Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 35

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 35.1. Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Bestimme die Länge der affin-linearen Kurve

$$[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n,\, t \longmapsto tv + w.$$

Aufgabe 35.2. Sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Kurve und $c \in [a, b]$. Zeige, dass f genau dann rektifizierbar ist, wenn die beiden Einschränkungen von f auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$ rektifizierbar sind, und dass in diesem Fall

$$L_a^b(f) = L_a^c(f) + L_c^b(f)$$

gilt.

Aufgabe 35.3. Bestimme die Länge der differenzierbaren Kurve

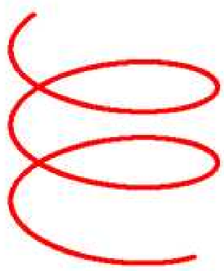
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^3 - 5x^2 + 3x - 2,$$

von -5 nach 5.

Aufgabe 35.4. Bestimme die Länge der durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, t \longmapsto (\cos t\,, \sin t\,, t),$$

gegebenen *Schraubenlinie* für t zwischen 0 und b, wobei $b \in \mathbb{R}_{>0}$.



Aufgabe 35.5. Wir betrachten die Kurve

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto (t^2-1, t^3-t).$$

a) Zeige, dass die Bildpunkte (x,y) der Kurve die Gleichung

$$y^2 = x^2 + x^3$$

erfüllen.

b) Zeige, dass jeder Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y^2 = x^2 + x^3$ zum Bild der Kurve gehört.

c) Zeige, dass es genau zwei Punkte t_1 und t_2 gibt mit identischem Bildpunkt, und dass ansonsten die Abbildung injektiv ist.

Aufgabe 35.6. Bestimme die Länge der Neilschen Parabel

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto (t^2, t^3),$$

von 0 bis b, wobei $b \in \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 35.7. Bestimme die Länge des Graphen des cosinus hyperbolicus $\cosh t$ von a nach b.

Aufgabe 35.8.*

Berechne die Länge des Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - x + 13,$$

zwischen 4 und 8.

Aufgabe 35.9.*

Wir betrachten die differenzierbare Kurve

$$f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto (t,\, \sin t\,).$$

a) Skizziere das Bild dieser Kurve und den Streckenzug, der sich ergibt, wenn man das Definitionsintervall in vier gleichlange Teilintervalle unterteilt.

b) Berechne die Gesamtlänge des in a) beschriebenen Streckenzugs.

c) Zeige, dass für die Länge L dieser Kurve die Abschätzung

$$L \,\leq\, \sqrt{2}\pi$$

gilt.

Aufgabe 35.10.*

Es sei

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Kurve und sei

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Isometrie. Beweise die Längengleichheit

$$L(\gamma) = L(\varphi \circ \gamma)\,.$$

Aufgabe 35.11. Es sei $G = \{(x, |x|) | \, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ der Graph der reellen Betragsfunktion. Man gebe eine differenzierbare Kurve

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

an, deren Bild genau G ist.

Die folgenden Aufgaben (einschließlich Aufgabe 35.21) diskutieren, inwiefern höherdimensional ein „Mittelwertsatz“ gelten kann.

Aufgabe 35.12. Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit $f(a) \neq f(b)$. Zeige, dass es kein $c \in [a, b]$ geben muss derart, dass

$$f'(c) \,=\, s \cdot (f(b) - f(a))$$

mit einem $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$, gilt.

Aufgabe 35.13. Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ und mit $f(a) \neq f(b)$. Zeige, dass es kein $c \in [a, b]$ geben muss derart, dass

$$f'(c) \,=\, s \cdot (f(b) - f(a))$$

mit einem $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, gilt.

Aufgabe 35.14. Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ und mit $f(a) \neq f(b)$. Zeige, dass es kein $c \in [a, b]$ geben muss derart, dass $f'(c)$ und $f(b) - f(a)$ linear abhängig sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 35.15. (4 Punkte)

Ein Massenteil werde zum Zeitpunkt 0 von einem Berggipfel (der als Nullpunkt der Ebene angesetzt wird) mit konstanter horizontaler Geschwindigkeit v abgeschossen und bewege sich danach luftwiderstandsfrei unter der (konstanten) Schwerkraft der Erde. Berechne die Bahnkurve $f(t)$ des Körpers und die zurückgelegte Strecke $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t.

Aufgabe 35.16. (4 Punkte)

Berechne die Länge des Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto \frac{1}{3}x^2 - 4x + 11,$$

zwischen 2 und 9.

Aufgabe 35.17. (3 Punkte)

Bestimme die Länge der differenzierbaren Kurve

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \, t \longmapsto \left(\frac{t^3}{3}, \frac{4t^5}{5}, \frac{8t^7}{7} \right),$$

von a nach b.

Aufgabe 35.18. (3 Punkte)

Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Zeige, dass f genau dann rektifizierbar ist, wenn sämtliche Komponentenfunktionen rektifizierbar sind.

Aufgabe 35.19. (5 Punkte)

Bestimme die Länge des Graphen der Exponentialfunktion $\exp t$ von a nach b.

Aufgabe 35.20. (5 Punkte)

Man gebe eine differenzierbare Kurve

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

an, deren Bild genau das Achsenkreuz ist.

Die Maiaufgabe

Die folgende Sonderaufgabe ist bis Ende Mai abzugeben.

Aufgabe 35.21. (8 Punkte)

Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Zeige, dass es ein $c \in [a, b]$ gibt derart, dass $f'(c)$ und $f(b) - f(a)$ linear abhängig sind.

Abbildungsverzeichnis