra der Borelmengen trägt. Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Menge

$$M = \{x \in X \,|\, a \text{ ist ein Häufungspunkt der Folge } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}\}$$

eine messbare Teilmenge von X ist.

Lösung

Die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt genau dann a als einen Häufungspunkt, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder in $[a-\epsilon, a+\epsilon]$ gibt. Dies ist äquivalent dazu, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}_+$ und jedem $m \in \mathbb{N}_+$ ein $n \geq m$ gibt mit

$$f_n(x) \in [a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}]\,.$$

Wir definieren

$$M_{k,n} = \{x \in X \,|\, |f_n(x) - a| \leq \frac{1}{k}\}\,.$$

Mit dieser Bezeichnung ist

$$M = \bigcap_k (\bigcap_m (\bigcup_{n\geq m} M_{k,n}))\,.$$

Die Menge $M_{k,n}$ ist das Urbild des abgeschlossenen Intervalls $[a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k}]$ unter der messbaren Abbildung f_n, also messbar. Daher ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{n\geq m} M_{k,n}$ messbar. Somit sind auch die abzählbaren Durchschnitte $\bigcap_m(\bigcup_{n\geq m} M_{k,n})$ und $M = \bigcap_k(\bigcap_m(\bigcup_{n\geq m} M_{k,n}))$ messbare Teilmengen.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Berechne das Integral zur Funktion

$$f(r,s,t) = s^2t + r\ \cos\ t$$

über dem Einheitswürfel $W = [0,1]^3$.

Lösung

Aufgrund des Satzes von Fubini ist

$$\begin{aligned}
\int_W s^2t + r\ \cos\ t\ d\lambda^3 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (s^2t + r\ \cos\ t\,)drdsdt \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (rs^2t + \frac{1}{2}r^2\ \cos\ t\,)|_0^1 dsdt \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (s^2t + \frac{1}{2}\ \cos\ t\,)dsdt \\
&= \int_0^1 (\frac{1}{3}s^3t + s\frac{1}{2}\ \cos\ t\,)|_0^1 dt \\
&= \int_0^1 (\frac{1}{3}t + \frac{1}{2}\ \cos\ t\,)dt \\
&= (\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{2}\ \sin\ t\,)|_0^1 dt \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\ \sin\ 1\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. (3 (2+1) Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

a) Wie muss man x wählen, damit diese drei Vektoren die Standardorientierung des $\mathbb{R}^3$ repräsentieren.

b) Wie muss man x wählen, damit diese drei Vektoren die der Standardorientierung entgegengesetzte Orientierung repräsentieren.

Lösung

a) Die Vektoren repräsentieren die Standardorientierung genau dann, wenn ihre Determinante positiv ist. Diese ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} = 14 - 4x - 6x + 10 = -10x + 24,$$

und dies ist positiv genau dann, wenn $x < 2,4$ ist.

b) Die entgegengesetzte Orientierung liegt genau dann vor, wenn die Determinante negativ ist, und dies ist genau bei $x > 2,4$ der Fall.

Aufgabe 8. (10 (2+8) Punkte)

Sei

$$S = \{P \in \mathbb{R}^3 |\ || P || = 1\}$$

die Einheitssphäre. Zu $v = (a, b, c) \neq 0$ ist

$$E_v = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ ax + by + cz = 0\}$$

eine Ebene durch den Nullpunkt, die einen Großkreis (einen „Äquator“) und zwei offene Halbsphären auf S definiert.

a) Beschreibe zu $v = (a, b, c) \neq 0$ den zugehörigen Großkreis und die beiden Halbsphären mit Gleichungen bzw. mit Ungleichungen.

b) Zeige, dass man S nicht mit drei offenen Halbsphären überdecken kann.

Lösung

a) Der Großkreis ist

$$G = \{(x, y, z) \in S |\ ax + by + cz = 0\}$$

und die beiden offenen Halbsphären sind

$$U_+ = \{(x, y, z) \in S |\ ax + by + cz > 0\}$$

bzw.

$$U_- = \{(x, y, z) \in S |\ ax + by + cz < 0\} .$$

b) Für jede offene Halbkugel U und den zugehörigen Großkreis G ist $U \cap G = \emptyset$. Der maximale Abstand von zwei Punkten $P, Q \in S$ ist 2, und dies ist genau dann der Fall, wenn die beiden Punkte gegenüber (antipodal) liegen, wenn also ihre Verbindungsgerade durch den Kugelmittelpunkt geht (also bei $Q = -P$). Ein solches antipodale Paar liegt nicht auf einer offenen Halbsphäre, da bei $P = (x, y, z)$ und $P \in U_+$ ja $ax + by + cz > 0$ und daher $a(-x) + b(-y) + c(-z) < 0$ gilt, also $-P \in U_-$.

Wir nehmen nun an, dass es eine offene Überdeckung

$$S \subseteq U_1 \cup U_2 \cup U_3$$

mit drei offenen Halbsphären U_1, U_2, U_3 gibt (die entsprechenden Ebenen und Großkreise seien mit E_i bzw. G_i bezeichnet). Wegen $U_1 \cap G_1 = \emptyset$ folgt

$$G_1 \subseteq U_2 \cup U_3 .$$

Der Durchschnitt $G_1 \cap E_2$ enthält mindestens zwei antipodale Punkte P und $-P$. Dabei ist $P, -P \notin U_2$. Da U_3 nach der Vorüberlegung kein antipodales Punktepaar enthält, gehört einer dieser Punkte auch nicht zu U_3 und wir haben einen Widerspruch.

Aufgabe 9. (7 Punkte)

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $P \in M$ ein Punkt. Es sei $0 \in I$ ein offenes reelles Intervall und es seien

$$\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow M$$

zwei differenzierbare Kurven mit $\gamma_1(0) = P = \gamma_2(0)$. Zeige, dass γ_1 und γ_2 genau dann *tangential äquivalent* in P sind, wenn für jede Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit $P \in U$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$(\alpha \circ (\gamma_1|_{\gamma_1^{-1}(U)}))'(0) \,=\, (\alpha \circ (\gamma_2|_{\gamma_2^{-1}(U)}))'(0)$$

gilt.

Lösung

Die beiden Kurven sind nach Definition tangential äquivalent, wenn es eine Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit $P \in U$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen gibt derart, dass die Gleichheit

$$(\alpha \circ \gamma_1|_{\gamma_1^{-1}(U)})'(0) \,=\, (\alpha \circ \gamma_2|_{\gamma_2^{-1}(U)})'(0)$$

gilt. Wir müssen zeigen, dass die entsprechende Gleichheit für jede Karte

$$\beta : U' \longrightarrow V'$$

mit $P \in U'$ gilt. Dabei ändern sich diese Werte nicht, wenn man zu einer kleineren offenen Umgebung von P und einem kleineren offenen Intervall von 0 übergeht. Wir können also davon ausgehen, dass $U = U'$ ist, dass die Bilder von γ_1 und γ_2 in U liegen und dass es auf U zwei Karten

$$\alpha_1 : U \longrightarrow V_1$$

und

$$\alpha_2 : U \longrightarrow V_2$$

gibt. Dann folgt aus

$$(\alpha_1 \circ \gamma_1)'(0) \,=\, (\alpha_1 \circ \gamma_2)'(0)$$

nach der Kettenregel unter Verwendung der Differenzierbarkeit der Übergangsabbildung $\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}$ sofort

$$\begin{aligned}
(\alpha_2 \circ \gamma_1)'(0) &= ((\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}) \circ (\alpha_1 \circ \gamma_1))'(0) \\
&= (D(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}))_{\alpha_1(P)}((\alpha_1 \circ \gamma_1)'(0)) \\
&= (D(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}))_{\alpha_1(P)}((\alpha_1 \circ \gamma_2)'(0)) \\
&= (\alpha_2 \circ \gamma_2)'(0).
\end{aligned}$$

AUFGABE 10. (7 (2+3+2) Punkte)
Wir betrachten die differenzierbaren Abbildungen

$$\gamma : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t, t^{-1}),$$

und

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (u,v) \longmapsto (u^2, uv, -u+v^2),$$

und die Differentialform

$$\omega = xdx - zdy + dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$.

a) Berechne die zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\omega$ auf dem $\mathbb{R}^2$.

b) Berechne das Wegintegral zur Differentialform $\varphi^*\omega$ zum Weg γ.

c) Berechne (ohne Bezug auf b)) das Wegintegral zur Differentialform ω zum Weg $\varphi \circ \gamma$.

Lösung

a) Die zurückgezogene Differentialform ist

$$\begin{aligned}
\varphi^*(xdx - zdy + dz) &= u^2du^2 - (-u+v^2)duv + d(-u+v^2) \\
&= 2u^3du + (u-v^2)(vdu + udv) - du + 2vdv \\
&= (2u^3 + uv - v^3 - 1)du + (u^2 - uv^2 + 2v)dv.
\end{aligned}$$

b) Das Wegintegral ist

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (2t^3 + 1 - t^{-3} - 1)dt + (t^2 - t^{-1} + 2t^{-1})dt^{-1} &= \int_1^2 (2t^3 - t^{-3})dt + (t^2 + t^{-1})dt^{-1} \\
&= \int_1^2 (2t^3 - t^{-3})dt - (1 + t^{-3})dt \\
&= \int_1^2 (2t^3 - 2t^{-3} - 1)dt \\
&= (\frac{1}{2}t^4 + t^{-2} - t)|_1^2 \\
&= 8 + \frac{1}{4} - 2 - \frac{1}{2} - 1 + 1 \\
&= 5 + \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

c) Der verknüpfte Weg ist

$$\psi(t) = (t^2, 1, -t + t^{-2}).$$

Somit ist

$$\int_1^2 \psi^*(xdx - zdy + dz) = \int_1^2 t^2dt^2 + d(-t + t^{-2})$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^2 (2t^3 - 1 - 2t^{-3})dt \\
&= 5 + \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 11. (3 Punkte)
Berechne die äußere Ableitung $d\omega$ der Differentialform

$$\omega = e^{xz} dx \wedge dy - xyz dx \wedge dz + (\sin(\cos(xy)) + y^{10} z^{100}) dy \wedge dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} d\omega &= xe^{xz} dz \wedge dx \wedge dy - xz dy \wedge dx \wedge dz \\ &\quad -y \sin(xy) \cos(\cos(xy)) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= (xe^{xz} + xz - y \sin(xy) \cos(\cos(xy))) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Aufgabe 12. (8 Punkte)

Beweise den Satz von Green für ein Dreieck D mit den Eckpunkten $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ und für die Differentialform xdy.

Lösung

Es seien

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \, P_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ und } P_3 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

die drei Eckpunkte. Wegen $d(xdy) = dx \wedge dy$ ist das Integral zu dieser Flächenform über D gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks. Dieses Dreieck wird von P_1 aus von den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} a_2 - a_1 \\ b_2 - b_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_3 - a_1 \\ b_3 - b_1 \end{pmatrix}$ aufgespannt. Der Flächeninhalt ist nach der Determinantenformel für ein Parallelotop somit gleich

$$\frac{1}{2}|(a_2-a_1)(b_3-b_1)-(b_2-b_1)(a_3-a_1)| = \frac{1}{2}|a_2b_3-a_2b_1-a_1b_3-a_3b_2+a_1b_2+a_3b_1|.$$

Wenn die beiden Vektoren die Standardorientierung repräsentieren, was wir von nun an annehmen, so kann man den Betrag weglassen.

Wir berechnen nun das Wegintegral zu xdy entlang des gegen den Uhrzeigersinn durchlaufenen Dreiecksrandes. Dabei geht der Weg von P_1 nach P_2, dann nach P_3 und zurück zu P_1 (dies entspricht dem entgegengesetzten Uhrzeigersinn bei der fixierten Orientierung). Diese linearen Wege sind (jeweils auf dem Einheitsintervall definiert)

$$\gamma_1(t) = P_1 + t(P_2 - P_1) = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_2 - a_1 \\ b_2 - b_1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_2(t) = P_2 + t(P_3 - P_2) = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_3 - a_2 \\ b_3 - b_2 \end{pmatrix}$$

und

$$\gamma_3(t) = P_3 + t(P_1 - P_3) = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 - a_3 \\ b_1 - b_3 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\int_{\gamma_1} xdy = \int_0^1 (a_1 + t(a_2 - a_1))(b_2 - b_1)dt$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_1(b_2-b_1)t + \frac{1}{2}(a_2-a_1)(b_2-b_1)t^2)|_0^1 \\
&= a_1(b_2-b_1) + \frac{1}{2}(a_2-a_1)(b_2-b_1) \\
&= \frac{1}{2}(a_2+a_1)(b_2-b_1).
\end{aligned}
$$

Entsprechend ist

$$\int_{\gamma_2} xdy = \frac{1}{2}(a_3+a_2)(b_3-b_2)$$

und

$$\int_{\gamma_3} xdy = \frac{1}{2}(a_1+a_3)(b_1-b_3).$$

Die Summe dieser drei Wegintegrale ist die Hälfte von

$$
\begin{aligned}
& (a_2+a_1)(b_2-b_1) + (a_3+a_2)(b_3-b_2) + (a_1+a_3)(b_1-b_3) \\
= \; & a_2b_2 - a_2b_1 + a_1b_2 - a_1b_1 + a_3b_3 - a_3b_2 + a_2b_3 - a_2b_2 + a_1b_1 - a_1b_3 + a_3b_1 - a_3b_3 \\
= \; & -a_2b_1 + a_1b_2 - a_3b_2 + a_2b_3 - a_1b_3 + a_3b_1,
\end{aligned}
$$

so dass die beiden Integrale übereinstimmen.