Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 22

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 22.1. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 4 der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sin x\, \cos x\,,$$

im Nullpunkt.

AUFGABE 22.2. Bestimme sämtliche Taylor-Polynome der Funktion

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

im Entwicklungspunkt $a = 3$.

AUFGABE 22.3. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ eine konvergente Potenzreihe. Bestimme die Ableitungen $f^{(k)}(a)$.

AUFGABE 22.4. Es sei $p \in \mathbb{R}[Y]$ ein Polynom und

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto g(x) = p(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass die Ableitung $g'(x)$ ebenfalls von der Form

$$g'(x) = q(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}}$$

mit einem weiteren Polynom q ist.

AUFGABE 22.5. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ die Eigenschaft

$$\lim_{x \in \mathbb{R}_+,\, x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$$

besitzt.

Aufgabe 22.6.*

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 22.7.*

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 3 zur Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 22.8. Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

eine differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften

$$f' = f \text{ und } f(0) = 1\,.$$

Zeige, dass $f(x) = \exp x$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 22.9. Bestimme das Taylor-Polynom bis zur vierten Ordnung der Umkehrfunktion des Sinus im Punkt 0 mit dem in Bemerkung 22.8 beschriebenen Potenzreihenansatz.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.10. (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Polynome im Entwicklungspunkt 0 bis zum Grad 4 der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sin(\cos x) + x^3 \exp(x^2).$$

Aufgabe 22.11. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \sin x \, \cos x\,,$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 22.12. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \sin^3 x - \frac{1}{4} \sin x\,,$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 22.13. (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom bis zur vierten Ordnung des natürlichen Logarithmus im Punkt 1 mit dem in Bemerkung 22.8 beschriebenen Potenzreihenansatz aus der Potenzreihe der Exponentialfunktion.

Aufgabe 22.14. (8 Punkte)

Zu $n \geq 3$ sei A_n der Flächeninhalt eines in den Einheitskreis eingeschriebenen gleichmäßigen n-Eckes. Zeige $A_n \leq A_{n+1}$.